

УДК 517.43

О тождествах для собственных значений системы Дирака и некоторых других систем высшего порядка¹

В. А. Садовничий

В работе [1] И. М. Гельфандом и Б. И. Левитаном была получена формула для следа разности двух дифференциальных операторов Штурма—Лиувилля. Эта работа послужила началом целого ряда работ, посвященных формулам следов. В работах [2, 3] Л. А. Диким получены в каком-то смысле окончательные результаты по следам операторов второго порядка.

Мы доказываем формулы произвольного k -того следа для систем Дирака. Полученные формулы можно применять к вычислению собственных значений операторов.

Заметим, что метод, который мы применяем, в полной мере применим для вычисления формул следов и систем высшего порядка, заданных на конечном отрезке.

§ 1. Дзета-функция системы Дирака

Рассмотрим в пространстве $L_2[0, \pi]$ вектор-функций $\vec{u}(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ со скалярным произведением

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \int_0^\pi \sum_{m=1}^2 u_m(x) v_m(x) dx$$

оператор

$$\frac{du_2}{dx} + p(x)u_1 = \lambda u_1, \quad -\frac{du_1}{dx} + q(x)u_2 = \lambda u_2, \quad u_2(0) = u_2(\pi) = 0. \quad (1)$$

¹Вестник МГУ, 1967, №3, с. 37-47

В релятивистской квантовой механике изучается система (1) с

$$p(x) = \frac{v(x)}{c} - mc, \quad q(x) = \frac{v(x)}{c} + mc,$$

где $v(x)$ есть потенциал, m – масса частицы, c – скорость света. Рассмотрим сначала случай, когда $p(x) = q(x)$. Формулы $sp(x) = \frac{v(x)}{c} - mc$, $q(x) = \frac{v(x)}{c} + mc$ получаются незначительным изменением наших формул. Запишем (1) в матричной форме:

$$I \frac{d}{dx} \vec{u} + P \vec{u} = \lambda \vec{u},$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & p(x) \end{pmatrix}, \quad u_2(0) = u_2(\pi) = 0.$$

Заметим, что $I^2 = -E$, $I^3 = -I$, $I^4 = E$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $PI = IP$.

Для собственных значений этого оператора известно асимптотическое разложение

$$\lambda_n = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots,$$

где $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, а c_0, c_1, \dots суть некоторые константы. Пусть $c_0 = 0$. Это не является дополнительным ограничением на систему.

Тогда, если записать $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^{+N} \lambda_n$, этот предел существует и можно ставить вопрос о его вычислении. Такое суммирование по n , как это указано выше, в дальнейшем будем просто обозначать \sum_n . Запишем следующее равенство:

$$\sum_n \lambda_n^{-s} = \text{Sp} \left(\begin{pmatrix} p & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & p \end{pmatrix}^{-s} \right) = \text{Sp} A^{-s},$$

которое имеет смысл для всех s , действительные части которых достаточно велики ($\text{Re } s > 1$). Левую и правую часть этого равенства можно аналитически продолжить влево. Функцию $Z(s) = \sum_n \lambda_n^{-s}$ назовем дзета-функцией системы. Значения ее аналитического продолжения при целых отрицательных s , по определению, и будут называться регуляризованными следами $\sum_n^* \lambda_n^k$ системы (1). Обозначать их будем [2]

так: $\sum_n^* \lambda_n^k$.

Докажем следующий аналог данного выше определения.

ТЕОРЕМА 1. Регуляризованные суммы $\sum_n \lambda_n^k$ могут быть определены как суммы, члены которых есть λ_n^k , за вычетом части асимптотики, содержащей неотрицательные степени n . Из всей суммы надо вычесть член асимптотики, не содержащий n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возведем λ_n в степень $-s$; получим

$$\begin{aligned}\lambda_n^{-s} &= n^{-s} \left(1 + \frac{c_0}{n} + \frac{c_1}{n^2} + \frac{c_2}{n^3} + \dots \right)^{-s} = \\ &= n^{-s} \left[1 - \frac{sc_0}{n} - \frac{sc_1}{n^2} + \frac{s(s+1)c_0^2}{1 \cdot 2 \cdot n^2} + \dots \right] = \\ &= n^{-s} + d_1(s)n^{-s-1} + d_2(s)n^{-s-2} + \dots + d_k(s)n^{-s-k} + O(n^{-(s-k-1)}).\end{aligned}$$

