

УДК 513.88

## Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций<sup>1</sup>

В. Б. Лидский, В. А. Садовничий

### Введение

Рассмотрим целую функцию  $f(z)$ , которая при каждом целом  $h > 0$  допускает представление вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z} P_{k,h}(z), \quad (1)$$

где  $\alpha_k$  — комплексные постоянные, а

$$P_{k,h}(z) = z^{n_k} \sum_{\nu=0}^h \beta_{\nu}^{(k)} z^{-\nu} + o(z^{n_k-h}) \quad (2)$$

при  $z \rightarrow \infty$ . В формуле (2)  $n_k$  — некоторое целое число, а  $\beta_0^{(k)} \neq 0$ .

Предполагается, что плоскость  $z$  можно покрыть конечным числом открытых секторов, содержащих начало координат, в каждом из которых функции  $P_{k,h}(z)$  являются аналитическими при<sup>2</sup>  $|z| > R$ .

В дальнейшем мы будем опускать индекс  $h$  у  $P_{k,h}(z)$  и писать

$$P_k(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^h \beta_{\nu}^{(k)} z^{-\nu}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Мы будем также предполагать, что представление (2') допускает почленное дифференцирование.

<sup>1</sup>Функц. анализ и его прилож., 1967, т.1, вып.2, с. 52–59.

<sup>2</sup>На пересечении секторов функции  $P_{k,h}(z)$ , вообще говоря, многозначны.

Функции вида (1) с описанными выше свойствами условимся называть *функциями класса  $K$* . Числа  $\alpha_k$  и  $\beta_\nu^{(k)}$  будем называть *параметрами асимптотики* функции  $f(z)$ .

Функции класса  $K$  возникают при решении дифференциальных уравнений, содержащих параметр  $z$ . Рассмотрим, например, на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  краевую задачу для дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x, z) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x, z) y = 0,$$

коэффициенты которого имеют вид

$$a_q(x, z) = z^q \sum_{j=0}^q z^{-j} a_{qj}(x), \quad q = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть граничные условия также полиномиально зависят от  $z$ :

$$U_i(y) = \sum_{\nu=0}^{m_i} z^\nu U_i^\nu(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где  $U_i^\nu(y)$  — линейные формы относительно решения  $y(x)$ :

$$U_i^\nu(y) = \sum_{k=1}^n \{a_{ik}^\nu y^{(k-1)}(0) + b_{ik}^\nu y^{(k-1)}(1)\} + \int_0^1 \alpha_i^\nu(x) y(x) dx. \quad (4')$$

Пусть коэффициенты уравнения (3) и функции  $\alpha_i^\nu(x)$  в (4') бесконечно дифференцируемы по  $x$ . Если, кроме того, предположить, что  $a_{q0}(x) = a_{q0} \cdot r(x)$  ( $q = 1, 2, \dots, n$ ), где  $r(x) > 0$  и многочлен  $\pi(\lambda) = \lambda^n + a_{10}\lambda^{n-1} + \dots + a_{q0}$  не имеет кратных корней, то уравнение для определения собственных значений задачи (3), (4) имеет вид

$$f(z) = 0, \quad (4)$$

где  $f(z) \in K$ . Существенно, что при этом параметры асимптотики  $f(z)$  явно выражаются через коэффициенты уравнения (3) и коэффициенты граничных условий (4). Этот факт следует из работы Я. Д. Тамаркина [1].

Целью настоящей статьи является получение явных выражений (через параметры асимптотики  $f(z)$ ) для регуляризованных сумм корней функции  $f(z)$ , т. е. сумм вида

$$\sum_{(l)} \{z_l^m - A_m(l)\} = s_m. \quad (5)$$

Здесь  $z_l$  – корни функции  $f(z)$ ,  $A_m(l)$  – некоторые вполне определенные числа, обеспечивающие сходимость рядов (6), а  $m$  – любое натуральное число.

Формулы (6) могут быть использованы для написания алгебраической системы уравнений

$$\sum_{l=1}^p z_l^m = s_m^*, \quad m = 1, 2, \dots, p,$$

связывающей первые корни  $f(z)$ . Это обстоятельство особенно существенно при отыскании первых собственных значений краевых задач.

