

УДК 517.43

Формулы следов в случае уравнения Орра – Зоммерфельда¹

В. Б. Лидский, В. А. Садовнический

Введение

Рассматривается краевая задача

$$(D^2 - \alpha^2)^2 u = i\alpha R\{(p(x) - c)(D^2 - \alpha^2)u - p''(x)u\}, \quad (1)$$

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0, \quad (2)$$

где $D = \frac{d}{dx}$, c – спектральный параметр, α и R – вещественные константы, $p(x)$ – вещественная функция. Задача (1)–(2) возникает в теории гидродинамической устойчивости (см., например, [1]), где в центре внимания оказываются малые по модулю собственные числа c_λ , рассматриваемые как функции α и R . Дело в том, что если при всех вещественных α и R числа $c_\lambda(\alpha, R)$ лежат в нижней полуплоскости, то соответствующее течение оказывается устойчивым. При нарушении этого условия (в верхней полуплоскости могут оказаться лишь числа c_λ с малыми модулями) – неустойчивым.

Настоящая статья посвящена регуляризации сумм степеней собственных значений уравнения (1), т. е. вычислению сумм вида

$$\sum_{(\lambda)} [c_\lambda^k - a_\lambda(k)] = s_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Здесь c_λ – собственные значения задачи (1) – (2), $a_\lambda(k)$ – некоторые вполне определённые числа, обеспечивающие сходимость рядов, s_k – значение k -й регуляризованной суммы.

¹Изв. АН СССР, сер. матем., вып. 3, т. 32, 1968. с. 633–648.

Предлагаемая в настоящей статье процедура определения чисел $\alpha_\lambda(k)$ по коэффициентам уравнения включает лишь интегрирование известных функций, сложение и умножение в конечном числе.

Эти операции легко могут быть запрограммированы и можно надеяться, что формулы (3) позволят находить приближенные значения первых собственных значений уравнения Орра – Зоммерфельда.

Задаче регуляризации сумм собственных значений уравнения Штурма – Лиувилля посвящены работы И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и Л. А. Дикого [2], [3], [4].

Трудности, которые возникают в случае уравнения Орра – Зоммерфельда, связаны не столько с несамосопряжённостью задачи, сколько со специальным положением спектрального параметра в этом уравнении.

При выводе формул (3) мы пользуемся методом, предложенным в нашей статье [5], который позволяет решать и более общие задачи.

§ 1. Асимптотические формулы для решений уравнения Орра – Зоммерфельда

Мы будем в дальнейшем всюду считать, что²

$$p_{cp} = \int_0^1 p(t)dt = 0.$$

Введём следующие обозначения:

$$-i\alpha R p(x) = r(x), \quad (4)$$

$$i\alpha R p''(x) = q(x), \quad (4')$$

$$i\alpha R c = -z^2. \quad (4'')$$

Уравнение (1) в результате мы сможем записать так:

$$Lu \equiv (D^2 - \alpha^2)^2 u + (r(x) - z^2)(D^2 - \alpha^2)u + q(x)u = 0. \quad (5)$$

Справедливо следующее предложение.

Лемма 1. Пусть коэффициенты $r(x)$ и $q(x)$ уравнения (5) бесконечно дифференцируемы. Тогда:

²Этого всегда можно добиться, введя в уравнение (1) функцию $p_1(x) = p(x) - p_{cp}$ и одновременно сдвинув спектральный параметр: $\tilde{c} = c - p_{cp}$.

а) уравнение (5) удовлетворяется следующими четырьмя формальными рядами:

$$u_1(x, z) = e^{zx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x)}{z^k}, \quad (6)$$

$$u_2(x, z) = e^{-zx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x)}{z^k} (-1)^k, \quad (7)$$

$$u_3(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{k,1}(x)}{z^k}, \quad (8)$$

$$u_4(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{k,2}(x)}{z^k}, \quad (9)$$

где функции $a_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} a'_k = & -\frac{5}{2}a''_{k-1} + \frac{1}{2}(\alpha^2 - r(x))a_{k-1} - 2a''_{k-2} + (2\alpha^2 - r(x))a'_{k-2} - \\ & - \frac{1}{2}a'''_{k-3} + \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}r(x)\right)a''_{k-3} + \frac{1}{2}(\alpha^2 r(x) - q(x) - \alpha^4)a_{k-3}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$a_\nu(x) \equiv 0, \quad \nu < 0, \quad (11)$$