Запишем

$$\begin{aligned}\sum_n [\lambda_n^{-s} - n^{-s} d_1(s)n^{-s-1} - \dots - d_k(s)n^{-s-k}] &= \\ &= Z(s) - \sum_n^{(*)} n^{-s} - \sum_n^{(-)} n^{-s} - \\ &- d_1(s) \left[\sum_n^{(+)} n^{-s-1} + \sum_n^{(-)} n^{-s-1} \right] - \dots \\ &\dots - d_k(s) \left[\sum_n^{(+)} n^{-s-k} + \sum_n^{(-)} n^{-s-k} \right];\end{aligned}$$

здесь $d_1(s), d_2(s), \dots$ суть некоторые функции, \sum_n^*, \sum_n^* означают, что суммирование происходит соответственно по положительным и отрицательным n . Пусть $\zeta(s) = \sum_n^\infty n^{-s}$ есть дзета-функция Римана. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_n [\lambda_n^{-s} - n^{-s} - d_1(s)n^{-s-1} - \dots - d_k(s)n^{-s-k}] &= \\ &= Z(s) - [\zeta(s) + (-1)^{-s}\zeta(s)] - d_1(s)[\zeta(s+1) + (-1)^{-s-1}\zeta(s+1)] - \dots \\ &\dots - d_k(s)[\zeta(s+k) + (-1)^{-s-k}\zeta(s+k)].\end{aligned}\quad (2)$$

Ряд в левой части (2) сходится при $\operatorname{Re} s > k$, а при $s = -k$ получаем

$$\sum_n [\lambda_n^k - n^k - d_1(-k)n^{k-1} - \dots - d_k(-k)] = Z(-k) + d_k(-k),$$

так как при k четном, положительном $\zeta(-k) = 0$, а при k нечетном квадратные скобки есть тождественный нуль, $\zeta(0) = -1/2$.

Таким образом, теорема доказана. Докажем теперь следующую теорему. \square

ТЕОРЕМА 2. *Дзета-функция системы Дирака есть целая функция.*

Действительно, функция $Z(s)$ может иметь полюса первого порядка там, где функции $[\zeta(s+m)](-1)^{-s-m}\zeta(s+m)$ имеют полюса, то есть при $s = -m + 1$.

Покажем, что и при этих значениях s функция $Z(s)$ регулярна. Для этого достаточно доказать регулярность квадратных скобок. Напишем разложение в ряд Лорана:

$$\begin{aligned} & [\zeta(s+m) + (-1)^{-s-m}\zeta(s+m)] = \\ &= \left[\frac{1}{(s+m-1)} + \gamma + \gamma_1(s+m-1) + \dots \right] + \\ &+ e^{-(s+m) \cdot \ln(-1)} \left[\frac{1}{s+m-1} + \gamma + \gamma_1(s+m-1) + \dots \right] = \\ &= \left[\frac{1}{s+m-1} + \gamma + \gamma_1(s+m-1) \right] - \left[1 - \frac{(s+m-1)\pi i}{1!} + \dots \right] \times \\ &\times \left[\frac{1}{s+m-1} + \gamma + \gamma_1(s+m-1) + \dots \right] = \pi i + \text{Per. часть.} \end{aligned}$$

В рассмотренных, приведенных выше, мы воспользовались известным разложением $\zeta(s)$ в ряд; γ есть постоянная Эйлера. Теорема, таким образом доказана.