Значения регуляризованных сумм собственных значений самосопряжённых операторов Штурма–Лиувилля были найдены в основополагающих в этой области работах И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и Л. А. Дикого (см. [2]–[4]). Настоящая статья является дальнейшим развитием этих работ.

Приводимые ниже теоремы не связаны с дифференциальными операторами и носят теоретико-функциональный характер. Однако они позволяют единым методом получать значения регуляризованных сумм собственных значений общих краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений любых порядков.

В связи с этим заметим, что если коэффициенты уравнения (3) лишь  $h$  раз дифференцируемы по  $x$ , то функция  $f(z)$  в (5) при  $z \rightarrow \infty$  также допускает представление (1), при этом, однако,

$$P_k(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{h+n_k} \beta_\nu^{(k)} z^{-\nu}, \quad h + n_k \geq 0. \quad (6)$$

Для простоты изложения ведём все рассмотрения для класса функций (1) с условием (2'). Предположение (2'') вносит лишь несущественные изменения.

## § 1. Дзета-функция, ассоциированная с $f(z)$

Пусть  $f(z)$  – целая функция класса  $K$ . Отметим на комплексной плоскости точки

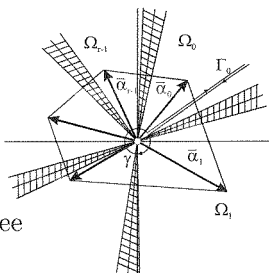
$$\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{N-1}, \quad (7)$$

и их выпуклую оболочку обозначим через  $\mathcal{P}$ . В общем случае  $\mathcal{P}$  есть  $r$ -угольник ( $r \leq N$ ). Направления внешних нормалей к  $\mathcal{P}$  назовём

критическими. Не нарушая общности, можно считать, что в вершины  $r$ -угольника  $\mathcal{P}$  попадают первые  $r$  показателей экспонент

$$\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{r-1}. \quad (8)$$

Удалим из плоскости  $z$   $r$  секторов  $T_s$  сколь угодно малого раствора ( $s = 0, 1, \dots, r-1$ ) с биссектрисами, параллельными критическим направлениям. Оставшуюся область обозначим через  $\Omega$ ; она в свою очередь распадается на  $r$  открытых секторов  $\Omega_s$  ( $s = 0, 1, \dots, r-1$ ) (см. рисунок). Легко устанавливается следующее утверждение:



**Лемма 1.** При достаточно большом  $R$  в пересечении областей  $|z| > R$  и  $\Omega$  отсутствуют нули  $f(z)$ .

В самом деле, легко проверить, что  $\operatorname{Re} \alpha z = (\bar{\alpha}, z)$ , где справа стоит скалярное произведение векторов  $\bar{\alpha}$  и  $z$ . Пусть теперь  $z$  для определённости принадлежит области  $\Omega_0$ . Тогда геометрически ясно, что при  $z \notin \mathcal{P}$  с некоторым  $\delta > 0$  будет выполняться неравенство  $\operatorname{Re} \alpha_0 z - \operatorname{Re} \alpha_k z > \delta |z|$  ( $k \neq 0$ ). Вследствие этого из формулы (1) сразу получаем  $f(z) = c \cdot z^{n_0} e^{\alpha_0 z} (1 + o(1))$ . Аналогичные оценки справедливы и в других секторах  $\Omega_s$ . Этим лемма 1 доказана.

Выберем теперь в одном из секторов  $\Omega_s$  (для определённости  $\Omega_0$ ) луч  $\lambda$  и построим контур  $\Gamma_0$  (см. рисунок), состоящий из дважды проходимо­го луча  $\lambda$  и окружности  $\gamma$  с центром в нуле. Не нарушая общности, можно считать, что  $f(0) \neq 0$  (в противном случае  $f(z)$  можно было бы разделить на целую степень  $z$ ). Очевидно, при этом луч  $\lambda$  и окружность  $\gamma$  можно выбрать так, чтобы все нули  $f(z)$  оказались во внешности контура  $\Gamma_0$ .

