

УДК 517.43

О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков¹

В. А. Садовничий

Введение

В работе И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан получили формулу для следа разности дифференциальных операторов Штурма—Лиувилля. Эта работа послужила началом целого ряда работ, посвященных формулам следов. Л. А. Дикий в обзорной статье [2] получил в каком-то смысле окончательные результаты для операторов второго порядка. В его работе показано, как можно применять эти результаты к вычислению собственных значений оператора Штурма—Лиувилля.

Мы доказываем аналогичные формулы для дифференциальных операторов высших порядков.

Сначала в §§ 1—4 мы рассматриваем оператор

$$L_1(y) = y^{(4)} + p(x)y = \lambda y, \quad y(0) = y^{(2)}(0) = y(\pi) = y^{(2)}(\pi) = 0. \quad (0.1)$$

Затем обобщаем формулы следов для оператора

$$\begin{aligned} L_2(y) &= y^{(4)} + p_2(x)y^{(2)} + p_1(x)y^{(1)} + p_0(x)y = \lambda y, \\ y(0) &= y^{(2)}(0) = y(\pi) = y^{(2)}(\pi) = 0 \end{aligned} \quad (0.2)$$

(здесь и ниже $p(x)$, $p_i(x)$, вообще говоря, — комплекснозначные функции).

¹Матем. сборник, 1967, т. 72, №2, с. 293 - 317

После этого в § 5 формулы следов выводятся для оператора

$$\begin{aligned} L_3(y) &= (-1)^m y^{(2m)} + p(x)y = \lambda y, \\ y(0) &= y^{(2)}(0) = \dots = y^{(2m-2)}(0) = y(\pi) = y^{(2)}(\pi) = \dots = \\ &= y^{(2m-2)}(\pi) = 0 \end{aligned} \quad (0.3)$$

и для дифференциального оператора порядка $2m$ вида

$$\begin{aligned} L_4(y) &= (-1)^m y^{(2m)} + p_{2m-2}(x)y^{(2m-2)} + \\ &+ p_{2m-1}(x)y^{(2m-1)} + \dots + p_0(x)y = \lambda y, \\ y(0) &= y^{(2)}(0) = \dots = y^{(2m-2)}(0) = y(\pi) = \\ &= y^{(2)}(\pi) = \dots = y^{(2m-2)}(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (0.4)$$

Заметим, что граничные условия у наших операторов—специального вида. Это связано с тем, что получение формул следов порядка выше первого для операторов с общими граничными условиями приводит к громоздким вычислениям, в то время как основные идеи остаются прежними.

Полученные формулы можно применять к приближенному вычислению собственных значений операторов.

Автор выражает глубокую благодарность А. Г. Костюченко за постоянное внимание к данной работе.

§ 1. Асимптотика собственных значений

Рассмотрим задачу (0.1). При условии, что функция суммируема, нетрудно получить асимптотическую формулу для собственных значений этого оператора. В этом случае $\lambda_n = n^4 + O(1)$. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. При условии бесконечной дифференцируемости $p(x)$ имеет место следующее асимптотическое представление $\lambda_n = n^4 + c_0 + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_4}{n^4} + \dots$, где c_0, c_2, c_4, \dots — некоторые константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda = \rho^4$, тогда уравнение

$$y^{(4)} - \rho^4 y = -p(x)y$$

имеет четыре линейно независимых решения $y_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, 4$), для

которых верны следующие представления:

$$y_k(x) = \exp\{\rho\omega_k x\} + \frac{1}{4\rho^3} \sum_{\alpha=1}^{k-1} \int_0^x \omega_\alpha \exp\{\rho\omega_\alpha(x-\xi)\} [-p(\xi)y_k(\xi) d\xi - \\ - \frac{1}{4\rho^3} \sum_{\alpha=k+1}^4 \int_x^\pi \omega_\alpha \exp\{(\rho\omega_\alpha(x-\xi))\} [-p(\xi)]y_k(\xi) d\xi.$$

где ω_α — корень четвертой степени из единицы. Интегрируя по частям, получим

$$y_k(x) = \exp\{\rho\omega_k x\} \left\{ 1 + \frac{1}{4\rho^4} \sum_{\alpha=1}^{k-1} C_{k,\alpha}^1 [\exp\{-\rho(\omega_k - \omega_\alpha)x\} \rho(0) - p(x)] - \right. \\ - \frac{1}{4\rho^5} \sum_{\alpha=1}^{k-1} C_{k,\alpha}^2 [\exp\{-\rho(\omega_k - \omega_\alpha)x\} p'(0) - p'(x)] + \\ + \frac{1}{4\rho^6} \sum_{\alpha=1}^{k-1} C_{k,\alpha}^3 [\exp\{-\rho(\omega_k - \omega_\alpha)x\} p''(0) - p''(x)] - \frac{\omega_k}{4\rho^3} \int_0^x p(\xi) d\xi - \\ - \frac{1}{4\rho^4} \sum_{\alpha=k+1}^4 C_{k,\alpha}^1 [p(x) - \exp\{-\rho(\omega_k - \omega_\alpha)(x-\pi)\} p(\pi)] + \\ + \frac{1}{4\rho^5} \sum_{\alpha=k+1}^4 C_{k,\alpha}^2 [p'(x) - \exp\{-\rho(\omega_k - \omega_\alpha)(x-\pi)\} p'(\pi)] - \\ \left. - \frac{1}{4\rho^6} \sum_{\alpha=k+1}^4 C_{k,\alpha}^3 [p''(x) - \exp\{-\rho(\omega_k - \omega_\alpha)(x-\pi)\} p''(\pi)] \right\} + O\left(\frac{1}{\rho^7}\right),$$

где $C_{k,\alpha}^p = \frac{\omega_\alpha}{(\omega_k - \omega_\alpha)^p}$ ($p = 1, 2, 3, \dots$). Пусть

$$U_{1k} = y_k(0), \quad U_{2k} = y_k^{(2)}(0), \quad U_{3k} = y_k(\pi), \quad U_{4k} = y_k^{(2)}(\pi), \quad \int_0^\pi p(x) dx = 0.$$

После преобразований можно записать

$$U_{1k} = 1 - \frac{1}{4\rho^4} \sum_{\alpha=k+1}^4 C_{k,\alpha}^1 [p(0) - p(\pi) \exp\{\rho(\omega_k - \omega_\alpha)\pi\}] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\rho^5} \sum_{\alpha=k+1}^4 C_{k,\alpha}^2 [p'(0) - p'(\pi) \exp\{\rho(\omega_k - \omega_\alpha)\pi\}] - \\
& - \frac{1}{4\rho^6} \sum_{\alpha=k+1}^4 C_{k,\alpha}^3 [p''(0) - p''(\pi) \exp\{\rho(\omega_k - \omega_\alpha)\pi\}] + O\left(\frac{1}{\rho^7}\right), \\
U_{2k} = & (\rho\omega_k)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{4\rho^4\omega_k^2} \sum_{\alpha=k+1}^4 \omega_\alpha^2 C_{k,\alpha}^1 [p(0) - p(\pi) \exp\{\rho(\omega_k - \omega_\alpha)\pi\}] + \right. \\
& + \frac{1}{4\rho^5\omega_k^2} \sum_{\alpha=k+1}^4 \omega_\alpha^2 C_{k,\alpha}^2 [p'(0) - p'(\pi) \exp\{\rho(\omega_k - \omega_\alpha)\pi\}] - \\
& \left. - \frac{1}{4\rho^6\omega_k^2} \sum_{\alpha=k+1}^4 \omega_\alpha^2 C_{k,\alpha}^3 [p''(0) - p''(\pi) \exp\{\rho(\omega_k - \omega_\alpha)\pi\}] \right\} + O\left(\frac{1}{\rho^7}\right), \\
U_{3k} = & \exp\{\rho\omega_k\pi\} \left\{ 1 + \frac{1}{4\rho^4} \sum_{\alpha=1}^{k-1} C_{k,\alpha}^1 [p(0) \exp\{-\rho(\omega_k - \omega_\alpha)\pi\} - p(\pi)] - \right. \\
& - \frac{1}{4\rho^5} \sum_{\alpha=1}^{k-1} C_{k,\alpha}^2 [p'(0) \exp\{-\rho(\omega_k - \omega_\alpha)\pi\} - p'(\pi)] + \\
& \left. + \frac{1}{4\rho^6} \sum_{\alpha=1}^{k-1} C_{k,\alpha}^3 [p''(0) \exp\{-\rho(\omega_k - \omega_\alpha)\pi\} - p''(\pi)] \right\} + O\left(\frac{1}{\rho^7}\right), \\
U_{4k} = & (\rho\omega_k)^2 \exp\{\rho\omega_k\pi\} \left\{ 1 + \right. \\
& + \frac{1}{4\rho^4\omega_k^2} \sum_{\alpha=1}^{k-1} \omega_\alpha^2 C_{k,\alpha}^1 [p(0) \exp\{-\rho(\omega_k - \omega_\alpha)\pi\} - p(\pi)] - \\
& - \frac{1}{4\rho^5\omega_k^2} \sum_{\alpha=1}^{k-1} \omega_\alpha^2 C_{k,\alpha}^2 [p'(0) \exp\{-\rho(\omega_k - \omega_\alpha)\pi\} - p'(\pi)] + \\
& \left. + \frac{1}{4\rho^6\omega_k^2} \sum_{\alpha=1}^{k-1} \omega_\alpha^2 C_{k,\alpha}^3 [p''(0) \exp\{-\rho(\omega_k - \omega_\alpha)\pi\} - p''(\pi)] \right\} + O\left(\frac{1}{\rho^7}\right).
\end{aligned}$$