а функции $c_{k,j}(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2$) – соотношениям

$$(D^2 - \alpha^2)c_{k,j} = (D^2 - \alpha^2)c_{k-2,j} + r(x)(D^2 - \alpha^2)c_{k-2,j} + q(x)c_{k-2,j}, \quad (12)$$

$$c_{k,j}(x) \equiv 0, \quad k < 0; \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

б) Пусть γ – фиксированное вещественное число; всегда можно указать такое $R(\gamma) > 0$, что для любого целого $m > 0$ в области G :

$$\operatorname{Re} z > \gamma, \quad |z| > R(\gamma) \quad (14)$$

найдутся четыре линейно независимых решения

$$u_{1,m}(x, z), \quad u_{2,m}(x, z), \quad u_{3,m}(x, z), \quad u_{4,m}(x, z), \quad (15)$$

регулярные по z , $z \in G$, и допускающие асимптотические представления при $z \rightarrow \infty$, $z \in G$:

$$u_{1,m}(x, z) = e^{zx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x)}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right) \right), \quad (16)$$

$$u_{2,m}(x, z) = e^{-zx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x)}{z^k} (-1)^k + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right) \right), \quad (17)$$

$$u_{3,m}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{k,1}(x)}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right), \quad (18)$$

$$u_{4,m}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{k,2}(x)}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right). \quad (19)$$

Функции $a_k(x)$, $c_{k,j}(x)$ определяются рекуррентными соотношениями (10) и (12). Постоянные в O -членах в формулах (16) – (19) не зависят от x . Формулы (16) – (19) могут быть почленно продифференцированы.

Такая же система решений существует в области G' :

$$\operatorname{Re} z < \gamma', \quad |z| > R(\gamma'). \quad (20)$$

При этом в формулах (16) – (19) могут быть взяты те же самые функции $a_k(x)$ и $c_{k,j}(x)$, что и в случае области G .

Доказательство утверждения а) проводится непосредственной постановкой рядов (6) – (9) в уравнение (5).

При доказательстве утверждения б) мы воспользуемся специальным видом уравнения (5), хотя аналогичное утверждение может быть доказано и в более общем случае (см. по этому поводу [6], с. 90). Определим функции $a_k(x)$ и $c_{k,j}(x)$ рекуррентными соотношениями (10) и (12), положив, кроме того,

$$a_0(0) = 1; \quad a_k(0) = 0, \quad k \geq 1, \quad (21)$$

$$c_{0,1}(x) = \operatorname{ch} \alpha x, \quad c_{2s,1}(0) = c'_{2s,1}(0) = 0, \quad (22)$$

$$c_{0,2}(x) = \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\alpha}, \quad c_{2s,2}(0) = c'_{2s,2}(0) = 0, \quad (23)$$

$$c_{2s-1,j}(x) \equiv 0, \quad s = 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2. \quad (24)$$

Коэффициенты $a_k(x)$ и $c_{k,j}(x)$ определяются тем самым единственным образом. Мы ограничимся доказательством формулы (18). Будем искать $u_{3,m}(x, z)$ в виде

$$u_{3,m}(x, z) = \sum_{0 \leq 2s \leq m+2} \frac{c_{2s,1}(x)}{z^{2s}} + v(x, z) \equiv v_0(x, z) + v(x, z). \quad (25)$$

Подставив (25) в уравнение (5), придём к следующему уравнению относительно $v(x, z)$:

$$Lv(x, z) = \varphi(x, z), \quad (26)$$

где

$$\varphi(x, z) = -Lv_0(x, z) = O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right). \quad (27)$$

Если в (26) ввести функцию

$$v(x, z) = \int_0^x \frac{\operatorname{sh} \alpha(x-t)}{\alpha} h(t, z) dt, \quad (28)$$

то относительно $h(x, z)$ получится уравнение

$$(D^2 - z^2)h + (p(x) - \alpha^2)h + \int_0^x q(x) \frac{\operatorname{sh} \alpha(x-t)}{\alpha} h dt = \varphi(x, z). \quad (29)$$

Оператор $D^2 - z^2$ имеет правый обратный $A(z)$, действующий по формуле

$$A(z)f = -\frac{1}{2z} \int_0^x e^{-z(x-t)} f(t) dt - \frac{1}{2z} \int_x^1 e^{z(x-t)} f(t) dt, \quad (30)$$

поэтому уравнению (29) удовлетворяет решение интегрального уравнения

$$h + A(z)Ph = A(z)\varphi. \quad (31)$$

Здесь через Ph мы обозначили второе и третье слагаемые в левой части (29).

