

УДК УДК 517.43

Формулы следов для обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков¹

В. А. Садовничий

Хорошо известно, что для матрицы сумма собственных значений легко вычисляется. Она равна следу матрицы т. е. сумме диагональных элементов.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L(y) = -y'' + p(x)y = \lambda y, \quad y(0) = y(\pi) = 0. \quad (1)$$

Если $p(x)$ бесконечно дифференцируемая функция, то для собственных значений этого оператора справедлива следующая формула:

$$\lambda_n = n^2 + c_0 + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_4}{n^4} + \dots \quad (2)$$

Из (2) видно, что ряд $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots$ расходится. Однако можно внести некоторый аналог понятию следа для дифференциальных операторов и выразить его через коэффициенты. В самом деле, ряд, составленный из $\lambda_n - n^2 - c_0$ сходится, поэтому можно ставить вопрос о вычислении суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c_0).$$

В работе [1] И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном было доказано соотношение, позволяющее вычислить эту сумму. Если положить $c_0 = 0$, $c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx$, то в [1] было показано, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2) = -[p(0) + p(\pi)]/4.$$

¹Матем. заметки, 1967, т. 1, №2, с. 179-188.

Заметим, что для случая матриц мы можем вычислить не только сумму собственных значений матрицы через ее элементы, но и сумму степеней собственных значений.

Встает вопрос: а нельзя ли придать смысл, а затем вычислить выражения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3, \dots? \quad (3)$$

Работа [1] послужила началом целой серии работ, посвященных формулам следов. В работах [2–4] Л. А. Диким, И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном разными способами суммирования были вычислены суммы (3).

Л. А. Дикий [2] применил способ, аналогичный методу М. Рисса, регуляризации расходящихся интегралов. Равенство

$$Z(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \text{Sp} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + p(x) \right)^{-s}, \quad \text{Re } s > 1/2, \quad (4)$$

имеет смысл для всех s , для которых $\text{Re } s > 1/2$; $Z(s)$ называют *дзета-функцией оператора*. Если и левую и правую части равенства (4) аналитически продолжить влево, то можно вычислить значения $Z(s)$ в целых отрицательных точках. На самом деле $Z(-k)$ есть, с точностью до известной константы, сумма сходящейся части асимптотики λ_n^k . По определению числа $Z(-k)$ и называются *регуляризованными следами оператора*. Этим способом Л. А. Диким были вычислены выражения (3) для оператора (1).

И. М. Гельфанд [3] применил метод, аналогичный методу Адамара, который сводится к вычитанию из λ_n^k выражения, делающего ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k$ сходящимся. Б. М. Левитан [4] ввел некоторые аналитические функции, связанные с оператором, и, пользуясь ими, вычислил следы.

В настоящей заметке мы получаем формулы регуляризованных сумм собственных значений дифференциальных операторов высших порядков. При вычислении формул следов мы обсуждаем два подхода. Первый — это изучение дзета-функции оператора; этот способ аналогичен методу работы [2]. Второй — это изучение *тэта-функций оператора*:

$$\Theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}.$$

У каждого из этих методов, как нам кажется, есть свои достоинства.

Сформулируем два из полученных нами результатов, для простоты — для оператора четвертого порядка. Пусть

$$\begin{aligned} L_1(y) &= y^{IV} + p(x)y = \lambda y, \\ y(0) &= y''(0) = 0, \quad y(\pi) = y''(\pi) = 0; \end{aligned}$$

тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Если все нечетные производные функции $p(x)$ обращаются в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$, то

$$Z(-k) = \sum_{l=0}^{6k} [A_l(k, 0) + A_l(k, \pi)],$$

где (обозначая для краткости $u = (l + m)/6$, $v = 4k + m - 4m$)

$$A_l(k, 0) = \sum_{m=0}^l \frac{i^{2m+2} \binom{k}{u} B_{l,m}^{(v)}(0)}{2^{v+2}}, \quad (5)$$