Собственные значения λ_n оператора (0.1) суть нули $\Delta(\lambda) = \det\|U_{ij}\|$, ($i, l = 1, 2, 3, 4$). подставим в $\Delta(\lambda)$ формы U_{ij} . Теперь $\Delta(\lambda)$ можно записать в виде

$$\Delta(\lambda) = M_1(\rho) \exp\{\rho\omega_2\pi\} + M_2(\rho) \exp\{-\rho\omega_2\pi\} + O\left(\frac{1}{\rho^7}\right).$$

Приравнявая $\Delta(\lambda)$ нулю, получим:

$$\exp\{2\rho\omega_2\pi\} = -\frac{M_2(\rho)}{M_1(\rho)} + O\left(\frac{1}{\rho^7}\right). \quad (1.1)$$

Для функций $M_1(\rho)$ и $M_2(\rho)$ можно написать явные формулы:

$$M_1(\rho) = \theta_1[1 + A_1(\rho)], \quad M_2(\rho) = \theta_{-1}[1 + A_2(\rho)],$$

где $\theta_1 = (\omega_2^2 - \omega_4^2)(\omega_3^2 - \omega_1^2)$, $\theta_{-1} = (\omega_4^2 - \omega_3^2)(\omega_2^2 - \omega_1^2)$, так что $\frac{\theta_{-1}}{\theta_1} = -1$ для каждого сектора T комплексной плоскости (см. [3]). явные выражения для функций $A_1(\rho)$ и $A_2(\rho)$ мы не выписываем ввиду их громоздкости. логарифмируя написанное выше равенство (1.1), получим

$$2\rho\omega_2\pi = 2k\pi i + \ln_0(1 + A_2) = \ln_0(1 + A_1) + O\left(\frac{1}{\rho^7}\right)$$

(здесь $\ln_0 z$ означает главное значение логарифмов). Разложив $A_2(\rho) - A_1(\rho)$ по степеням ρ , получим:

$$A_2(\rho) - A_1(\rho) = \frac{B_4(\rho)}{\rho^4} + \frac{B_5(\rho)}{\rho^5} + \frac{B_6(\rho)}{\rho^6} + O\left(\frac{1}{\rho^7}\right).$$

Асимптотику для ρ будем по степеням k :

$$\rho = \frac{ki}{\omega_2} + \frac{\alpha_4}{k^4} + \frac{\alpha_5}{k^5} + \frac{\alpha_6}{k^6} + \dots$$

Так же, как это сделано в книге [3], можно показать, что действительно существуют нули $\Delta(\lambda)$, определяемые написанной выше формулой. Для α_i ($i = 4, 5, 6, \dots$) нетрудно получить явные выражения; для этого надо взять пределы $B_i(\rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$ по надлежащим последовательностям. Проведя необходимые для написанных выше выражений и для их дальнейших итераций, можно убедиться, что α_{2k} ($k = 2, 3, \dots$) равны нулю, так если они суть выражения вида $K(\omega_j^2 + \omega_{j+1}^2)^\rho$, где K — некоторая константа ρ — целое число, ω_j, ω_{j+1} — два последовательных корня четвертой степени из единицы, занумерованные для каждого сектора T комплексной ρ -плоскости.

Следовательно,

$$\rho = \frac{ki}{\omega_2} + \frac{\alpha_5}{k^5} + \frac{\alpha_7}{k^7} + \dots$$

и, значит, если $\int_0^\pi p(x) dx \neq 0$,

$$\lambda_k = \rho_k^4 = k^4 + c_0 + \frac{c_2}{k^2} + \frac{c_4}{k^4} + \dots,$$

что и требовалось доказать. Заметим, что таким способом можно последовательно определять значения констант C_i ($i = 0, 2, 4, \dots$)

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx, \quad c_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi p''(x) dx \quad \text{и т. д.}$$

§ 2. Дзета-функция уравнения

Для дифференциальных операторов естественно писать следующие равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k = \text{Sp} L^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.1)$$

Задача состоит в том, чтобы придать этим равенствам смысл т. е. регуляризовать расходящиеся выражения, написанные выше. Поскольку оператор L задан, формулы (2.1) могут быть использованы для приближенного вычисления собственных значений операторов.

Карлеман и Минакхисундарам ввели в рассмотрение некоторые функции, связанные с дифференциальным оператором, такие, как

$$Z(P, Q, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} \varphi_n(P) \cdot \varphi_n(Q), \quad Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s},$$

$$R(P, Q, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(P) \varphi_n(Q)}{\lambda_n + \zeta}, \quad R(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \zeta}.$$

Первые две – это так называемые "дзета-функции", последние две – ядро и след резольвенты. Эти функции изучаются в комплексной области, а затем извлекается та или иная информация о поведении собственных значений. Действительно, равенство

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \text{Sp} \left(\frac{d^4}{dx^4} + p \right)^{-s} \quad \text{при} \quad \text{Re } s > \frac{1}{4} \quad (2.2)$$

имеет смысл. Значения аналитического выражения $Z(s)$ влево при целых отрицательных s , по определению, и будем называть регуляризованными следами $\sum_{n=1}^{\infty}$ и будем их обозначать, следуя работе [2], через $\sum_{n=1}^{\infty*} \lambda_n^k$.

Докажем следующий аналог определения $\sum_{n=1}^{\infty*} \lambda_n^k$.

ТЕОРЕМА 1. Регуляризованные суммы $\sum_n^* \lambda_n^k$ могут быть определены как суммы, каждый член которых есть разность λ_n^k и члены асимптотики λ_n^k , содержащих неотрицательные степени n . Из всей суммы надо вычесть половину члена асимптотики, не содержащего n . Асимптотика λ_n^k получается из асимптотики λ_n формальным возведением в k -ю степень.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\lambda_n = n^4 + c_0 + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_4}{n^4} + \frac{c_6}{n^6} + \dots$, то

$$\begin{aligned} \lambda_n^{-s} &= n^{-4s} \left(1 + \frac{c_0}{n^4} + \frac{c_2}{n^6} + \frac{c_4}{n^8} + \frac{c_6}{n^{10}} + \dots \right) = \\ &= n^{-4s} \left[1 - \frac{sc_0}{n^4} - \frac{sc_2}{n^6} + \frac{s(s+1)c_0^2}{2n^8} - \frac{c_4}{n^8} + \dots \right] = n^{-4s} + \\ &+ d_4(s)n^{-4s-4} + d_6(s)n^{-4s-6} + \dots + d_{4k}(s)n^{-4s-4k} + O(n^{-4s-4k-2}), \end{aligned}$$

где $d_4(s), d_6(s), d_8(s), \dots$, — некоторые функции s . Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n^{-s} - n^{-4s} - d_4(s)n^{-4s-4} - d_6(s)n^{-4s-6} - \dots - d_{4k}(s)n^{-4s-4k}] = \\ = Z(s) - \zeta(4s) - d_4(s)\zeta(4s+4) - \dots - d_{4k}(s)\zeta(4s+4k). \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\zeta(4s) = \sum_{n=1}^{\infty} (n^4)^{-s}$ — дзета-функция Римана.

Учитывая, что ряд в левой части соотношения (2.3) сходится при $\text{Res} > -k - \frac{1}{4}$, мы получаем требуемое аналитическое продолжение, а при $s = -k$ получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n^k - n^{4k} - d_4(-k)n^{4k-4} - d_6(-k)n^{4k-6} - \dots - d_{4k}(-k)] = \\ = Z(-k) + \frac{1}{2} d_{4k}(-k), \end{aligned}$$

так как значения римановой дзета-функции в точках $s = -2, -4, \dots$ равны нулю, а $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Теорема доказана.

Из равенства (2.3) получим важное следствие. Действительно,

$$Z(s) = \zeta(4s) + d_4(s)\zeta(4s+4) + \dots + d_{4k}(s)\zeta(4s+4k) + \sum_{n=1}^{\infty} O(n^{-4s-4k-2}),$$

а так как $\zeta(0)$ имеет при $s = 1$ полюс с вычетом 1, то $Z(s)$ имеет полюса при $s = \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{4}, \dots$

Функции $d_4(s), d_6(s), d_8(s), \dots$ выражаются через коэффициенты c_0, c_2, c_4, \dots . Через эти функции выражаются вычеты $Z(s)$, как было сказано выше. Выразив вычеты $Z(s)$ через оператор L_1 , получим способ определения коэффициентов c_0, c_2, c_4, \dots

Для вычисления регуляризованных следов применим метод работы [2]. Наши операторы—несамосопряженные, но тем не менее результаты В. Б. Лидского [4] позволяют вычислить следы, если они существуют, в разных базисах.