Замечая, далее, что при  $z \in \Gamma_0$ ,  $z \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \alpha_0 + \frac{P'_0(z)}{P_0(z)} + O(e^{-\delta|z|}) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_{\nu}^{(0)}}{z^{\nu}}, \quad (9)$$

введём в рассмотрение интеграл

$$Z_0(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (10)$$

который в силу (8) сходится в полуплоскости  $\operatorname{Re} \sigma > 1$ . В формуле (9)

$$z^{-\sigma} = e^{-\sigma \operatorname{Ln} z}, \quad (11)$$

где  $\operatorname{Ln} z$  – фиксированная регулярная ветвь логарифма во внешности  $\Gamma_0^3$ . Функцию (9) назовём дзета-функцией, ассоциированной с функцией  $f(z)$ .

Справедливо следующее предложение:

**Лемма 2.** При  $\operatorname{Re} \sigma > 1$

$$Z_0(\sigma) = \sum_{(l)} z_l^{-\sigma}, \quad (12)$$

где  $z_l$  – нули  $f(z)$ .

**Доказательство.** Поскольку  $f(z)$  – целая функция первого порядка, для  $f'(z)/f(z)$  справедливо равномерно сходящееся в каждом конечном круге разложение

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{(l)} \left\{ \frac{1}{z - z_l} + \frac{1}{z_l} \right\} + a. \quad (13)$$

Используя тот факт, что при  $|z_l| > R$  нули  $f(z)$  лежат в заштрихованных на рис. секторах, нетрудно получить оценку  $|z - z_l| > \delta |z_l|$  ( $\delta > 0$ ) для всех  $l$  и  $z \in \Gamma_0$ .

Разобьём сумму в правой части (12) на две

$$\sum_{(l)} = \sum_{(l')} + \sum_{(l'')},$$

отнеса ко второй слагаемые, для которых  $|z_l| > R$ .

Легко видеть, что

$$\left| \sum_{(l'')} \right| \leq \sum_{(l'')} \frac{|z|}{|z - z_l| |z_l|} < \frac{|z|}{\delta} \sum_{(l'')} \frac{1}{|z_l|^2} < \varepsilon |z| \quad (14)$$

при достаточно большом  $R$ . Умножив (12) на  $z^{-\sigma}$  ( $\operatorname{Re} \sigma > 2$ ), возьмём интегралы от обеих частей по контуру  $\Gamma_0$ . Оценка (13) позволяет переставить местами интегрирование и суммирование. Так как, далее,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} z^{-\sigma} \left\{ \frac{1}{z - z_l} + \frac{1}{z_l} \right\} dz = z_l^{-\sigma},$$

<sup>3</sup>Индекс у  $Z_0(\sigma)$  указывает на зависимость вводимой функции от выбора контура  $\Gamma_0$ .

то мы приходим к формуле (11) при  $\operatorname{Re} \sigma > 2$ . Замечая, однако, что обе части (11) определены и регулярны в полуплоскости  $\operatorname{Re} \sigma > 1$ , мы делаем вывод о справедливости равенства (11) при  $\operatorname{Re} \sigma > 1$ .

Оказывается, справедливо следующее утверждение:

**Лемма 3.** *Дзета-функция  $Z_0(\sigma)$  аналитически продолжается во всю  $\sigma$ -плоскость как целая функция<sup>4</sup>.*

Для доказательства разобьём интеграл (9) на четыре интеграла:

$$\begin{aligned} Z_0(\sigma) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_0} z^{-\sigma} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{\nu=0}^{\nu_0} \frac{\omega_{\nu}^{(0)}}{z^{\nu}} \right) dz + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} z^{-\sigma} \sum_{\nu=0}^{\nu_0} \frac{\omega_{\nu}^{(0)}}{z^{\nu}} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^{-\sigma} \sum_{\nu=0}^{\nu_0} \frac{\omega_{\nu}^{(0)}}{z^{\nu}} dz = \\ &= I_1(\sigma) + I_2(\sigma) + I_3(\sigma) + I_4(\sigma). \end{aligned}$$

Здесь через  $\Gamma'_0$  обозначен проходимый в противоположных направлениях луч  $\lambda$ , а  $\nu_0$  — некоторое натуральное число.

Легко видеть, что  $I_1(\sigma)$  и  $I_4(\sigma)$  — целые функции  $\sigma$ ;  $I_2(\sigma)$  в силу (8) аналитически продолжается в полуплоскость  $\operatorname{Re} \sigma > -\nu_0$ . Наконец,  $I_3(\sigma)$  при  $\operatorname{Re} \sigma > 1$  равно нулю и, следовательно, аналитически продолжается нулём на всю плоскость. Поскольку  $\nu_0$  любое, лемма 3 доказана.