Задача нахождения регуляризованных следов свелось к задаче нахождения $Z(-k)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

§ 2. Связь дзета-функции системы с коэффициентами дифференциального выражения

Рассмотрим систему (1). Пусть $\vec{\varphi}_n(x) = \{\varphi_{1,n}(x), \varphi_{2,n}(x)\}$ суть нормированные собственные функции системы Дирака. Тогда

$$Z(s) \sum_n \lambda_n^{-s} = \sum_n [A^{-s} \vec{\varphi}_n, \vec{\varphi}_n], \quad \text{Re } s > 1;$$

обозначим

$$\vec{\psi}(x) = \{\psi_{1,n}(x), \psi_{2,n}(x)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx \right\}.$$

Здесь $\vec{\psi}_n(x)$ есть собственный вектор простейшего оператора, соответствующего системе Дирака, то есть

$$A_0 \vec{\psi}_n = n \vec{\psi}_n,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{2,n}(x)}{dx} &= \lambda_n \psi_{1,n}(x), \\ -\frac{d\psi_{1,n}(x)}{dx} &= \lambda_n \psi_{2,n}(x), \quad \psi_{2,n}(0) = \psi_{2,n}(\pi) = 0, \quad \lambda_n = n. \end{aligned}$$

Запишем теперь факт, выражающий равенство следов в равных базисах:

$$\sum_n [A^{-s} \vec{\varphi}_n, \vec{\varphi}_n] = \sum_n [A^{-s} \vec{\psi}_n, \vec{\psi}_n], \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Если мы сумеем сделать определение A^{-s} независимым от собственных функций $\vec{\psi}_n(x)$, то справа в написанном выше равенстве будет стоять известная функция от s , аналитическое продолжение которой сможем найти. Значит, мы сможем найти и ее значение в отрицательных целых точках, то есть $Z(-k)$.

Возведем оператор $A = J \frac{d}{dx} + P$ в целую положительную степень, пусть $I \frac{d}{dx} = D$.

$$A^k = (D + P)^k = D^k + PD^{k-1} + DPD^{k-2} + D^2PD^{k-3} + \dots \quad (3)$$

Для дальнейших рассмотрений необходимо, чтобы слева стояли операторы умножения на матрицу, а справа — операторы дифференцирования. Для этого введем правило коммутации операторов D и P . Имеем

$$DP = I \frac{d}{dx} P = IP \frac{d}{dx} + IP' = PD + IP'. \quad (4)$$

Воспользовавшись формулой (4), запишем (3):

$$\begin{aligned} A^k &= D^k + A_1(k, x)D^{k-1} + A_2(k, x)D^{k-2} + \dots + A_l(k, x)D^{k-l} + \\ &\quad + R_l(k, x, D), \end{aligned}$$

где $A_i(k, x)$ суть некоторые матрицы, элементы которых зависят от $P(x)$ и k . Остаток $R_l(k, x, D)$ такой, что $R_l(k, x, D)D^{-k+l+1}$ есть ограниченный оператор в пространстве вектор-функций, то есть $R_l = O(D^{k-l-1})$.

Аналогично тому, как делали выше, запишем

$$(A + \zeta E)^k + \sum_{m=0}^k A_m(k, x)(D + \zeta E)^{k-m}, \quad (5)$$

где ζ есть некоторый комплексный параметр. Выведем рекуррентную формулу для определения матриц $A_m(k, x)$.

Умножим обе части равенства (5) на $A + \zeta E$. Слева получим $(A + \zeta E)^{k+1}$, а справа заменим $(A + \zeta E)A_m(k, x)$ соотношением

$$A_m(k, x)(D + \zeta E) + IA'_m(k, x) + PA_m(k, x).$$

Записав по формуле (5) выражение $(A + \zeta E)^{k+1}$ и сравнив его с вышеполученным $(A + \zeta E)^{k+1}$, запишем рекуррентное соотношение:

$$A_{m+1}(k+1, x) = A_{m+1}(k, x) + IA'_m(k, x) + P(x)A_m(k, x), \quad (6)$$

причем $A_0(k+1) \equiv 1$, $A_m(k, x) = 0$, если $m < 0$, $A_m(0, x) = 0$. По индукции, можно доказать, что

$$A_m(k, x) = \binom{k}{m} B(x),$$

где функции $B(x)$ уже от k не зависят. Из (6) получается рекуррентная формула

$$B_{m+1}(x) = IB'_m(x) + P(x)B_m(x). \quad (7)$$

§ 3. Оператор A^{-s}

Соотношение (6), верные для целых положительных k , будем считать верными и для любых k , в том числе и для $k = -1$. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Если все нечетные производные функции $p(x)$ обращаются в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$, то оператор, обратный к оператору $A + \zeta E$, записывается следующим образом:

$$(A + \zeta E)^{-1} = \sum_{m=0}^N A_m(-1, x)(D + \zeta E)^{-1-m} + R_N, \quad (8)$$