Запишем следующее равенство:

$$R(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \zeta} = \text{Sp} \left(\frac{d^4}{dx^4} + p + \zeta \right)^{-1}. \quad (2.4)$$

Функция $Z(s)$ и резольвента $R(\zeta)$ при $\frac{1}{4} < \text{Re } s < 1$ связаны следующим интегральным соотношением:

$$Z(s) = \frac{1}{\pi} \sin s\pi \int_0^{\infty} \zeta^{-s} R(\zeta) d\zeta.$$

Это соотношение легко доказывается и в случае несамосопряженного оператора.

По формуле обращения Меллина, получим

$$R(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \zeta^{s-1} \frac{\pi Z(s)}{\sin \pi s} ds \quad \left(\frac{1}{4} < \gamma < 1 \right).$$

Контур интегрирования можно перенести налево, так как мы знаем аналитическое продолжение функции $Z(s)$. При этом $Z(s)$ растет медленнее, чем $\sin s\pi$, который растет экспоненциально. Обозначим вычеты $Z(s)$ при $s = \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, \dots$ так: Выч $Z(s)$ ($k = 0, 2, 3, 4, \dots$), $s = -\frac{k}{2} + \frac{1}{4}$

тогда

$$R(\zeta) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{Z(-k)}{\zeta^{k+1}} + \sum_{k=0}^N {}'(-1)^{[\frac{k+1}{2}]} \cdot \frac{2\pi \text{ Выч } Z(s)}{\sqrt{2} \zeta^{\frac{k}{2} + \frac{3}{4}}} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-N-\varepsilon-i\infty}^{N+\varepsilon+i\infty} \zeta^{s-1} \cdot \frac{\pi Z(s)}{\sin \pi s} ds, \quad (2.5)$$

где $[\frac{k+1}{2}]$ означает целую часть $\frac{k+1}{2}$, а $\sum_{k=0}^N {}^*$ означает, что суммирование происходит так, что $k \neq 1$.

Последний интеграл при больших ζ допускает оценку, так что формула (2.5) дает асимптотическое представление $R(\zeta)$.

Разложив по степеням ζ правую часть (2.4) и приравняв коэффициенты при целых отрицательных степенях параметра, получим регуляризованные формулы следов, а приравнявая коэффициенты при дробных отрицательных степенях ζ , получим способ вычисления c_0, c_2, \dots

Задача свелась, таким образом, к получению асимптотического разложения по степеням выражения

$$\text{Sp}(D^4 + p + \zeta)^{-1} \quad \left(D = i \frac{d}{dx} \right).$$

§ 3. Простейший случай

Сначала рассмотрим случай, когда функция $p(x)$ в соотношении (0.1) и все ее производные обращается в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$. В этом случае имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $p(x)$ бесконечно дифференцируема и обращается в нуль вместе со всеми своими производными на концах отрезка $[0, \pi]$. Тогда для оператора L_1 имеет место следующее асимптотическое представление:

$$\text{Sp}(D^4 + p + \zeta)^{-1} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4\zeta^{\frac{3}{4}}} - \frac{1}{2\zeta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{\zeta^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}}} \quad (m_k \text{ — константы}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим оператор L_1^{-s} в сходящийся по норме ряд:

$$(D^4 + p + \zeta)^{-1} = (D^4 + \zeta)^{-1} - \\ - (D^4 + \zeta)^{-1} p (D^4 + \zeta)^{-1} + \dots + (D^4 + \zeta)^{-1} p \dots p (D^4 + \zeta)^{-1} + \dots \\ (D^4 + \zeta)^{-1} - \text{интегральный оператор с ядром } G(x, y, \zeta), \text{ которые вычисляются в явном виде:}$$

$$G(x, y, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^4 + \zeta} = \\ = \frac{1}{2i\sqrt{\zeta}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2 - i\sqrt{\zeta}} - \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2 + i\sqrt{\zeta}} \right].$$

С помощью теории вычетов легко сосчитать

$$H(x, y, \eta) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2 + \eta} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\eta} \operatorname{sh} \pi \sqrt{\eta}} \operatorname{sh} \sqrt{\eta} x \operatorname{sh} \sqrt{\eta} (\pi - x) & \text{при } x \leq y, \\ \frac{1}{\sqrt{\eta} \operatorname{sh} \pi \sqrt{\eta}} \operatorname{sh} \sqrt{\eta} (\pi - x) \operatorname{sh} \sqrt{\eta} y & \text{при } x > y. \end{cases}$$

Заметим, что $H(x, y, \eta)$ есть ядро $(D^2 + \zeta)^{-1}$. Произведя необходимые вычисления, получим, что $G(x, y, \zeta)$ есть функция вида

$$\frac{\sqrt{2}}{4\zeta^{\frac{3}{4}}} \exp \left\{ -\frac{\zeta^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} |x - y| \right\} \cos \frac{|x - y|}{\sqrt{2}} \cdot \zeta^{\frac{1}{4}} + A,$$

где A — функции, экспоненциально убывающие внутри $[0, \pi]$, хотя и неравномерно при приближении к границе. Но на границе $p(x)$ обращается в нуль вместе со своими производными, поэтому второе слагаемое не будет оказывать влияние на асимптотику. Следовательно,

$$\operatorname{Sp} \left[\left(\frac{d^4}{dx^4} + \zeta \right)^{-1} p \left(\frac{d^4}{dx^4} + \zeta \right)^{-1} p \dots p \left(\frac{d^4}{dx^4} + \zeta \right)^{-1} \right] \approx \\ \approx \frac{2^{\frac{n}{2}}}{4^n \zeta^{\frac{3n}{4}}} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \exp \left\{ -\frac{\zeta^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} [|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_n - x_1|] \right\} \times \\ \times \cos \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{2}} \zeta^{\frac{1}{4}} \dots \cos \frac{|x_n - x_1|}{\sqrt{2}} \zeta^{\frac{1}{4}} p(x_2) \dots p(x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

В окрестности $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ разложим косинусы и $p(x_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_i - x_1)^k}{k!} p^{(k)}(x_1)$. Сделав замену $\sqrt[4]{\zeta}(x_{i+1} - x_1) = \eta_i$, получим, что правую часть можно записать с точностью до членов более высокого порядка малости как сумму членов вида

$$2^{\frac{n}{2}} [4^n (\sqrt[4]{\zeta})^{k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} + 4n-1} m_1! \dots m_{n-1}! k_1! \dots k_{n-1}!]^{-1} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-(|\eta_1| + |\eta_2 - \eta_3| + \dots + |\eta_{n-1}|)\} \times \\ \times |\eta_1|^{m_1} \dots |\eta_{n-1}|^{m_{n-1}} \cdot \eta_1^{k_1} \dots \eta_{n-1}^{k_{n-1}} d\eta_1 \dots d\eta_{n-1} \times \\ \times \int_0^{\pi} p^{(k_2)}(x) \dots p^{(k_n)}(x) dx.$$

Отсюда следует, что отличны от нуля лишь те интегралы, для которых $k_1 + \dots + k_{n-1}$ — четное число. Случай $n = 1$ надо рассмотреть отдельно. Из теоремы 2 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Если функция $p(x)$ обращается в нуль вместе со всеми своими производными на концах отрезка $[0, \pi]$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

§ 4. Вычисление формул следов

Предположим теперь, что только нечетные производные $p(x)$ обращаются в нуль на концах отрезка. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2. Для L_1^{-1} справедливо следующее разложение:

$$\left(\frac{d^4}{dx^4} + p + \zeta \right)^{-1} = \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^l (-1)^{\frac{l+m}{6}} B_{i,m}(x) D^m (D^4 + \zeta)^{-1 - \frac{l+m}{6}} + R_N, \quad (4.1)$$

где $D = i \frac{d}{dx}$, $B_{i,m}(x)$ — некоторые функции, тождественно равные нулю, если $l + m$ не делится на 6, оператор R_N такой, что $\|R_N\| =$

$= O(|\zeta|^{-1-\frac{N}{6}})$, а для $B_{lm}(x)$ верны следующие рекуррентные соотношения:

$$B_{l+6,m}(x) = 4iB'_{l+3,m-3}(x) - 6B''_{l+2,m-2}(x) - 4iB'''_{l+1,m-1}(x) + B_{l,m}^{IV}(x) + p(x)B_{l,m}(x), \quad (4.2)$$

$B_{0,0}(x) \equiv 1$, $B_{l,m}(x) = 0$, если $l < 0$ или $m < 0$ и если $m > l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возведя оператор $(D^4 + p + \zeta)$ в степень k , получим:

$$(D^4 + p + \zeta)^k = \sum_{l=0}^{6k} \sum_{m=0}^l A_{l,m}(k, x) D^m (D^4 + \zeta)^{k-\frac{l+m}{6}}. \quad (4.3)$$

Умножая обе части этого равенства на $(D^4 + p + \zeta)$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых $D^m (D^4 + \zeta)^\alpha$, получим:

$$A_{l+6,m}(k+1, x) - A_{l+6,m}(k, x) = 4iA'_{l+3,m-3}(k, x) - 6A''_{l+2,m-2}(k, x) - 4iA'''_{l+1,m-1}(k, x) + A_{l,m}^{IV}(k, x) + pA_{l,m}(k, x), \quad (4.4)$$