$A_l(k, \pi)$ — аналогичное выражение с $B_{l,m}^{(v)}(\pi)$. Для функций $B_{l,m}(x)$ верны некоторые рекуррентные соотношения (см. ниже), на которых они последовательно находятся. При условии, что $\int_0^\pi p(x) dx = 0$, имеем, например,

$$Z(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^4) = -[p(0) + p(\pi)]/4.$$

При изучении зэта-функции оператора приходится изучать функции Грина параболических задач, соответствующих нашим; так, для оператора четвертого порядка, заданного двучленной операцией и граничными условиями типа первой краевой задачи, справедлива

ТЕОРЕМА. Если дважды дифференцируемая функция $p(x)$ такова, что $\int_0^\pi p(x) dx = 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = -[p(0) + p(\pi)]/4.$$

Здесь μ_n — собственные значения "простейшего" оператора ($p(x) \equiv 0$).

1. Рассмотрим оператор

$$L_1(y) = y^{IV} y + p(x) = \lambda y,$$

$$y(0) = y''(0) = 0, \quad y(\pi) = y''(\pi) = 0.$$

Для собственных значений λ_n этого оператора справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\lambda_n = n^4 + c_0 + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_4}{n^4} + \dots$$

($c_0, c_2, c_4 \dots$ — некоторые константы).

Пусть $Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$, $\operatorname{Re} s > 1/4$, — дзета-функция этого оператора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Значения аналитического продолжения $Z(s)$ влево при целых отрицательных s называются *регуляризованными следами* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k$

ТЕОРЕМА 1. Если функция $p(x)$ обращается в нуль со всеми своими производными на концах отрезка $[0, \pi]$, то $Z(-k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$

ТЕОРЕМА 2. Если все нечетные производные функции $p(x)$ обращаются в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$ то

$$Z(-k) = \sum_{l=0}^{6k} [A_l(k, 0) + A_l(k, \pi)],$$

где $A_l(k, 0)$ определяется по формуле (5), а $A_l(k, \pi)$ — аналогичное выражение с $B_{l,m}^{(j)}(\pi)$; функции $B_{l,m}(x)$ находятся из следующих рекуррентных соотношений:

$$B_{l+6,m}(x) = 4lB'_{l+3,m-3}(x) - 6B''_{l+2,m-2}(x) - 4iB'''_{l+1,m-1}(x) + B_{l,m}^{IV}(x) + p(x)B_{l,m}(x)$$

$B_{0,0}(x) \equiv 1$, $B_{l,m}(x) = 0$, если $l < 0$ или $m < 0$ и если $m > l$. При условии, что $\int_0^\pi p(x) dx = 0$, имеем

$$c_0 = 0, \quad c_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi p''(x) dx,$$

$$c_4 = \frac{3}{8\pi} \int_0^\pi \{p^{IV}(x) + [p(x)]^2\} dx, \dots,$$

$$\begin{aligned}
Z(-1) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^4) = -[p(0) + p(\pi)]/4, \\
Z(-2) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^8 - 2c_2 n^2 - 2c_4) - c_4 = \\
&= -\{[p(0)]^2 + [p(\pi)]^2\}/4 - \{p^{IV}(0) + p^{IV}(\pi)\}/32 \dots
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведенные выше теоремы доказываются путем сравнения двух разных разложений следа резольвенты оператора по степеням параметра. Для этого сначала изучим аналитическое продолжение $Z(s)$. Имеем

$$\begin{aligned}
Z(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4s} \left(1 + \frac{c_0}{n^4} + \frac{c_2}{n^6} + \dots \right)^{-s} = \\
&= \zeta(4s) + d_4(s)\zeta(4s+4) + d_6(s)\zeta(4s+6) + \dots,
\end{aligned}$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, аналитические свойства которой хорошо изучены. Значит, $Z(s)$ выражается через ряд из функций, аналитически продолжающихся влево на всю плоскость.