причем ряд асимптотический, то есть $R_N = O(D^{-N-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим обе части этого равенства на $A + \zeta E$. Учитывая рекуррентные соотношения (6), получаем

$$\begin{aligned}
 & (A + \zeta E)(A + \zeta E)^{-1} = \\
 & = 1 = 1 + \sum_{m=1}^N (A + \zeta E)A_m(-1, x)(D + \zeta E)^{-1-m} + (A + \zeta E)R_N = \\
 & = 1 + \sum_{m=1}^N A_m(-1, x)(D + \zeta E)^{-m} + IA'_m(-1, x)(D + \zeta E)^{-1-m} + \\
 & \quad + PA_m(-1, x)(D + \zeta E)^{-1-m} + (A + \zeta E)R_N = \\
 & = 1 + \sum_{m_1=0}^{N-1} A_{m_1+1}(-1, x)(D + \zeta E)^{-1-m_1} + \\
 & + \sum_{m=1}^N IA'_m(-1, x)(D + \zeta E)^{-1-m} + \sum_{m=1}^N P \cdot A_m(-1, x)(D + \zeta E)^{-1-m} + \\
 & \quad + (A + \zeta E)R_N = 1 + \sum_{m_1=0}^{N-1} A_{m_1+1}(0, x)(D + \zeta E)^{-1-m_1} - \\
 & \quad - \sum_{m_1=0}^{N-1} IA'_{m_1}(-1, x)(D + \zeta E)^{-1-m_1} - \\
 & \quad - \sum_{m_1=0}^{N-1} P \cdot A_{m_1}(-1, x)(D + \zeta E)^{-m_1-1} + \\
 & \quad + \sum_{m=1}^N IA'_m(-1, x)(D + \zeta E)^{-1-m} + \\
 & \quad + \sum_{m=1}^N PA_m(-1, x)(D + \zeta E)^{-1-m} + (A + \zeta E)R_N.
 \end{aligned}$$

Но, $A_{m_1+1}(0, x) = 0$, значит

$$\begin{aligned}
 1 = 1 + IA'_N(-1, x)(D + \zeta E)^{-1-N} + PA_N(-1, x)(D + \zeta E)^{-1-N} + \\
 + (A + \zeta E)R_N.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, R_N оказывается комбинацией операторов, нормы которых имеют нужный порядок малости. В силу нашего предположения относительно функций $p(x)$ к равенству (8) можно применять

оператор $A + \zeta E$ на любом векторе $\vec{f}(x)$ из $L_2[0\pi]$. Из (9) следует
 искомая оценка остатка. \square

Докажем теперь следующую лемму.

ЛЕММА 2. Для любого комплексного s имеет место следующая формула

$$A^s \sum_{m=0}^N A_m(s, x) D^{s-m} + R_N(s, x, D), \quad (10)$$

где $R_N(s, x, D) = O(D^{s-N-1})$, $D^{s_1} = (D^2)^{\frac{s_1}{2}}$, s_1 комплексно.

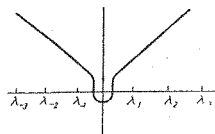
ПРИМЕЧАНИЕ 1. $R_N(s, x, D) = 0$ для s целых и меньших $N + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\operatorname{Res} < -1$. Тогда, так как

$$\binom{s}{n} a^{s-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{z^s ds}{(z-a)^{n+1}},$$