$A_{0,0}(k, x) \equiv 1$; $A_{l,m}(k, x) = 0$, если $l+m$ не делится на 6 или если один из индексов — отрицательный, или если $m > l$. По индукции доказывается, что $A_{l,m}(k, x) = \left(\frac{k}{l+m}\right) B_{l,m}(x)$, где $\left(\frac{k}{l+m}\right)$ — биномиальный коэффициент. Формулы (4.2) будем считать верными при отрицательных k . Покажем, во-первых, что

$$(A + \zeta)^{-1} = \left(\frac{d^4}{dx^4} + p + \zeta \right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l A_{l,m}(-1, x) (D^4 + p + \zeta)^{-1-\frac{l+m}{6}} D^m \quad (4.5)$$

— обратный оператор к $(D^4 + p + \zeta)$ и, во-вторых, что этот ряд — асимптотический, т. е. что если его оборвать на некотором N , то остаток удовлетворяет нужному свойству. Умножим для этого равенство (4.5) на $(A + \zeta)$. Получим:

$$1 = \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^l (A + \zeta) A_{l,m}(-1, x) D^m (D^4 + \zeta)^{-1-\frac{l+m}{6}}.$$

Но для оператора умножения на функцию и оператора дифференцирования существуют правила коммутации:

$$(A + \zeta) A_{l,m} = A_{l,m} (D^4 + \zeta) + 4iA'_{l,m} D^3 - 6A''_{l,m} D^2 - 4iA'''_{l,m} D + A_{l,m}^{IV} + pA_{l,m}.$$

Подставляя это выражение в сумму, произведя замену порядка суммирования и пользуясь формулами (4.2), получим:

$$\begin{aligned}
 1 = & 1 + \sum_{l=-6}^{N-6} \sum_{m=0}^{l+6} A_{l+6,m}(0, x) (D^4 + \zeta)^{-1-\frac{l+m}{6}} D^m + \\
 & + 4i \sum_{l=N-2}^N \sum_{m=0}^l A'_{l,m} (D^4 + \zeta)^{-1-\frac{l+m}{6}} D^m - \\
 & - 6 \sum_{l=N-2}^N \sum_{m=0}^l A''_{l,m} (D^4 + \zeta)^{-1-\frac{l+m}{6}} D^m - \\
 & - 4i \sum_{l=N-4}^N \sum_{m=0}^l A'''_{l,m} (D^4 + \zeta)^{-1-\frac{l+m}{6}} D^m + \\
 & + \sum_{l=N-3}^N \sum_{m=0}^l (A_{l,m}^{IV} + p A_{l,m}) + (A + \zeta) R_N.
 \end{aligned}$$

Первая сумма в этом выражении равна нулю. Таким образом, остаток $(A + \zeta)R_0$ получается в виде комбинации операторов, нормы которых имеют нужный порядок малости по ζ , так как N произвольно. Так как оператор $(A + \zeta)$ имеет обратный, то из последнего равенства следует, что обратный оператор записывается в виде (4.5). В силу условий, наложенных на функцию $p(x)$, все проведенные операции законны.

В дальнейшем понадобятся функции $B_{l,m}(x)$, выписанные в явном виде. Поэтому приведем таблицу $B_{l,m}(x)$:

$l \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6
6	$p(x)$	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	$-4ip^{(1)}$	0	0	0
10	0	0	$6p^{(2)}$	0	0	0	0
11	0	$-4ip^{(3)}$	0	0	0	0	0
12	$p^{(4)} + p^2$	0	0	0	0	0	$-16p^{(2)}$
13	0	0	0	0	0	$-48ip^{(3)}$	0
14	0	0	0	0	$66p^{(4)}$	0	0
15	0	0	0	$56ip^{(5)} + 2ipp^{(1)}$	0	0	0
16	0	0	$4p^{(6)} - 18pp^{(2)} - 12[p^{(1)}]^2$	0	0	0	0
17	0	$-8ip^{(7)} - 24ip^{(1)}p^{(2)} - 12pp^{(3)}$	0	0	0	0	0

Вычислим $\text{Sp}[(-1)^{\frac{m+l}{6}} B_{l,m}(x) D^m (D^4 + \zeta)^{-1 - \frac{l+m}{6}}]$. След будем считать в базисе $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$. При l, m четных получим, что след равен

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} (-1)^{\frac{l+m}{6}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^m}{(n^4 + \zeta)^{1 + \frac{l+m}{6}}} \int_0^{\pi} B_{l,m}(x) \sin^2 nx \, dx = \\ & = \frac{(-1)^{\frac{l+m}{6}}}{\pi} \int_0^{\pi} B_{l,m}(x) \, dx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^m}{(n^4 + \zeta)^{1 + \frac{l+m}{6}}} - \\ & - \frac{(-1)^{\frac{l+m}{6}}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^m}{(n^4 + \zeta)^{1 + \frac{l+m}{6}}} \int_0^{\pi} B_{l,m}(x) \cos 2nx \, dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

При l и m нечетных имеем:

$$\frac{(-1)^{\frac{l+m}{6}} i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^m}{(n^4 + \zeta)^{1 + \frac{l+m}{6}}} \int_0^{\pi} B_{l,m}(x) \sin 2nx \, dx. \quad (4.7)$$

Подсчитаем асимптотику каждого члена в отдельности. Так как при l четном все нечетные производные от $B_{l,m}(x)$ обращаются в нуль на концах интеграла, а при l нечетном — все четные производные, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} B_{l,m}(x) \cos 2nx \, dx &= \frac{(-1)^{2\alpha + \frac{m}{2}}}{(2n)^{4\alpha+m}} \int_0^{\pi} B_{l,m}^{(4\alpha+m)}(x) \cos 2nx \, dx, \\ \int_0^{\pi} B_{l,m}(x) \sin 2nx \, dx &= \frac{(-1)^{2\alpha + \frac{m-1}{2}}}{(2n)^{4\alpha+m}} \int_0^{\pi} B_{l,m}^{(4\alpha+m)}(x) \cos 2nx \, dx, \end{aligned}$$

учитывая, что

$$\frac{n^m}{(n^4 + \zeta)^{1 + \frac{l+m}{6}}} = \sum_{a=0}^{\infty} \left(-1 - \frac{l+m}{6} \right) \frac{n^{4\alpha+m}}{\zeta^{\alpha+1 + \frac{l+m}{6}}},$$

получим след, который дает второй член (4.6), в виде

$$\frac{(-1)^{\frac{l+m}{6}}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left(-1 - \frac{l+m}{6} \right) \frac{(-1)^{2\alpha + \frac{m}{2}}}{2^{4\alpha+m} \zeta^{\alpha+1 + \frac{l+m}{6}}} \int_0^{\pi} B_{l,m}^{(4\alpha+m)}(x) \cos 2nx \, dx, \quad (4.8)$$

а след, который дает член (4.7), в виде

$$\frac{(-1)^{\frac{l+m}{6}} i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{-1 - \frac{l+m}{6}}{\alpha} \frac{(-1)^{2\alpha + \frac{m-1}{2}}}{2^{4\alpha+m} \zeta^{a+1+\frac{l+m}{6}}} \int_0^{\pi} B_{l,m}^{(4\alpha+m)}(x) \cos 2nx \, dx, \quad (4.9)$$

Пользуясь соотношением

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} B_{l,m}^{(4\alpha+m)}(x) \cos 2nx \, dx = \begin{cases} \frac{B_{l,m}^{(4\alpha+m)}(0) + B_{l,m}^{(4\alpha+m)}(\pi)}{4} & \text{при } 4\alpha + m > 0, \\ \frac{B_{l,0}(0) + B_{l,0}(\pi)}{4} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} B_{l,0}(x) \, dx & \text{при } m = \alpha = 0, \end{cases}$$

запишем выражение (4.8) в виде

$$-(-1)^{\frac{m}{2} + \frac{l+m}{6}} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{-1 - \frac{l+m}{6}}{\alpha} \frac{B_{l,m}^{(4\alpha+m)}(0) + B_{l,m}^{(4\alpha+m)}(\pi)}{2^{4\alpha+m+2} \zeta^{1+\alpha+\frac{l+m}{6}}} + \\ + \frac{(-1)^{\frac{l}{6}}}{2\pi} \frac{\int_0^{\pi} B_{l,0}(x) \, dx}{\zeta^{1+\frac{l}{6}}},$$

а выражение (4.9) в виде

$$i(-1)^{\frac{l+m}{6} + \frac{m-1}{2}} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{-1 - \frac{l+m}{6}}{\alpha} \frac{B_{l,m}^{(4\alpha+m)}(0) - B_{l,m}^{(4\alpha+m)}(\pi)}{2^{4\alpha+m+2} \zeta^{1+\alpha+\frac{l+m}{6}}}.$$

Первый член в (4.6) при $m = 0$ дает:

$$\frac{(-1)^{\frac{l}{6}}}{2} \int_0^{\pi} B_{l,0}(x) \, dx \left[\zeta^{-\frac{3}{4}-\frac{l}{6}} \left(\frac{l}{6} - \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\pi} \zeta^{-1-\frac{l}{6}} \right]; \quad (4.10)$$