Представление (14) позволяет найти значение  $Z_0(\sigma)$  в целых точках. Справедливо следующее предложение:

**Лемма 4.** *При  $m = 2, 3, \dots$*

$$Z_0(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot \frac{1}{z^m} dz. \quad (15)$$

При  $m = 0, 1, 2, \dots$

$$Z_0(-m) = \omega_{m+1}^{(0)}, \quad (16)$$

где  $\omega_{\nu}^{(0)}$  — коэффициенты в разложении (8).

Ограничимся доказательством равенств (16), которые в дальнейшем будут иметь основное значение. Обратимся к формуле (14). При  $\sigma$

<sup>4</sup>При условии (2'') можно лишь гарантировать, что  $Z_0(\sigma)$  продолжается в полуплоскость  $\operatorname{Re} \sigma > -h - n_0 - 1$ .

целом и неположительном имеем  $I_1(\sigma) = 0$ , поскольку под знаком интеграла оказывается регулярная внутри  $\gamma$  функция  $z$ ; далее,  $I_2(\sigma) = 0$  при целом  $\sigma$  вследствие того, что однозначная функция  $z$  интегрируется вдоль луча  $\lambda$  в двух противоположных направлениях. Учитывая, далее, что  $I_3(\sigma) \equiv 0$ , мы сведём вопрос к вычислению интеграла  $I_4(\sigma)$ . Это, очевидно, приведёт нас к формуле (16).

Аналогично устанавливаются равенства (15). Подчёркнём, что значения  $Z_0(\sigma)$  в целых положительных точках определяются поведением  $f(z)$  в окрестности нуля, в то время как значения в целых отрицательных точках выражаются через параметры асимптотики при  $z \rightarrow \infty$ .

## § 2. Асимптотика корней $f(z)$

В общем случае можно утверждать, что для больших по модулю корней  $f(z)$  справедлива асимптотическая формула

$$z_{n,s} = a_s n(1 + o(1)), \quad a_s = \frac{2\pi i}{\alpha_{s+1} - \alpha_s}. \quad (17)$$

Здесь  $s = 1, 2, \dots, r-1$  – номер сектора  $T_s$  (см. рис.), в котором располагается серия корней,  $\bar{\alpha}_s$  и  $\bar{\alpha}_{s+1}$  – вершины соответствующей стороны многоугольника  $\mathcal{P}$ , причём в (17) при  $s = r-1$  под  $\alpha_r$  следует понимать  $\alpha_0$ .

Для получения значений регуляризованных сумм (6) формула (17) оказывается недостаточной. Однако при некоторых предположениях относительно показателей экспонент (7) она допускает уточнение.

Предположим сначала, что на границе многоугольника  $\mathcal{P}$  лежат лишь числа (7'); все остальные  $N-r$  показателей (7) попадают, следовательно, внутрь многоугольника. В этом случае формуле (17) можно придать следующий вид:

$$z_{n,s} \sim a_s n \left\{ 1 + b_s \frac{\ln n}{n} + \frac{c_s}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k^{(s)}(\ln n)}{n^{k+1}} \right\}, \quad (18)$$

где  $R_k^{(s)}(\ln n)$  – полиномы степени  $k$  относительно  $\ln n$ . Все коэффициенты в (18) выражаются через параметры асимптотики  $f(z)$ . В частности,

$$a_s = \frac{2\pi i}{\alpha_{s+1} - \alpha_s}, \quad b_s = \frac{n_s - n_{s+1}}{2\pi i},$$

$$c_s = \frac{1}{2\pi i} \{ (n_s - n_{s+1}) \operatorname{Ln} a_s - \operatorname{Ln} \beta_0^{(s+1)} + \operatorname{Ln} \beta_0^{(s)} + \pi i \}.$$

Здесь числа  $n_s$  суть показатели при главных членах в формуле (2).

Асимптотическая формула (18) установлена Хорном в работе [5] методом итераций, и мы не будем останавливаться на её выводе.