Поскольку далее ядро оператора P не зависит от z , а ядро $A(z)$ стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$, $z \in G$ (см. (30)), то, согласно (31), $h = (E + A(z)P)^{-1}A(z)\varphi$ и, следовательно, $h = O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right)$. Но тогда в силу (28)

$$v(x, z) = O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right). \quad (32)$$

Регулярность $h(x, z)$ и $v(x, z)$ при $z \in G$ и $R(\gamma)$ достаточно большом следует из регулярности ядра оператора $A(z)$. Правомомерность почленного дифференцирования формулы (18) по x устанавливается дифференцированием тождества (26). При этом выясняется, что v'_x , v''_x и v'''_x удовлетворяют уравнению типа (26) с правой частью нужного порядка убывания при $z \rightarrow \infty$.

Наконец, линейная независимость решений (16) – (19) при условиях (21) – (24) доказывается посредством вычисления определителя Вронского

$$\delta(z) = W(u_{1,m}; u_{2,m}; u_{3,m}; u_{4,m})|_{x=0}. \quad (33)$$

Этот вопрос мы рассмотрим в следующем параграфе.

§ 2. Уравнение, определяющее собственные значения

В этом параграфе мы найдём асимптотическое представление для целой функции, корнями которой являются собственные значения задачи (1) – (2). В дальнейшем мы будем опускать в левых частях формул (16) – (19) индекс m . Обозначим через $\bar{\beta}_j(z)$ вектор с компонентами

$$\bar{\beta}_j(z) = (u_j(0, z); u'_j(0, z); u''_j(0, z); u'''_j(0, z)), \quad (34)$$

где $j = 1, 2, 3, 4$, $u_j(x, z)$ – решения (16) – (19), штрих означает дифференцирование по x .

Пусть далее $\bar{w}(x, z)$ – вектор с компонентами

$$(w_1(x, z); w_2(x, z); w_3(x, z); w_4(x, z)), \quad (35)$$

где $w_s(x, z)$ – решения уравнения (5), нормированные при $x = 0$ условиями Коши:

$$w_s^{(t-1)}(0, z) = \delta_{s,t}; \quad s, t = 1, 2, 3, 4. \quad (36)$$

Функции (35) при фиксированном x являются целыми относительно z^2 . Заметим, что всякое решение уравнения (5), удовлетворяющее при $x = 0$ условиям (2), является линейной комбинацией функций $w_3(x, z)$ и $w_4(x, z)$. Поэтому собственные значения задачи (1) суть корни целой функции³

$$f(z) = \begin{vmatrix} w_3(1, z) & w_4(1, z) \\ w'_3(1, z) & w'_4(1, z) \end{vmatrix}. \quad (37)$$

С другой стороны, при $z \in G$ всякое решение $u(x, z)$ уравнения (5) представимо в виде

$$u(x, z) = \sum_{s=1}^4 \alpha_s(z) u_s(x, z). \quad (38)$$

³В этом параграфе мы в соответствии с (4'') считаем $i\alpha Rc = -z^2$ и рассматриваем собственные значения на z -плоскости.

Следовательно, собственные значения задачи (1) – (2) являются корнями определителя

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} u_1(0, z) & u_2(0, z) & u_3(0, z) & u_4(0, z) \\ u'_1(0, z) & u'_2(0, z) & u'_3(0, z) & u'_4(0, z) \\ u_1(1, z) & u_2(1, z) & u_3(1, z) & u_4(1, z) \\ u'_1(1, z) & u'_2(1, z) & u'_3(1, z) & u'_4(1, z) \end{vmatrix}. \quad (39)$$

Заметим далее, что в силу теоремы единственности

$$u_j(x, z) = (\bar{w}(x, z), \bar{\beta}_j(z)) \quad (40)$$

(см. (36) и (34)). Здесь в правой части написано скалярное произведение векторов. Подставив (40) в (39), легко найдем, что $\Delta(z) = f(z)\delta(z)$, $\delta(z)$ – определитель Вронского (33).