здесь мы воспользовались легко доказываемыми с помощью вычетов соотношением

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^4 + \zeta)^{k+1}} = -\frac{1}{2} \zeta^{-k-1} + \frac{(-1)^k \sqrt{2} \pi}{4} \cdot \binom{-\frac{3}{4}}{k} \zeta^{-\frac{\pi}{6}-k} + R^1.$$

При $m > 0$, аналогично оценивая остаток, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^m}{(n^4 + \zeta)^{1+\frac{l+m}{6}}} = \frac{1}{\zeta^{\frac{l}{6} + \frac{3}{4} - \frac{m}{12}}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m}{4} + \frac{1}{4}) \Gamma(1 + \frac{l+m}{6} - \frac{m}{4} - \frac{1}{4})}{4\Gamma(1 + \frac{l+m}{6})} + R^2.$$

Остатки $R^1(\zeta)$ и $R^2(\zeta)$ экспоненциально убывают, поэтому в дальнейшем мы их писать не будем, следовательно, первый член в (4.1) при $m > 0$ дает:

$$\frac{(-1)^{\frac{l+m}{6}}}{\pi \cdot \zeta^{\frac{l}{6} + \frac{3}{4} - \frac{m}{12}}} \cdot \int_0^\pi B_{l,m}(x) dx \cdot \frac{\Gamma(\frac{m}{4} + \frac{1}{4})\Gamma(1 + \frac{l+m}{6} - \frac{m}{4} - \frac{1}{4})}{4\Gamma(1 + \frac{l+m}{6})} + R^2.$$

Полученные формулы следов подставим в разложение (4.1). Целые степени ζ объединим в одну форму. Получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (-1)^{\frac{l+m}{6}} i^{3m+2} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{-1 - \frac{l+m}{6}}{\alpha} B_{l,m}^{(4\alpha+m)}(0) + \\ & + B_{l,m}^{(4\alpha+m)}(\pi) [2^{4\alpha+m+2} \zeta^{1+\alpha+\frac{l+m}{6}}]^{-1} = \\ & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (-1)^{\frac{l+m}{6}} i^{3m+2} \sum_{k=\frac{l+m}{6}}^{\infty} \binom{k}{\frac{l+m}{6}} (-1)^{k-\frac{l+m}{6}} \cdot [B^{(4k+m-\frac{l+m}{6} \cdot 4)}(0) + \\ & + B_{l,m}^{(4k+m-\frac{l+m}{6} \cdot 4)}(\pi)] \cdot [2^{4k+m-\frac{l+m}{6} \cdot 4+2} \zeta^{k+1}]^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали следующие равенства:

$$k = \alpha + \frac{l+m}{6}, \quad \binom{-1 - \frac{l+m}{6}}{k - \frac{l+m}{6}} = (-1)^{k-\frac{l+m}{6}} \binom{k}{\frac{l+m}{6}}.$$

Произведя упрощение, получим, что целые степени дают

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\zeta^{k+1}} \left\{ \sum_{l=0}^{6k} [A_l(k, 0) + A_l(k, \pi)] \right\}, \quad (4.11)$$

где

$$A_l(k, 0) = \sum_{m=0}^l i^{3m+2} \binom{k}{\frac{l+m}{6}} B_{l,m}^{(4k+m-\frac{l+m}{6} \cdot 4)}(0) \left[2^{4k+m-\frac{l+m}{6} \cdot 4+2} \right]^{-1}, \quad (4.12)$$

$A_l(k, \pi)$ — соответствующее выражение $B_{l,m}^{(j)}(\pi)$.

Просуммируем теперь нецелые степени ζ . Получим:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (-1)^{\frac{l+m}{6}} \cdot \frac{1}{\zeta^{\frac{l+m}{6} + \frac{3}{4} - \frac{m}{4}}} \int_0^\pi B_{l,m}(x) dx \cdot \frac{\Gamma(\frac{m+1}{4})\Gamma(1 + \frac{l+m}{6} - \frac{m+1}{4})}{4\Gamma(1 + \frac{l+m}{6})}.$$

Полагая

$$A_\alpha(x) = \sum_{\frac{l+m}{6} - \frac{m}{4} = \frac{\alpha}{2}} (-1)^{\frac{l+m}{6}} (-1)^{[\frac{\alpha+1}{2}]} \cdot B_{l,m}(x) \times \\ \times \frac{\Gamma(\frac{m+1}{4})\Gamma(1 + \frac{l+m}{6} - \frac{m+1}{4})}{4\Gamma(1 + \frac{l+m}{6})} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2}, \quad (4.13)$$

где $l + m$ делится на 6, $l > m$, запишем то, что дают целые степени:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=0}^{\infty'} (-1)^{[\frac{\alpha+1}{2}]} \cdot \frac{\int_0^\pi A_\alpha(x) dx}{\zeta^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}}}$$

(здесь \sum' означает, что $\alpha \neq 1$, а $[m]$ означает целую часть числа m). Сравнивая это выражение с (2.5), получим:

$$\text{ВЫГ} \quad Z(s) = \int_0^\pi A_k(x) dx \quad (k = 0, 2, 3, 4, \dots). \quad (4.14)$$

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 4. Если все нечетные производные функции $p(x)$ обращаются в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$, то при больших ζ имеет место следующее асимптотическое представление

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \zeta} = \text{Sp}(D^4 + p + \zeta)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\zeta^{k+1}} \sum_{l=0}^{6k} [A_l(k, 0) + A_l(k, \pi)] + \\ + \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty'} \frac{(-1)^{[\frac{k+1}{2}]} \int_0^\pi A_k(x) dx}{\zeta^{\frac{k}{2} + \frac{3}{4}}}, \quad (4.15)$$

где $A_k(x)$, $A_l(k, 0)$, $A_l(k, \pi)$ находятся по формулам (4.13), (4.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из теоремы 4 следует и доказательство того факта, что λ_n имеет вышезаписанное асимптотическое представление. Действительно, если бы в разложении λ_n присутствовала хотя бы одна нечетная степень n , то формула (2.5) имела бы вид, отличный от (4.15).

Из вышесказанного следует

ТЕОРЕМА 5. Если все нечетные производные функции $p(x)$ обращаются в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$, то

$$Z(-k) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k = \sum_{l=0}^{6k} (A_l(k, 0) + A_l(k, \pi)). \quad (4.16)$$

Из равенства (4.15) при условии теоремы 5 и при условии, что $\int_0^{\pi} p(x) dx = 0$, можно извлечь еще одно следствие, а именно, посчитать коэффициенты асимптотического представления λ_n по степеням n . Как было сказано выше, полюсы функции $Z(s)$ находятся в точках $s = -\frac{k}{2} + \frac{1}{4}$ ($k = 0, 2, 3, 4, \dots$), вычеты в этих точках выражаются через c_0, c_2, c_4, \dots и равны

$$\frac{1}{4} \sum_{r=1}^k \binom{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}{r} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = k-r} c_{4\alpha_1} c_{4\alpha_2} \dots c_{4\alpha_r},$$

или

$$\frac{1}{4} \sum_{r=1}^k \binom{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}{r} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = k-r} c_{4\alpha_1+2} c_{4\alpha_2} \dots c_{4\alpha_r},$$

в зависимости от того, получается он из коэффициента при $\zeta(4s + 4k)$ или из коэффициента при $\zeta(4s + 4k + 2)$ (вычет при $k = 0$ равен $\frac{1}{4}$). Действительно,

$$\begin{aligned} Z(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^4 + c_0 + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_4}{n^4} + \dots \right)^{-s} = \\ &= \zeta(4s) + \binom{-s}{1} c_0 \zeta(4s + 4) + \binom{-s}{1} c_2 \zeta(4s + 6) + \\ &\quad + \left[\binom{-s}{2} c_0^2 + \binom{-s}{1} c_4 \right] \zeta(4s + 8) + \\ &\quad + \left[\binom{-s}{1} c_6 + \binom{-s}{2} c_0 c_2 \right] \zeta(4s + 10) + \left[\binom{-s}{1} c_8 + \binom{-s}{2} c_0 c_4 + \right. \\ &\quad \left. + \binom{-s}{3} c_0^3 \right] \zeta(4s + 12) + \left[\binom{-s}{1} c_{10} + c_2 c_4 \binom{-s}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \binom{-s}{3} c_0^2 c_2 \right] \zeta(4s + 14) + \dots, \end{aligned}$$

каждый следующий член ряда дает новый полюс, поскольку $\zeta(s)$ имеет простой полюс при $s = 1$ с вычетом, равным 1. С другой стороны из

сравнения коэффициентов при нецелых степенях ζ в равенствах (2.5) и (4.15) вычеты $Z(s)$ выражаются через функцию $p(x)$. Таким образом, получается система для определения коэффициентов $c_0, c_2, c_4 \dots$. Так, например, пользуясь таблицей $B_{l,m}(x)$, находим:

$$c_0 = 0, \quad c_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi p''(x) dx, \quad c_4 = \frac{3}{8\pi} \int_0^\pi [p^{IV}(x) + p^2(x)] dx, \dots$$

Если не предполагать, что $\int_0^\pi p(x) dx = 0$, то $c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx$. Запишем несколько регуляризованных формул следов ($c_0 = 0$):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^4) &= -\frac{p(0) + p(\pi)}{4}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^2 - n^8 - 2c_2 n^2 - 2c_4) &= c_4 - \frac{p^2(0) + p^2(\pi)}{4} - \frac{p^{IV}(0) + p^{IV}(\pi)}{32}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить собственные значения, надо взять вместо написанных сумм некоторое количество членов, считая их приближениями суммы, затем нужно взять необходимое количество уравнений и решить получившуюся алгебраическую систему.