Записав следующее равенство:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \{\lambda_n^{-s} - n^{-4s} - d_4(s)n^{-4s-4} - d_6(s)n^{-4s-6} - \dots \\
&\dots - d_{4k}(s)n^{-4s-4k}\} = Z(s) - \zeta(4s) - d_4(s)\zeta(4s+4) - \\
&\quad - d_6(s)\zeta(4s+6) - \dots - d_{4k}(s)\zeta(4s+4k),
\end{aligned}$$

при $s = -k$ получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \{\lambda_n^k - n^{4k} - d_4(-k)n^{4k-4} - d_6(-k)n^{4k-6} - \dots \\
&\quad \dots - d_{4k}(-k)\} = Z(-k) \frac{1}{2} d_{4k}(-k),
\end{aligned}$$

что оправдывает введенное выше определение.

Запишем теперь следующее равенство:

$$R(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \zeta} = \text{Sp} \left(\frac{d^4}{dx^4} + p + \zeta \right)^{-1}.$$

Между $Z(s)$ и резольвентой $R(\zeta)$ при $1/4 < \operatorname{Re} s < 1$ имеется следующее интегральное соотношение:

$$Z(s) = \frac{1}{\pi} \sin s\pi \int_0^{\infty} \zeta^{-s} R(\zeta) d\zeta.$$

По формуле обращения Меллина получим:

$$R(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \zeta^{s-1} \frac{\pi \cdot Z(s)}{\sin s\pi} ds, \quad 1/4 < \gamma < 1.$$

Контур интегрирования выше можно перенести влево, так как мы знаем аналитическое продолжение $Z(s)$. При этом $Z(s)$ растет медленнее, чем $\sin s\pi$. Обозначим через r_k ($k = 0, 2, 3, 4, \dots$) вычеты $Z(s)$ при $s = 1/4, -3/4, -5/4, \dots$

$$r_s = \underset{s=-k/2+1/4}{\text{Выч}} Z(s), \quad k = 0, 2, 3, 4, \dots$$

Тогда

$$R(\zeta) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{Z(-k)}{\zeta^{k+1}} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 0}}^N (-1)^{[k+1/2]} \frac{2\pi r_k}{\sqrt{2}\zeta^{k/2+3/4}} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{N-\varepsilon-i\infty}^{N-\varepsilon+i\infty} \zeta^{s-1} \frac{\pi Z(s)}{\sin \pi s} ds. \quad (6)$$

Последний интеграл при больших ζ допускает оценку, так что формула дает асимптотическое представление $R(\zeta)$. Задача нахождения регуляризованных следов свелась, таким образом, к получению асимптотического разложения по степеням ζ выражения

$$R(\zeta) = \operatorname{Sp} L_1^{-1} \operatorname{Sp}(D^4 + p + \zeta)^{-1}, \quad D = i \frac{d}{dx}.$$

Для оператора L_1^{-1} справедливо следующее разложение:

$$L_1^{-1} = (D^4 + p + \zeta)^{-1} = \\ = \sum_{i=0}^N \sum_{m=0}^l \{ (-1)^{\frac{l+m}{6}} B_{i,m}(x) (D^4 + \zeta)^{-1-\frac{l+m}{6}} D^m \} + R_N, \quad (7)$$

где $B_{l,m}(x)$ — функции, которые определяются из написанных выше рекуррентных соотношений, а R_N — некоторый остаток. Доказывается это разложение для обратного оператора обычным способом — путем разложения в ряд и применением правила коммутации оператора дифференцирования и умножения на функцию. Умножая (7) на $(D^4 + p + \zeta)$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых операторах, получаем рекуррентные соотношения для определения функций $B_{i,m}(x)$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{Sp } L_1^{-1} &= \text{Sp}(D^4 + p + \zeta)^{-1} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \text{Sp}\{(-1)^{\frac{l+m}{6}} B_{i,m}(x)(D^4 + \zeta)^{-1-\frac{l+m}{6}} D^m\} = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \{(-1)^{\frac{l+m}{6}} B_{i,m}(x)(D^4 + \zeta)^{-1-\frac{l+m}{6}} D^m\} \sin nx, \sin nx. \quad (8) \end{aligned}$$