Аналогичная формула для корней  $f(z)$  может быть получена и в том случае, когда на стороне многоугольника  $\mathcal{P}$  оказывается не два, а три и более показателей (7), однако в предположении, что сторона делится соответствующими точками на соизмеримые части.

Соответствующие асимптотические разложения аналогичны (18), однако содержат дробные степени  $n$ .

### § 3. Регуляризованные суммы корней

В этом параграфе мы для простоты будем предполагать, что корни  $z_{n,s}$  функции  $f(z)$  допускают асимптотическое представление (18), хотя и в случае асимптотики по дробным степеням  $n$  все проводимые ниже рассуждения в принципе сохраняются.

Возведя обе части (18) в степень  $-\sigma$ , получаем

$$z_{n,s}^{-\sigma} \sim a_s^{-\sigma} n^{-\sigma} \left\{ 1 + b_s \frac{\ln n}{n} + c_s \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k^{(s)}(\ln n)}{n^{k+1}} \right\}^{-\sigma}. \quad (19)$$

Поскольку известная формула Тейлора для функции  $(1+x)^\alpha$  справедлива и при комплексных  $x$  и  $\alpha$ , мы можем представить третий множитель в правой части (19) асимптотическим рядом и в результате получить формулу

$$z_{n,s}^{-\sigma} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}}, \quad (20)$$

где

$$Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n) = a_s^{-\sigma} \sum_{\nu=0}^k d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma) \ln^\nu n, \quad (21)$$

а  $d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma)$  – полиномы относительно  $\sigma$ . В частности,

$$d_{0,0}^{(s)}(\sigma) = 1; \quad d_{1,0}^{(s)}(\sigma) = -\sigma c_s, \quad d_{1,1}^{(s)}(\sigma) = -\sigma b_s; \quad \dots$$



Фиксируем некоторое целое достаточно большое  $\tau$ . Из формулы (20) следует, что функция

$$\Psi_{\tau}^{(0)}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\tau-1} \left[ z_{n,s}^{-\sigma} - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}} \right] \quad (22)$$

допускает аналитическое продолжение в полуплоскость

$$\operatorname{Re} \sigma > -\tau, \quad (23)$$

так как общий член ряда (23) есть  $O(\ln^{\tau+1} n / n^{-(\tau+1+\sigma)})$ . Наша цель – отыскание чисел

$$\Psi_{\tau}^{(0)}(-m) \quad (m < \tau), \quad (24)$$

которые мы назовём *регуляризованными  $m$ -суммами корней  $f(z)$* .

Заметим, что первый индекс корня  $z_{n,s}$  определяется значением целочисленного параметра в асимптотической формуле (18); конечное число корней  $f(z)$  при таком способе нумерации может оказаться пронумерованными или же, наоборот, может оказаться избыток целочисленных индексов в конечном числе. Штрих над знаком суммы в (23) означает, что в первом случае пронумерованные корни включаются в сумму, а во втором, – что первые слагаемые в квадратной скобке (23), снабжённые избыточными индексами, считаются нулями.

Учитывая это замечание, найдём значения сумм (23). Введём в рассмотрение функцию

$$\Phi_{\tau}^{(0)}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\tau-1} \left( \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}} \right), \quad (25)$$

регулярную при  $\operatorname{Re} \sigma > 1$ . В соответствии с (23) мы имеем  $\Psi_{\tau}^{(0)}(\sigma) = Z_0(\sigma) - \Phi_{\tau}^{(0)}(\sigma)$ . Так как  $Z_0(\sigma)$  – целая функция, то вместе с  $\Psi_{\tau}^{(0)}(\sigma)$  функция  $\Phi_{\tau}^{(0)}(\sigma)$  аналитически продолжается в полуплоскость (24). Заметим, что  $\Psi_{\tau}^{(0)}(\sigma)$  выражается через  $\zeta$ -функцию Римана и её производные. В самом деле, учитывая (21), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau}^{(0)}(\sigma) &= \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^k \left( \sum_{s=0}^{\tau-1} a_s^{-\sigma} d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma) \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\nu} n}{n^{k+\sigma}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^k D_{k,\nu}^{(0)}(\sigma) (-1)^{\nu} \zeta^{(\nu)}(k+\sigma). \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку значения  $\zeta$ -функции Римана и её производных в целых отрицательных точках известны, формула (27) позволяет найти значения  $\Phi_\tau^{(0)}(-m)$  при  $m < \tau$ . Учитывая, далее, формулы (16) для  $Z_0(-m)$ , мы приходим к следующей теореме.