Теперь рассмотрим оператор (0.2). Полагая $D = i \frac{d}{dx}$, получим оператор $L_2 = D^4 - p_2 D^2 - ip_1 D + p_0 = \lambda$, определенный на заданной выше области. В этом случае можно показать, что асимптотика λ_n будет следующей:

$$\lambda_n = n^4 + c_{-2} n^2 + c_0 + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_4}{n^2} + \dots$$

Предположим, что все нечетные производные функций $p_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, обращается в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$.

Основные формулы (4.14) и (4.16) останутся теми же, но вместо прежних $B_{l,m}(x)$ надо составить новые $\bar{B}_{l,m}(x)$, определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{l+6,m}(x) &= 4i\bar{B}'_{l+3,m-3}(x) - [6\bar{B}''_{l+2,m-2}(x) + p_2\bar{B}_{l+2,m-2}(x)] - \\ &- [4i\bar{B}'''_{l+1,m-1}(x) + 2ip_2\bar{B}'_{l+1,m-1}(x) + ip_1\bar{B}_{l+1,m-1}(x)] + p_2\bar{B}_{l,m}(x) + \\ &+ p_2\bar{B}'_{l,m}(x) + \bar{B}^{IV}_{l,m}(x) + p_0\bar{B}_{l,m}(x), \end{aligned}$$

причем $\bar{B}_{0,0}(x) \equiv 1$; $\bar{B}_{l,m}(x) = 0$, если $m > l$ и если один из индексов отрицательный. Из этого соотношения последовательно находим все $\bar{B}_{l,m}(x)$, для которых можно составить таблицу, аналогичную приведенной выше. Так, например,

$$\bar{B}_{4,2}(x) = p_2(x), \quad \bar{B}_{6,0}(x) = p_0(x), \quad \bar{B}_{12,0}(x) = p_0^2(x) + p_2(x)p_0''(x) + p_1(x)p_0'(x) - p_0^{IV} \dots$$

Для этого случая мы запишем только первый след:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^4 - c_{-2}n^2 - c_0) = \frac{1}{2}c_0 - \frac{p_0(0) + p_0(\pi)}{4},$$

где

$$c_{-2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p_2(x) dx, \quad c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p_0(x) dx.$$

§ 5. Операторы высшего порядка

Рассмотрим теперь оператор

$$\begin{aligned} L_3(y) &= (-1)^m y^{(2m)} + p(x)y = \lambda y, \\ y(0) &= y^{(2)}(0) = \dots = y^{(2m-2)}(0) = 0, \\ y(\pi) &= y^{(2)}(\pi) = \dots = y^{(2m-2)}(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (0.3)$$

В этом случае

$$\lambda_n = n^{2m} + c_0 + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_4}{n^4} + \dots, \quad (5.1)$$

причем константы c_0, c_2, c_4, \dots отличны от ранее встречавшихся. Аналогично тому, как это делалось выше, получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n^{-s} - n^{-2ms} - d_{2m}(s)n^{-2ms-2m} - d_{2m+2}(s)n^{-2ms-2m-2} - \dots \\ \dots - d_{2mk}(s)n^{-2ms-2mk}] = Z(s) - \zeta(2ms) - d_{2m}(s)\zeta(2ms+2m) - \\ - d_{2m+2}(s)\zeta(2ms+2m+2) - \dots - d_{2mk}(s)\zeta(2ms+2mk), \end{aligned}$$

где $\zeta(2ms) = \sum_{n=1}^{\infty} (n^{2m})^{-s}$ — дзета-функция Римана. При $s = -k$ получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n^k - n^{2mk} - d_{2m}(-k)n^{2mk-2m} - d_{2m+2}(-k)n^{2mk-2m-2} - \dots \\ - d_{2mk}(-k)] = Z(-k) + \frac{1}{2} d_{2mk}(-k),$$

Полюса функции $Z(s)$ находятся в точках

$$s = \frac{1}{2m}, \quad \frac{-2m+1}{2m}, \quad \frac{-2m-1}{2m}, \quad \frac{-2m-3}{2m}, \dots:$$

связь с резольвентой дзета-функции теперь следующая:

$$R(\zeta) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{Z(-k)}{\zeta^{k+1}} + \sum_{k=0}^N \pi \cdot \underset{s=\frac{1}{2m}-\frac{m+k}{m}}{\text{Выч}} Z(s) \left[\zeta^{\frac{m+k}{m}+\frac{2m-1}{2m}} \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{(-2m-2k+4)\pi}{2m} \right]^{-1} + \pi \underset{s=\frac{1}{2m}}{\text{Выч}} Z(s) \left[\zeta^{\frac{2m-1}{2m}} \cdot \sin \frac{\pi}{2m} \right]^{-1} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-N-\varepsilon-i\infty}^{-N-\varepsilon+i\infty} \zeta^{s-1} \frac{\pi \cdot Z(s)}{\sin \pi s} ds, \quad (5.2)$$

Получим теперь разложение правой части равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \zeta} = \text{Sp}(D^{2m} + p + \zeta)^{-1}, \quad D = i \frac{d}{dx}.$$

Если предположить, что функция $p(x)$ обращается в нуль вместе со всеми своими производными на концах отрезка $[0, \pi]$, то аналогично тому, как это делалось выше, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $p(x)$ обращается в нуль вместе со всеми своими производными на концах отрезка $[0, \pi]$. Тогда для оператора (0.3) верны следующие равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Вычислим теперь следы, предполагая, что функция $p(x)$ имеет только нечетные производные, образующиеся в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$. Разложение резольвенты нашего оператора будет выглядеть

следующим образом:

$$(D^{2m} + p + \zeta)^{-1} = \sum_{l=0}^N \sum_{p=0}^l (-1)^{\frac{l+p}{4m-2}} \cdot B_{l,p}(x) D^p (D^{2m} + \zeta)^{-1 - \frac{l+p}{4m-2}} + R_N, \quad (5.3)$$

где R_N — некоторый оператор, такой, что $\|R_N\| = O(|\zeta|^{-1 - \frac{N}{4m-2}})$. Функции $B_{l,p}(x)$ тождественно равны нулю, если $l + p$ не делится на $4m - 2$, и для них верны следующие рекуррентные соотношения:

$$B_{l+4m-2,p}(x) = 2miB_{l+2m-1,p-(2m-1)}^{(1)}(x) + \\ + i^2 C_{2m}^2 B_{l+2m-2,p-(2m-2)}^{(2)}(x) + \dots + i^{2m} B_{l,p}^{(2m)}(x) + p(x)B_{l,p}(x), \quad (5.4)$$

так как в этом случае

$$D^{2m}p = pD^{2m} + 2mip^{(1)}D^{2m-1} + i^2 C_{2m}^2 p^{(2)}D^{2m-2} + \dots + i^{2m}p^{(2m)}.$$

Из рекуррентного соотношения, пользуясь начальными условиями, последовательно находим, что $B_{0,0}(x) \equiv 1$, $B_{l,p}(x) = 0$, если l или p меньше нуля; а если $p > l$, то

$$B_{4m-2,0}(x) = p(x), \quad B_{2(2m-2),0}(x) = i^{2m}p^{(2m)}(x) + p^2(x) \dots$$

Вычислим $\text{Sp}[(-1)^{\frac{l+p}{4m-2}} B_{l,p} D^p (D^{2m} + \zeta)^{-1 - \frac{l+p}{4m-2}}]$ в базисе $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$.

При l, p четных получим, что след равен

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} (1)^{\frac{l+p}{4m-2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n^{2m} + \zeta)^{\frac{l+p}{4m-2} + 1}} \int_0^{\pi} B_{l,p}(x) \sin^2 nx \, dx = \\ & = \frac{(-1)^{\frac{l+p}{4m-2}}}{\pi} \int_0^{\pi} B_{l,p}(x) \, dx \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n^{2m} + \zeta)^{1 + \frac{l+p}{4m-2}}} - \\ & - \frac{(-1)^{\frac{l+p}{4m-2}}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n^{2m} + \zeta)^{1 + \frac{l+p}{4m-2}}} \int_0^{\pi} B_{l,p}(x) \cos 2nx \, dx. \end{aligned} \quad (5.5)$$

При l и p нечетных имеем

$$\frac{(-1)^{\frac{l+p}{4m-2}}}{\pi} i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n^{2m} + \zeta)^{1 + \frac{l+p}{4m-2}}} \cdot \int_0^{\pi} B_{l,p}(x) \sin 2nx \, dx. \quad (5.6)$$