Мы получили следующее представление для целой функции (37)

$$f(z) = \frac{\Delta(z)}{\delta(z)}, \quad (41)$$

которое позволит нам найти асимптотику $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$. На основании формул (16) – (19) легко придти к заключению, что определитель $\Delta(z)$ допускает следующее асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} \Delta(z) = & \left(-\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} \right) z^2 \left\{ e^z \left[\sum_{k=0}^m \frac{A_k}{z^k} + \dots \right] + e^{-z} \left[\sum_{k=0}^m \frac{A_k}{z^k} (-1)^k + \dots \right] + \right. \\ & \left. + 2 \left[\sum_{1 \leq 2s+1 \leq m} \frac{C_{2s+1}}{z^{2s+1}} + \dots \right] \right\}, \quad (42) \end{aligned}$$

где A_k и C_{2s} – некоторые постоянные и $A_0 = 1$. Точками обозначаются члены $O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right)$. Не составляет труда убедиться также в справедливости формулы

$$\delta(z) = -2z^5 \left(\sum_{0 \leq 2s \leq m} \frac{B_{2s}}{z^{2s}} + \dots \right), \quad B_0 = 1. \quad (43)$$

Отсюда, в частности, следует, что $\delta(z) \neq 0$ при $z \rightarrow \infty$. Коэффициенты разложений (42) и (43) находятся путём раскрытия определителей (39) и (33). Удобнее всего это сделать, разлагая определители по минорам первых двух столбцов. Соответствующие формулы для A_k , C_{2k+1} и B_{2s} в общем виде мы приводим в добавлении.

Сформулируем теперь следующее предложение.

Лемма 2. Целая функция $f(z)$, корнями которой являются собственные числа задачи (1) – (2), при $z \rightarrow \infty$ допускает асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} f(z) = z^{-3} K \left\{ e^z \left[\sum_{\nu=0}^m \frac{\beta_\nu}{z^\nu} + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right) \right] - \right. \\ \left. - e^{-z} \left[\sum_{\nu=0}^m \frac{\beta_\nu}{z^\nu} (-1)^\nu + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right) \right] + \right. \\ \left. + 2 \left[\sum_{1 \leq 2s+1 \leq m} \frac{\gamma_{2s+1}}{z^{2s+1}} + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (44)$$

где $K = \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha}{2\alpha} \right)$, $\beta_0 = 1$.

Положим в формулах (14) и (20), определяющих области G и G' , $\gamma < 0$ и $\gamma' > 0$. Разложения (42) и (43) справедливы при $z \rightarrow \infty$ с одними и теми же коэффициентами асимптотики при $z \in G$ и при $z \in G'$ (см. конец леммы 1). Поэтому в силу (41) асимптотическое представление (44) справедливо во всей z -плоскости.

Отметим, что функции, стоящие в квадратных скобках в формуле (44), могут быть выбраны аналитическими в G (или G'), как это следует из вывода формулы (44). В пересечении G и G' эти функции, вообще говоря, не совпадают. Асимптотика же у них общая.

§ 3. Асимптотика собственных значений

В этом параграфе мы выведем асимптотические формулы для больших по модулю корней $f(z)$ (см. (37)). Из представления (44) нетрудно заключить, что все корни $f(z)$ располагаются в некоторой вертикальной полосе, содержащей мнимую ось. Поскольку нас будут интересовать большие по модулю корни, достаточно в силу (41) и (43) рассмотреть уравнение

$$\Delta(z) = 0. \quad (45)$$

Фиксируем в формуле (42) некоторое m , положим $e^z = w$ и рассмотрим квадратное уравнение относительно w :

$$w^2 P_1(z) + 2w P_2(z) + P_3(z) = 0, \quad (46)$$

где через P_s ($s = 1, 2, 3$) мы обозначили функции, стоящие в квадратных скобках формулы (42). Функции $P_s(z)$ регулярны в области G . Поэтому уравнение (46) определяет две аналитические ветви в G :

$$w_1(z) = [-P_2(z) + (P_2^2(z) - P_1(z)P_3(z))^{1/2}]P_1^{-1}(z), \quad (47)$$

$$w_2(z) = [-P_2(z) - (P_2^2(z) - P_1(z)P_3(z))^{1/2}]P_1^{-1}(z). \quad (48)$$

Поскольку, согласно (42), $P_1(z) = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right)$, $P_2(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$, $P_3(z) = -1 + O\left(\frac{1}{z}\right)$, то

$$w_1(z) = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad (49)$$

$$w_2(z) = -1 + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad (50)$$

причём ясно, что для обеих ветвей может быть получена асимптотика по обратным степеням z с остаточным членом $O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right)$.