**Теорема 1.** При любом целом  $m < \tau$  справедливы равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{r-1} \left[ z_{n,s}^m - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(-m, \ln n)}{n^{k-m}} \right] = \omega_{m+1}^{(0)} - \Phi_\tau^{(0)}(-m), \quad (26)$$

где  $\omega_{m+1}^{(0)}$  – коэффициенты разложения (8), а числа  $\Phi_\tau^{(0)}(-m)$  определяются формулой (27).

Обратим внимание читателя на то обстоятельство, что оба слагаемых в правой части (28) зависят от выбора контура  $\Gamma_0$ , введённого при определении функции  $Z_0(\sigma)$ , в то время как их разность не зависит от  $\Gamma_0$ , поскольку этим свойством обладает левая часть в (28). Используя эту инвариантность, а также серию линейных соотношений, возникающих в результате приравнивания к нулю коэффициентов при полюсах  $\zeta$ -функции и её производных в правой части (27), можно получить линейную рекуррентную систему для определения коэффициентов асимптотического ряда (18). К сожалению, мы не имеем возможности останавливаться здесь на этом вопросе.

## § 4. Система для первых корней $f(z)$

Пусть  $q$  – некоторое натуральное число. Поскольку общий член ряда (23) есть  $O(n^{-\tau-1-\sigma} \ln^{\tau+1} n)$ , из формулы (28) легко получаем для всех  $m \leq \tau - 1$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^q \sum_{s=0}^{r-1} z_{n,s}^m = \\ &= \sum_{n=1}^q \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(-m, \ln n)}{n^{k-m}} + \omega_{m+1}^{(0)} - \Phi_\tau^{(0)}(-m) + O(q^{m-\tau} \ln^{\tau+1} q). \end{aligned} \quad (29)$$

Эти соотношения можно рассматривать как систему уравнений относительно первых корней функции  $f(z)$ . Недостатком этой системы является имеющаяся неопределённость в отношении числа неизвестных в левых частях формулы (29) (см. по этому поводу замечание

на с. 38). Мы сейчас устраним эту неопределённость. Заметим, что  $Q_k^{(s)}(0, \ln n) = 0$ ,  $k \geq 1$ , и  $Q_0^{(s)}(0, \ln n) = 1$  (см. (21) и (22)); поэтому, если положить в формуле (28)  $m = 0$ , в левой части мы получим целое число, равное избытку или недостатку корней при заданном способе нумерации. Это целое число мы будем называть *дефектом регуляризации* и обозначать через  $\kappa$ . Из формулы (28) при этом следует, что

$$\kappa = \omega_1^{(0)} + \frac{r}{2} - \sum_{s=1}^r b_s \operatorname{Ln} a_s + \sum_{s=1}^r c_s,$$

где под  $\operatorname{Ln} a_s$  понимаются значения регулярной ветви логарифма, фиксированной в формуле (10). Таким образом, число неизвестных в левой части формулы (29) равно  $p = q \cdot r + \kappa$ .

Полагая в (29)  $\tau > p$ , мы перепишем систему (29) в виде<sup>5</sup>

$$\sum_{l=1}^p z_l^m = s_m^*(q), \quad m = 1, 2, \dots, p.$$

Через  $s_m^*(q)$  обозначены правые части (29). Из наших рассуждений следует, что они определены с точностью до  $O(q^{-\tau+m} \ln^{\tau+1} q)$ .

## Литература

1. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.
2. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка, Докл. АН СССР, 88, N 4 (1953), 593–596.
3. Гельфанд И.М. О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка, УМН 11, вып. 1 (1956), 191.
4. Диккий Л.А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля, УМН 13, вып. 3 (1958), 111–143.
5. Horn J. Verwendung acymptotischer Darstellungen, Math. Ann. 49 (1897), 473–496.
6. Жданович В. Ф. Формулы для нулей полиномов Дирихле и квазиполиномов, ДАН СССР 135, N 5 (1960).

<sup>5</sup>Ср. [4], §6.