Дальше нужно посчитать асимптотику каждого члена в отдельности. Учитывая, что

$$\int_0^\pi B_{l,p}(x) \cos 2nx \, dx = \frac{(-1)^{m\alpha + \frac{p}{2}}}{(2n)^{2m\alpha + p}} \int_0^\pi B_{l,p}^{(2m\alpha + p)}(x) \cos 2nx \, dx,$$

$$\int_0^\pi B_{l,p}(x) \sin 2nx \, dx = \frac{(-1)^{m\alpha + \frac{p-1}{2}}}{(2n)^{2m\alpha + p}} \int_0^\pi B_{l,p}^{(2m\alpha + p)}(x) \cos 2nx \, dx,$$

получим

$$\frac{n^p}{(n^{2m} + \zeta)^{1 + \frac{l+p}{4m-2}}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left(-1 - \frac{l+p}{4m-2} \right) \frac{n^{2m\alpha + p}}{\zeta^{\alpha+1 + \frac{l+p}{4m-2}}}.$$

поэтому след, который дает второй член в (5.5), равен

$$-\frac{(-1)^{\frac{l+p}{4m-2}}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left(-1 - \frac{l+p}{4m-2} \right) \frac{(-1)^{m\alpha + \frac{p}{2}}}{\alpha} \left[2^{2m+p} \zeta^{\alpha+1 + \frac{l+p}{4m-2}} \right]^{-1} \times$$

$$\times \int_0^\pi B_{l,p}^{(2m\alpha + p)}(x) \cos 2nx \, dx, \quad (5.7)$$

а след, который дает член (5.6), равен

$$\frac{(-1)^{\frac{l+p}{4m-2}} i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left(-1 - \frac{l+p}{4m-2} \right) \frac{(-1)^{m\alpha + \frac{p-1}{2}}}{\alpha} \left[2^{2m\alpha + p} \cdot \zeta^{\alpha+1 + \frac{l+p}{4m-2}} \right]^{-1} \times$$

$$\times \int_0^\pi B_{l,p}^{(2m\alpha + p)}(x) \cos 2nx \, dx, \quad (5.8)$$

Пользуясь соотношением

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi B_{l,p}^{(2m\alpha + p)}(x) \cos 2nx \, dx = \begin{cases} \frac{B_{l,p}^{(2m\alpha + p)}(0) + B_{l,p}^{(2m\alpha + p)}(\pi)}{4} & \text{при } 2m\alpha + p > 0; \\ \frac{B_{l,0}(0) + B_{l,0}(\pi)}{4} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi B_{l,0}(x) \, dx & \text{при } p = \alpha = 0; \end{cases}$$

запишем выражение (5.7) в виде

$$-(-1)^{m\alpha + \frac{p}{2} + \frac{l+p}{4m-2}} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left(-1 - \frac{l+p}{4m-2} \right) \frac{B_{l,p}^{(2m\alpha + p)}(0) +$$

$$+ B_{l,p}^{(2m\alpha+p)}(\pi) \left[2^{2m\alpha+p+2} \zeta^{1+\alpha+\frac{l+p}{4m-2}} \right]^{-1} + \frac{(-1)^{m\alpha+\frac{l}{4m-2}}}{2\pi} \times \\ \times \int_0^\pi B_{l,0}(x) dx \cdot \left[\zeta^{\frac{l}{4m-2}+1} \right]^{-1},$$

а выражение (5.8) в виде

$$i(-1)^{\frac{l+p}{4m-2}+\frac{p-1}{2}+m\alpha} \cdot \sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{-1-\frac{l+p}{4m-2}}{\alpha} [B_{l,p}^{(2m\alpha+p)}(0) + \\ + B_{l,p}^{(2m\alpha+p)}(\pi)] \left[2^{2m\alpha+p+2} \zeta^{1+\alpha+\frac{l+p}{4m-2}} \right]^{-1}.$$

Первый член (5.5) при $p = 0$ дает

$$\frac{(-1)^{\frac{l}{4m-2}}}{2m} \cdot \int_0^\pi B_{l,0}(x) dx \left[\zeta^{-\frac{2m-1}{2m}-\frac{1}{4m-2}} \left(\frac{l}{4m-2} - \frac{2m-1}{2m} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2m}} - \frac{1}{2\pi} \zeta^{-1-\frac{l}{4m-2}} \right].$$

Здесь мы рассмотрели случай, когда m нечетно, случай нечетного m рассматривается аналогично). При $p > 0$ получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n^{2m} + \zeta)^{1+\frac{l+p}{4m-2}}} = \\ = \frac{1}{\zeta^{\frac{2m-1}{2m}+\frac{l+p}{4m-2}-\frac{p}{2m}}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2m})\Gamma(1+\frac{l+p}{4m-2}-\frac{p+1}{2m})}{2m\Gamma(1+\frac{l+p}{4m-2})},$$

а первый член в (5.5) будет иметь вид

$$\frac{(-1)^{\frac{l+p}{4m-2}}}{\pi \cdot \zeta^{\frac{2m-2}{2m}+\frac{l+p}{4m-2}-\frac{p}{2m}}} \cdot \int_0^\pi B_{l,p}(x) dx \cdot \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2m})\Gamma(1+\frac{l+p}{4m-2}-\frac{p+1}{2m})}{2m\Gamma(1+\frac{l+p}{4m-2})}.$$

Объединяя вместе целые степени, получим:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=0}^l (-1)^{\frac{l+p}{4m-2}} \cdot i^{3p+2} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{-1-\frac{l+p}{4m-2}}{\alpha} [B_{l,p}^{(2m\alpha+p)}(0) +$$

$$\begin{aligned}
& + B_{l,p}^{(2m\alpha+p)}(\pi) \left[2^{2m\alpha+p+2} \cdot \zeta^{1+\alpha+\frac{l+p}{4m-2}} \right]^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=0}^l i^{3p+2} (-1)^{\frac{l+p}{4m-2}} \times \\
& \times \sum_{k=\frac{l+p}{4m-2}}^{\infty} \left(\frac{k}{\frac{l+p}{4m-2}} \right) (-1)^{k-\frac{l+p}{4m-2}} \left[B_{l,p}^{(2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m)}(0) + \right. \\
& \left. + B_{l,p}^{(2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m)}(\pi) \right] \left[\zeta^{k+1} \cdot 2^{2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m+2} \right]^{-1} = \\
& = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=0}^l i^{3p+2} (-1)^{\frac{l+p}{4m-2}} \cdot \sum_{k=\frac{l+p}{4m-2}}^{\infty} \left(\frac{k}{\frac{l+p}{4m-2}} \right) \times \\
& \times (-1)^{k-\frac{l+p}{4m-2}} \left[2^{2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m+2} \right]^{-1} \cdot \left[B_{l,m}^{(2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m)}(0) + \right. \\
& \left. + B_{l,p}^{(2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m)}(\pi) \right] \zeta^{-(k+1)}.
\end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования, получим, что целые степени дают:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)^k}{\zeta^{k+1}} \left\{ \sum_{l=0}^{(4m-2)k} [A_l(k, 0) + A_l(k, \pi)] \right\},$$

где

$$A_l(k, 0) = \sum_{p=0}^l i^{3p+2} \left(\frac{k}{\frac{l+p}{4m-2}} \right) \cdot B_{l,p}^{(2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m)}(0) \left[2^{2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m+2} \right]^{-1},$$

а

$$A_l(k, \pi) = \sum_{p=0}^l i^{3p+2} \left(\frac{k}{\frac{l+p}{4m-2}} \right) \cdot B_{l,p}^{(2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m)}(\pi) \left[2^{2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m+2} \right]^{-1}.$$

Суммируя нецелые степени, получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=0}^l (-1)^{\frac{l+p}{4m-2}} \left[\zeta^{\frac{l+p}{4m-2} + \frac{2m-2}{2m} - \frac{p}{2m}} \right]^{-1} \times \\
& \times \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2m}) \Gamma(1 + \frac{l+p}{4m-2} - \frac{p+1}{2m})}{2m \Gamma(1 + \frac{l+p}{4m-2})} \int_0^{\pi} B_{l,p}(x) dx =
\end{aligned}$$

$$= \pi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[\zeta^{\frac{m+k}{m} + \frac{2m-1}{2m}} \sin \frac{-2m-2k+1}{2m} \pi \right]^{-1} \int_0^{\pi} A_k(x) dx +$$

$$+ \frac{\pi}{2m \zeta^{\frac{2m-1}{2m}} \sin \frac{\pi}{2m}},$$

где

$$A_k(x) = \sum_{\frac{l+p}{4m-2} - \frac{p}{2m} = \frac{m+k}{m}} (1)^{\frac{l+p}{4m-2}} \sin \pi \left[\frac{2m-1-2(\frac{l+p}{4m-2} \cdot m - \frac{p}{2} - m)}{2m} \right] \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2m}) \Gamma(1 + \frac{l+p}{4m-2} - \frac{p+1}{2m})}{2m \pi^2 \Gamma(1 + \frac{l+p}{4m-2})} \cdot B_{l,p}(x),$$

причем $l+p$ делится на $4m-2$, $l > p$. Итак, доказана следующая

ТЕОРЕМА 7. Если все нечетные производные функции $p(x)$ обращаются в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$, то при больших ζ имеет место следующее асимптотическое представление следа резольвенты оператора $[0, 3]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \zeta} = \text{Sp}(D^{2m} + p + \zeta)^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^N (-1)^k \sum_{l=0}^{(4m-2)k} [A_l(k, 0) + A_l(k, \pi)] \zeta^{-(k+1)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^N \pi \left[\zeta^{\frac{m+k}{m} + \frac{2m-1}{2m}} \cdot \sin \frac{(-2m-2k+1)\pi}{2m} \right]^{-1} \int_0^{\pi} A_k(x) dx +$$

$$+ \frac{\pi}{2m \zeta^{\frac{2m-1}{2m}} \sin \frac{\pi}{2m}} + R_N, \quad (5.9)$$