так как $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$ является базисом на $[0, \pi]$ и след для обратного оператора можно считать в любом базисе. Разложение написанного выше выражения по степеням ζ сводится уже к простым вычислениям, так как базис, который мы выбрали, удовлетворяет двум важным требованиям: первое — он является базисом из собственных функций простейшего оператора ($p(x) \equiv 0$), второе — составляющие базис функции имеют простой вид. Применяя формулу интегрирования по частям, получим разложения следа оператора L_1^{-1} по целым и дробным степеням параметра. Причем коэффициентами при этих степенях будут стоять некоторые числа, зависящие от коэффициентов оператора, как это видно из (8). Из сравнения у коэффициентов при целых степенях полученного таким образом разложения с разложением (7) найдем формулу следов, а из сравнения коэффициентов при дробных степенях — соотношения, позволяющие определить числа c_0, c_2, c_4, \dots , чем и заканчивается доказательство теорем. \square

2. Для оператора

$$\begin{aligned} L_2(y) &= (-1)^m y^{(2m)} + P_{2m+m}(x)y^{(2m-2)} + \dots + p_0(x)y = \lambda y, \\ y(0) &= y''(0) = \dots = y^{(2m-2)}(0) = 0, \\ y(\pi) &= y''(\pi) = \dots = y^{(2m-2)}(\pi) = 0, \end{aligned}$$

введем следующие обозначения:

$$A_l(k, 0) = \sum_{p=0}^i \frac{i^{3p+2} \binom{k}{u} B_{l,p}^{(v)}(0)}{2^{v+2}},$$

$$A_l(k, \pi) = \sum_{p=0}^i \frac{i^{3p+2} \binom{k}{n} B_{l,p}^{(v)}(\pi)}{2^{v+2}},$$

$$(l+p)/(4m-2) = u, \quad 2mk + p - 2mu = v,$$

где $B_{l,p}(x)$ находится из равенств

$$\begin{aligned} B_{l+4m-2,p}(x) &= 2miB_{l+2m-l,p-(2m-1)}(x) + \\ &+ [C_{2m}^2 i^2 B_{l+2m-2,p-(2m-2)}(x) + \\ &+ i^{2m-2} p_{2m-2}(x) B_{l+2m-2,p-(2m-2)}(x)] + \dots + [B_{i,p}^{(2m)}(x) + \\ &+ P_{2m-2}(x) B_{l,p}^{(2m-2)}(x) + P_{2m-2}(x) B_{l,p}^{(2m-2)}(x) + \dots + p_0 B_{l,p}(x)], \end{aligned}$$

$B_{0,0}(x) \equiv 1$, $B_{l,p}(x) = 0$, если $p > l$ и если один из индексов отрицательный.

ТЕОРЕМА 3. Если все нечетные производные функции $p_i(x)$, $i = 1, \dots, 2m-2$, обращается в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$, то

$$Z(-k) = \sum_{l=0}^{(4m-2)k} [A_l(k, 0) + A_l(k, \pi)].$$

Так,

$$\begin{aligned} Z(-1) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^{2m} - c_{-2m+2} - \dots - c_0) - c_0/2 = \\ &= -[p_0(0) + p_0(\pi)]/4, \end{aligned}$$

$c_0, c_{-2}, \dots, c_{-2m+2}$ — некоторые константы, для определения которых можно получить алгебраические системы.

Доказательство проходит точно так же, как и в п. 1.

3. Для вычисления регуляризованных следов можно использовать и другой подход. Для этого надо рассмотреть тэта-функцию оператора

$$\Theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}$$

вместо дзета-функции. Рассмотрим

$$\begin{aligned} L_3(y) &= (-1)^m y^{(2m)} + p(x)y = \lambda y, \\ y(0) &= y'(0) = \dots = y^{(m-1)}(0) = 0, \\ y(\pi) &= y'(\pi) = \dots = y^{(m-1)}(\pi) = 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} L_4(y) &= (-1)^m y^{(2m)} = \mu y, \\ y(0) &= y'(0) = \dots = y^{(m-1)}(0) = 0, \\ y(\pi) &= y'(\pi) = \dots = y^{(m-1)}(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Методом перевала изучается асимптотика функции Грина при $t \rightarrow 0$ параболических уравнений, соответствующих заданным выше. Зная асимптотику, можно вычислить следы разности операторов L_0 и L_4 .