Для определения коэффициентов асимптотики формулы (47) и (48) оказываются неудобными. Мы получим сейчас для этой цели простые рекуррентные соотношения.

Заметим, что с увеличением m в асимптотических формулах для $P_s(z)$ появляются члены более высокого порядка, старые же коэффициенты при этом не изменяются. Очевидно, этим же свойством обладают асимптотические формулы для $w_j(z)$, ($j = 1, 2$). Учитывая это замечание, условимся писать:

$$P_1(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu}{z^\nu}, \quad P_2(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{C_{2s+1}}{z^{2s+1}}, \quad P_3(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu}{z^\nu} (-1)^\nu, \quad (51)$$

$$w_j(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{T_{\nu,j}}{z^\nu}, \quad j = 1, 2. \quad (52)$$

В правых частях (51) и (52) стоят формальные ряды; мы сохраним для них обозначения $P_s(z)$ и $w_j(z)$. При этом очевидно, что

$$P_3(z) = -P_1(-z). \quad P_2(z) = -P_2(-z). \quad (53)$$

Ряды (52) обладают следующим свойством:

$$w_j^{-1}(z) = w_j(-z). \quad (54)$$

Этот факт легко следует из формул (47) и (48) с учётом (53).

Используя соотношение (54) и специальный вид уравнения (46), мы установим следующее предложение.

Лемма 3. Коэффициенты $\tau_{\nu,j}$ рядов (52) определяются рекуррентными соотношениями ($j = 1, 2$):

$$\tau_{2s+1,j} = -C_{2s+1} - \sum_{\nu=1}^{2s+1} \tau_{2s+1-\nu,j} A_{\nu}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad (55)$$

$$\tau_{2s,j} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{2s-1} \tau_{2s-\nu,j} \tau_{\nu,j} (-1)^{\nu+j}; \quad s = 1, 2, \dots, \quad (56)$$

$$\tau_{0,1} = 1; \quad \tau_{0,2} = -1. \quad (57)$$

Формулы (55) устанавливаются подстановкой рядов (51) и (52) в уравнение (46), предварительно умноженное на $w_j(-z)$. Формулы (56) следуют из тождества $w_j(-z)w_j(z) \equiv 1$ (см. (54)). Равенства (57) находятся в соответствии с (49) и (50).

Перейдём теперь к асимптотике корней $f(z)$. Уравнения

$$e^z = w_1(z) \quad \text{и} \quad e^z = w_2(z) \quad (58)$$

эквивалентны уравнению $f(z) = 0$ при больших $|z|$ и вследствие асимптотического разложения для правых частей по обратным степеням z позволяют обычным методом, используя теорему Руше (см., например, [7], с. 58), показать, что при достаточно большом натуральном n в малой окрестности точек $2\pi in$, $-2\pi in$, $2\pi i(n + 1/2)$, $-2\pi i(n + 1/2)$ расположен один и только один корень $f(z)$ и при $|z| > R$ функция $f(z)$ других корней не имеет. Тем же методом доказывается существование асимптотических разложений⁴

$$z_{n,1} \sim 2\pi in \left(1 + \frac{r_{1,1}}{n^2} + \dots \right), \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad (59)$$

$$z_{n,2} \sim 2\pi i(n + 1/2) \left(1 + \frac{r_{1,2}}{(n + 1/2)^2} + \dots \right), \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (59')$$

Отметим следующий факт.

⁴Обратим внимание на то, что нумерация корней $z_{n,1}$ и $z_{n,2}$ согласована с главными членами асимптотики.