Г есть замкнутый контур, обходящий точку a , то

$$A^s = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^s dz}{zE - A}$$



(контур C указан на рисунке). Действительно, оператор $\frac{1}{zE-A}$ на C ограничен по норме одной константой. Интеграл сходится по норме операторов к ограниченному оператору и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^s dz}{zE - A} \vec{\varphi}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^s dz}{zE - \lambda E} \vec{\varphi}_n^s = \lambda_n^s \vec{\varphi}_n = A^s \vec{\varphi}_n,$$

так как контур C можно замкнуть дугой окружности достаточно большого радиуса. Умножим обе части (10) на $\frac{1}{2\pi i} z^s$ и проинтегрируем их по контуру C . Получим

$$-A^s = \sum_{m=0}^N A_m(-1, x)(-1)^{-1-m} \binom{s}{m} D^{s-m} + \frac{1}{2\pi i} \int_C z^s R_N dz.$$

Остаточный член достаточно мал. Используя $A_m(-1, x) = B_m(x)(-1)^m$, получаем

$$A^s = \sum_{m=0}^N A_m(s, x) D^{s-m} + O(D^{s-N-1}).$$

Для $\text{Res} > -1$ формула доказывается умножением ее на A и применением правила коммутации. Аналитическое продолжение $Z(s) = \sum_n [A^{-s} \vec{\psi}_n, \vec{\psi}_n]$ ищется обычным образом через аналитическое продолжение каждого члена, который известен в явном виде. Действительно, вычислим $\sum_n [A^{-s} \vec{\psi}_n, \vec{\psi}_n]$. Запишем

$$A^{-s} \vec{\psi}_n = n^{-s} \vec{\psi}_n + n^{-s-1} A_1(-s, x) \vec{\psi}_n + n^{-s-2} A_2(-s, x) \vec{\psi}_n + \dots \\ \dots + n^{-s-N} A_N(-s, x) \vec{\psi}_n + R_N \vec{\psi}_n.$$

Далее,

$$\lambda_n^{-s} = [A^{-s} \vec{\psi}_n, \vec{\psi}_n] = n^{-s} [\vec{\psi}_n, \vec{\psi}_n] + n^{-s-1} [A_1(-s, x) \vec{\psi}_n, \vec{\psi}_n] + \\ + n^{-s-2} [A_2(-s, x) \vec{\psi}_n, \vec{\psi}_n] + \dots + n^{-s-N} [A_N(-s, x) \vec{\psi}_n, \vec{\psi}_n] + R_N(n),$$

где

$$R_N(n) = O(n^{-s-N-1}).$$

Значит,

$$Z(s) = \sum_n \lambda_n^{-s} = \sum_n n^{-s} + \sum_n n^{-s-1} [A_1(-s, x) \vec{\psi}_n, \vec{\psi}_n] + \\ + \sum_n n^{-s-2} [A_2(-s, x) \vec{\psi}_n, \vec{\psi}_n] + \dots + \sum_n n^{-s-N} [A_N(-s, x) \vec{\psi}_n, \vec{\psi}_n] + \\ + \sum_n O(n^{-s-N-1}).$$

Обозначим элементы матриц $A_l(-s, x)$:

$$A_l(-s, x) = \begin{pmatrix} a_l(-s, x) & b_l(-s, x) \\ c_l(-s, x) & d_l(-s, x) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Z(s) \sum_n \lambda_n^{-s} = \sum_n n^{-s} + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_n n^{-s-1} \int_0^\pi \{a_1(-s, x) \cos^2 nx + (b_1(-s, x) + c_1(-s, x) \sin nx \cos nx + \\ + d_1(-s, x) \sin^2 nx\} dx + \frac{1}{\pi} \sum_n n^{-s-2} \int_0^\pi \{a_2(-s, x) \cos^2 nx +$$