Пусть $\alpha_\nu = \omega_\nu / 2m$, $\beta_i^\nu = \prod_{(i,\nu)} (\omega_k - \omega_j) / \Delta$, где вронскиан $\Delta = \prod_{m \leq j < k \leq 2m} (\omega_k - \omega_j)$, ω_j — корень $2m$ -й степени из 1, а $\prod_{(i,\nu)} (\omega_k - \omega_j)$ — определитель, полученный из Δ заменой ν -столбца столбцом $\{1, \omega_i, \dots, \omega_i^{m-1}\}$,

$$\begin{aligned} \beta_\nu^+ &= \frac{A_\nu^+}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\exp\{-c_\nu^+(2x)^{2m/(2m-1)}\}}{(2x)^{(2m-2)/2(2m-1)}} dx. \\ A_\nu^+ &= \frac{\sqrt{2}(2m)^{(m-1)/(2m-2)} \exp\{\frac{\pi}{2}i - \frac{i}{2} \arg h''\{\rho_{\nu,k_0}[\omega_\nu(x+y)]\}\}}{[2m(2m-1)]^{1/2}}. \\ c_\nu^+ &= \frac{1}{2m^{1(2m-1)}} \left\{ \exp i[a + \arg \omega_\nu(x+y)] + \frac{1}{2m} \exp 2iam \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a &= [\arg \omega_\nu(x+y) + 2\pi k_0] / (2m-1), \\ \gamma_{i,\nu}^0 &= \frac{A_{i,\nu}^0}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\exp\{-c_{i,\nu}^0[x(\omega_i + \omega_\nu)]^{2m/(2m-1)}\}}{[x(\omega_i + \omega_\nu)]^{(2m-2)/2(2m-1)}} dx; \end{aligned}$$

ρ_{ν,k_0} — точка перевала функции

$$h(\rho) = -\rho \omega_\nu(x+y) + \rho^{2m}.$$

расположенная ближе других к вещественной положительной полуоси. Пусть $A_{i,\nu}^0$, $C_{i,\nu}^0$ получаются из A_ν^+ , C_ν^+ заменой $\omega_\nu(x+y)$ на $\omega_i x + \omega_\nu y$.

ТЕОРЕМА 4. Если дважды дифференцируемая функция $p(x)$ такова, что $\int_0^\pi p(x) dx = 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \left[\sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu \beta_\nu^\nu \beta_\nu^+ + \sum_{\nu=1}^m \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^m \alpha_\nu \beta_i^\nu \gamma_{i,\nu}^0 \right] [p(0) + p(\pi)].$$

при $m = 2$ для оператора четвертого порядка получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = -[p(0) + p(\pi)]/4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = -\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi [G'_1(x, x, t) - G'_2(x, x, t)] dx,$$

где $G_1(x, y, t)$ и $G_2(x, y, t)$ — функции Грина параболических задач, соответствующих операторам L_3 и L_4 . Главные члены асимптотики функций Грина образуют δ -образные последовательности. Сосчитав написанный выше предел, получим доказательство теоремы 4. Этим же способом можно вычислить регуляризованный след разности двух операторов высших порядков, заданных на полуоси и имеющих непрерывный след.

□

Литература

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. Докл. АН СССР, 88, № 4 (1953), 593—596.
2. Дикий Л. А. Успехи матем. наук, **13**, № 3 (1958), 111—144.
3. Гельфанд И. М. О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка, Успехи матем. наук, **11**, № 1 (1956), 191—198.
4. Левитан Б. М. Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма—Лиувилля, Успехи матем. наук, **19**, № 1 (1964), 161—165.