где

$$R_N = O\left(|\zeta|^{-1 - \frac{N}{4m-2}}\right).$$

Как следствие получается

ТЕОРЕМА 8. Если все нечетные производные $p(x)$ обращаются в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$, то

$$Z(-k) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k = \sum_{l=0}^{(4m-2)k} [A_l(k, 0) + A_l(k, \pi)], \quad (5.10)$$

где

$$A_l(k, 0) = \sum_{p=0}^l i^{3p+2} \binom{k}{\frac{l+p}{4m-2}} B_{l,p}^{(2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m)}(0) \left[2^{2mk+p-\frac{l+p}{4m-2}+2} \right]^{-1},$$

$$A_l(k, \pi) = \sum_{p=0}^l i^{3p+2} \binom{k}{\frac{l+p}{4m-2}} B_{l,p}^{(2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m)}(\pi) \left[2^{2mk+p-\frac{l+p}{4m-2}+2} \right]^{-1},$$

$$Z(s) = \int_0^{\frac{\text{Выч}}{s=\frac{1}{2m}-\frac{m+k}{m}}} A_k(x) dx, \quad (5.11)$$

$$A_k(x) = \sum_{\frac{l+p}{4m-2}-\frac{p}{2m}=\frac{m+k}{m}} \frac{(-1)^{\frac{l+p}{4m-2}} \sin \left[\pi \frac{2m-1-2(\frac{l+p}{4m-2} \cdot m - \frac{p}{2} - m)}{2m} \right]}{2m\pi^2 \Gamma(1 + \frac{l+p}{4m-2})} \times$$

$$\frac{\Gamma(\frac{p+1}{2m}) \Gamma(1 + \frac{l+p}{4m-2} - \frac{p+1}{2m})}{2m\pi^2 \Gamma(1 + \frac{l+p}{4m-2})} B_{l,p}(x).$$

Подставляя в левую часть (5.11) ее выражение через коэффициенты асимптотического разложения λ_n получим систему для определения c_0, c_2, c_4, \dots . Заметим, что равенство (5.9) одновременно доказывает асимптотику λ_n .

Пользуясь таблицей для $B_{l,p}(x)$ находим

$$Z(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - n^{2m} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx \right) -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx = - \frac{p(0) + p(\pi)}{4},$$

а

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx.$$

Рассмотрим теперь оператор

$$L_4(y) = (-1)^m y^{(2m)} + p_{2m-2}(x) y^{(2m-2)} + \dots + p_0(x) y = \lambda y, \quad (0.4)$$

$$y(0) = y^{(2)}(0) = \dots = y^{(2m-1)}(0) = 0,$$

$$y(\pi) = y^{(2)}(\pi) = \dots = y^{(2m-2)}(\pi) = 0.$$

Перепишем его в других обозначениях как оператор

$$L_4 = (-1)^m (-i)^{2m} D^{2m} + (-1)^{2m-2} p_{2m-2} D^{2m-2} + \dots \\ \dots + (-i)^0 p_0 = \lambda \quad \left(D = i \frac{d}{dx} \right),$$

определенный на заданной выше области. Дзета-функция будет теперь иметь полюса в точках

$$s = \frac{1}{2m}, -\frac{1}{2m}, -\frac{3}{2m}, \dots, \frac{-2m+1}{2m}, \frac{-2m-1}{2m}, \dots,$$

т. е. в точках s вида $s = \frac{-2k+1}{2m}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). В этом случае получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \zeta} = R(\zeta) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{Z(-k)}{\zeta^{k+1}} + \\ + \sum_{k=0}^N \pi \operatorname{Выч}_{s=\frac{-2k+1}{2m}} Z(s) \left[\zeta^{\frac{2k-1}{2m}+1} \sin \frac{-2k+1}{2m} \pi \right]^{-1} + R_N,$$

где R_N — некоторая функция параметра ζ , достаточно быстро убывающая, так что написанное выше равенство является асимптотическим.

Вид новых формул (5.10) и (5.11) для определения следов и коэффициентов асимптотического разложения

$$\lambda_n = n^{2m} + c_{-2m+2} n^{2m-2} + \dots + c_0 + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_4}{n^4} + \dots$$

остается прежним, но функции $B_{l,p}(x)$, которые входят в эти равенства, нужно заменить функциями $\bar{B}_{l,p}(x)$, определяемыми из следующих соотношений:

$$\bar{B}_{l+4m-2,p}(x) = 2mi \bar{B}_{l+2m-1,p-(2m-1)}(x) + [C_{2m}^2 i^2 \bar{B}_{l+2m-2,p-(2m-2)}^{(2)}(x) + \\ + i^{2m-2} p_{2m-2}(x) \bar{B}_{l+2m-2,p-(2m-2)}(x)] + [C_{2m}^3 i^3 \bar{B}_{l+2m-3,p-(2m-3)}^{(3)}(x) + \\ + (2m-2)i(-i)^{2m-2} p_{2m-2}(x) \bar{B}_{l+2m-3,p(2m-3)}^{(1)}(x) + \\ + (-i)^{2m-3} p_{2m-3}(x) \bar{B}_{l+2m-3,p(2m-3)}(x)] + \dots + [\bar{B}_{l,p}^{(2m)}(x) + \\ + p_{2m-2}(x) \bar{B}_{l,p}^{(2m-2)}(x) + p_{2m-3}(x) \bar{B}_{l,p}^{(2m-3)}(x) + \dots + p_0(x) \bar{B}_{l,p}(x)]. \quad (5.12)$$

Для доказательства этих соотношений мы воспользовались правилом коммутации оператора дифференцирования D и оператора умножения на функцию f .

$$Df = fD + if'$$

и провели рассуждения, аналогичные тем, которые мы провели выше. Начальные условия для решения этих рекуррентных соотношений следующие: $B_{0,0}(x) \equiv 1$; $B_{l,p}(x) = 0$, если $m > l$ и если один из индексов отрицательный, а также если $l + p$ не делятся на $4m - 2$.

Таким образом,

$$Z(-k) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k = \sum_{l=0}^{(4m-2)k} [\bar{A}_l(k, 0) + \bar{A}_l(k, \pi)], \quad (5.13)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_l(k, 0) &= \sum_{p=0}^l i^{3p+2} \binom{k}{\frac{l+p}{4m-2}} \bar{B}_{l,p}^{(2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m)}(0) \left[2^{2mk+p-\frac{l+p}{4m-2}+2} \right]^{-1}, \\ \bar{A}_l(k, \pi) &= \sum_{p=0}^l i^{3p+2} \binom{k}{\frac{l+p}{4m-2}} \bar{B}_{l,p}^{(2mk+p-\frac{l+p}{4m-2} \cdot 2m)}(\pi) \left[2^{2mk+p-\frac{l+p}{4m-2}+2} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$Z(s) = \int_0^{\pi} \bar{A}_k(x) dx, \quad (5.15)$$

$s = \frac{\text{Выч}}{2m} - \frac{m+k}{m}$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_k(x) &= \sum_{\frac{l+p}{4m-2} - \frac{p}{2m} = \frac{m+k}{m}} \frac{(-1)^{\frac{l+p}{4m-2}} \cdot \sin \pi \left[\frac{2m-1-2(\frac{l+p}{4m-2} \cdot m - \frac{p}{2} - m)}{2m} \right]}{2m\pi^2 \Gamma(1 + \frac{l+p}{4m-2})} \times \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2m}) \Gamma(1 + \frac{p+l}{4m-2} - \frac{p-1}{2m})}{2m\pi^2 \Gamma(1 + \frac{l+p}{4m-2})}, \end{aligned}$$

причем $l + p$ делятся на $4m - 2$, $l > p$.

Формулы (5.13), (5.14), (5.15) получены при условии, что все нечетные производные функций $p_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, 2m - 2$) обращаются в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$.

Запишем первый след:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^{2m-c-2m+2} n^{2m-1} - \dots - c_0) - \frac{1}{2} c_0 = -\frac{p_0(0) + p_0(\pi)}{4},$$

где $c_0, c_{-2}, \dots, c_{-2m+2}$ — некоторые константы, которые определяются из системы (5.15), если вместо $\text{Выч}_{s=\frac{1}{2m}-\frac{m+k}{m}} Z(s)$ подставить его значение через коэффициенты асимптотического разложения λ_n . Все приведенные выше формулы хорошо сочетаются с теорией возмущений.

Литература

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. Докл. АН СССР, 88, № 4 (1953), 593—596.
2. Дикий Л. А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма—Лиувилля, Успехи матем. наук, XIII, вып. 3 (1958), 111—143.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы, Москва, Гостехиздат, 1954.
4. Лидский В. Б. Несамосопряженные операторы, имеющие след, ДАН СССР, 125, № 3 (1959), С. 485—487.