$$\begin{aligned}
& + (b_2(-s, x) + c_2(-s, x) \sin nx \cos nx + d_2(-s, x) \sin^2 nx) dx + \dots + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_n n^{-s-N} \int_0^\pi \{a_N(-s, x) \cos^2 nx + (b_N(-s, x) + c_N(-s, x)) \times \\
& \times \sin nx \cdot \cos nx + d_N(-s, x) \sin^2 nx\} dx + \sum_n R_N(n),
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
Z(s) &= \sum_n \lambda_n^{-s} = \zeta(s) + (-1)^{-s} \zeta(s) + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \{\zeta(s+1) + (-1)^{-s-1} \zeta(s+1)\} \int_0^\pi \{a_1(-s, x) + d_1(-s, x)\} dx + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \{\zeta(s+2) + (-1)^{-s-2} \zeta(s+2)\} \int_0^\pi \{a_2(-s, x) + d_2(-s, x)\} dx + \dots \\
&+ \frac{1}{2\pi} \{\zeta(s+N) + (-1)^{-s-N} \zeta(s+N)\} \int_0^\pi \{a_N(-s, x) + d_N(-s, x)\} dx + \\
&+ \frac{1}{\pi} \sum_n n^{-s-1} \int_0^\pi \{a_1(-s, x) - d_1(-s, x)\} \cos 2nx dx + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \sum_n n^{-s-2} \int_0^\pi \{a_2(-s, x) - d_2(-s, x)\} \cos 2nx dx + \dots + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \sum_n n^{-s-N} \int_0^\pi \{a_N(-s, x) - d_N(-s, x)\} \cos 2nx dx + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \sum_n n^{-s-1} \int_0^\pi \{b_1(-s, x) + c_1(-s, x)\} \sin 2nx dx + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \sum_n n^{-s-2} \int_0^\pi \{b_2(-s, x) - c_2(-s, x)\} \sin 2nx dx + \dots + \\
&+ \sum_n n^{-s-N} \int_0^\pi \{b_N(-s, x) - c_N(-s, x)\} \sin 2nx dx + \sum_n R_n(n).
\end{aligned}$$

При $\text{Res} > -N$ остаток — функция аналитическая, остальные члены тоже. Продолжение, таким образом, найдено. \square

§ 4. Вычисление формул следов

Положим в вышенаписанной формуле $s = -k$. Согласно примечанию к лемме 2, если взять $N = k$, то остаточный член будет равен нулю.

Рассмотрим случай четного k ($k = 2m$, $m = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} Z(-2m) &= \sum_n^* \lambda_n^{2m} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{a_{2m}(2m, x) + d_{2m}(2m, x)\} dx + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_n n^{2m-1} \int_0^\pi \{a_1(2m, x) - d_1(2m, x)\} \cos 2nx \, dx + \dots + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_0^\pi \{a_{2m}(2m, x) - d_{2m}(2m, x)\} \cos 2nx \, dx + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_n n^{2m-1} \int_0^\pi \{b_1(2m, x) + c_1(2m, x)\} \sin 2nx \, dx + \dots + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_0^\pi \{b_{2m}(2m, x) + c_{2m}(2m, x)\} \sin 2nx \, dx, \end{aligned}$$

так как $\zeta(-2m) = 0$, и

$$\{\zeta(-2m + 2p + 1) + (-1)^{2m-2p-1} \zeta(-2m + 2p + 1)\}, \quad 2p + 1 < 2m. \quad (11)$$

Вычислим суммы при помощи интегрирования по частям. Обозначим

$$\begin{aligned} a_i(2m, x) - d_i(2m, x) &= \Phi_i(2m, x), \\ a_{2m}(2m, x) + d_{2m}(2m, x) &= \tilde{\Phi}_{2m}(2m, x), \\ b_i(2m, x) + c_i(2m, x) &= F_i(2m, x). \end{aligned}$$

Произведя вычисление, учтя, что проинтегрированные члены по ука-

занным выше причинам (11) обратятся в нуль, а также что

$$\sum_n \int_0^\pi \Phi_i(2m, x) \sin 2nx \, dx = 0, \quad \sum_n \int_0^\pi F_i(2m, x) \sin 2nx \, dx = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} Z(-2m) = & \sum_{p=1}^m \frac{(-1)^{m-p}}{2^{2m-2p}} \cdot \frac{\Phi_{2p}^{(2m-2p)}(2m, 0) + \Phi_{2p}^{2m-2p}(2m, \pi)}{4} - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \Phi_{2m}(2m, x) \, dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\Phi}_{2m}(2m, x) \, dx + \\ & + \sum_{p=1}^m \frac{(-1)^{m-p}}{2^{2m-2p+1}} \cdot \frac{F_{2p-1}^{2m-2p+1}(2m, 0) + F_{2p-1}^{2m+2p+1}(2m, \pi)}{4}. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично для $k = 2m - 1$ ($m = 1, 2, \dots$) получим

$$\begin{aligned} Z(-2m+1) = & \sum_{p=1}^m \frac{(-1)^{m-p}}{2^{2m-2p}} \cdot \frac{\Phi_{2p-1}^{(2m-2p)}(2m-1, 0) + \Phi_{2p-1}^{(2m-2p)}(2m-1, \pi)}{4} - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \Phi_{2m-1}(2m-1, x) \, dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\Phi}_{2m-1}(2m-1, x) \, dx + \\ & + \sum_{p=1}^{m-1} \frac{(-1)^{m-p-1}}{2^{2m-2p-1}} \cdot \frac{F_{2p}^{(2m-2p-1)}(2m-1, 0) + F_{2p}^{(2m-2p-1)}(2m-1, \pi)}{4}. \end{aligned} \quad (13)$$

Так, например, пользуясь рекуррентной формулой (7), находим

$$\begin{aligned} A_1(1, x) = B_1(x) = P(x), \\ Z(-1) - \frac{p(0) - p(0)}{4} + \frac{p(\pi) - p(\pi)}{4} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{p(x) - p(x)\} \, dx - \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(x) \, dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(x) \, dx. \end{aligned}$$

Аналогично могут быть вычислены и другие следы. Таким образом.

ТЕОРЕМА 3. Регуляризованные суммы $\sum_n^* \lambda_n^k$ оператора (1) с $p(x) = q(x)$ находятся по формулам (12), (13) при условии, что все нечетные производные функции $p(x)$ обращаются в нуль на концах отрезка $[0\pi]$.

Пусть теперь

$$p(x) = \frac{v(x)}{c} - mc, \quad q(x) = \frac{v(x)}{c} + mc.$$

Обозначим

$$\frac{v(x)}{c} - mc = p_1(x) - m_1, \quad \frac{v(x)}{c} + mc = p_1(x) + m_1.$$

Пусть

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} -m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае вид формул (12), (13) для определения следов остается прежним, но вместо функций $\Phi_i(k, x)$, $F_i(k, x)$, $\tilde{\Phi}_i(k, x)$ надо поставить $\Phi_{1,i}(k, x)$, $F_{1,i}(k, x)$, $\tilde{\Phi}_{1,i}(k, x)$, слагаемые которых являются соответствующими элементами уже матриц $A_{1,i}(k, x)$, определяемых из следующих рекуррентных соотношений:

$$A_{1,m+1}(k+1, x) = A_{1,m+1}^* + I A'_{1,m}(k, x) + (P_1 + M_1) A_{1,m}(k, x),$$

где $A_{1,m+1}^*(k, x)$ есть матрица, транспонированная с $A_{1,m}(k, x)$ относительно побочной диагонали.

То, что матрица M_1 постоянная и специального вида, позволяет провести все предыдущие рассуждения.

Проведенные вычисления для первого следа, например, дают

$$\sum_n^* \lambda_n = \sum_n \left(\lambda_n - n - c_0 - \frac{c_1}{n} \right) - c_0 = -\frac{2}{\pi c} \int_0^\pi V(x) dx.$$

$$\sum_n^* (\lambda_n - c_0) = 0,$$

так как известно, что $c_0 = \frac{2}{\pi c} \int_0^\pi V(x) dx$.

Взяв достаточное число уравнений и оборвав на нужном n каждую сумму из них, сможем получить алгебраическую систему для определения λ_n .

Литература

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. ДАН, 88, № 4, (1953), 593—598.
2. Дикий Л. А. Формулы следов для операторов Штурма-Лиувилля. УМН, XII, вып. 3 (1958), 111—143.
3. Дикий Л. А. Дзета-функция дифференциального уравнения. "Изв. АН СССР", сер. матем. **19**, № 4, 187—200, 1955.