Лемма 4. Ряд (59) содержит только нечётные степени n , а ряд (59) – нечётные степени $(n + 1/2)$ и, следовательно,

$$z_{n,1} \sim 2\pi i n \left(1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{r_{\mu,1}}{n^{2\mu}} \right), \quad (60)$$

$$z_{n,2} \sim 2\pi i (n + 1/2) \left(1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{r_{\mu,2}}{(n + 1/2)^{2\mu}} \right). \quad (60')$$

В самом деле, поскольку $f(z)$ – чётная функция, то вместе с каждым корнем $z_{n,1}$ число $-z_{n,1}$ также является её корнем. Как мы указывали, в малой окрестности точки $-2\pi i n$ (при достаточно большом натуральном n) расположен лишь один корень $f(z)$. Им, очевидно, является $-z_{n,1}$ и в то же время $z_{-n,1}$. Поэтому $z_{-n,1} = -z_{n,1}$. Отсюда следует наше утверждение в случае ряда (59). Для ряда (59') доказательство проводится аналогично.

В заключение этого параграфа укажем, что коэффициенты $r_{\mu,1}$ и $r_{\mu,2}$ рядов (60) и (60'), как это следует из нашей сатвы [8] [см. (42), замечание г)], связаны следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} r_{\mu+1,j} = & \sum_{m=2}^{\mu+1} \sum_{\substack{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_m=\mu+1 \\ \mu_i \geq 1}} \frac{1}{2\mu+1} \binom{2\mu+1}{m} r_{\mu_1,j} \dots r_{\mu_m,j} - \\ & - (-1)^{\mu+1} \frac{(2\pi)^{-(2\mu+2)}}{2\mu+1} \delta_{\mu+1,j}, \quad j = 1, 2; \quad \mu \geq 0, \end{aligned} \quad (61)$$

где $\delta_{\mu,j}$ суть коэффициенты формальных рядов

$$\frac{w'_j(z)}{w_j(z)} \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\delta_{\nu,j}}{z^{2\nu}}, \quad j = 1, 2. \quad (62)$$

Отсутствие нечётных степеней z в (62) немедленно следует из тождества (54). Отметим ещё, что при $\nu \geq 1$

$$\delta_{\nu,j} = \sum_{m=1}^{2\nu-1} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_m=2\nu-1 \\ k_i \geq 1}} \tau_{k_1,j} \tau_{k_2,j} \dots \tau_{k_m,j} (-1)^{mj} \frac{2\nu-1}{m}. \quad (62')$$

§ 4. Формулы следов

Поскольку целая функция $f(z)$ допускает представление (44), суммы её корней в любой целой положительной степени могут быть регуляризованы и вычислены способом, указанным в нашей статье [5]. Отсылая читателя за подробностями к работе [5], введём в рассмотрение функцию

$$Z(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{(+0)} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (63)$$

Интеграл берётся по контуру типа Ханкеля, не проходящему через корни $f(z)$. На основании результатов [5], §1, можно утверждать, что $Z(\sigma)$ – целая функция. Её значения в целых отрицательных точках определяются коэффициентами асимптотического ряда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_{\nu}}{z^{\nu}}, \quad z \rightarrow +\infty \quad (64)$$

по формуле

$$Z(-k) = \omega_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (65)$$

Укажем, что согласно формуле (19) статьи [5]

$$Z(0) = \omega_1 - s, \quad (66)$$

где s – кратность корня $z = 0$ функции $f(z)$ ⁵.

Из результатов [5], §1, следует также, что

$$Z(\sigma) = \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-\sigma} \quad (\operatorname{Re} \sigma > 1), \quad (67)$$

где z_{λ} – корни $f(z)$, отличные от нуля.

Заметим, что согласно (41),

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)} - \frac{\delta'(z)}{\delta(z)}. \quad (68)$$

⁵В [5] мы для простоты предполагали, что $f(0) \neq 0$; здесь такое предположение становится неудобным.

Учитывая асимптотические формулы (42) и (43) для $\Delta(z)$ и $\delta(z)$, легко найдём, что при $z \rightarrow +\infty$

$$\frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)} \sim 1 + \frac{2}{z} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{b_s}{z^s}, \quad (69)$$

где

$$b_s = \sum_{m=1}^{s-1} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_m=s-1 \\ k_i \geq 1}} A_{k_1} A_{k_2} \dots A_{k_m} (-1)^m \frac{s-1}{m}. \quad (70)$$

И далее

$$\frac{\delta'(z)}{\delta(z)} \sim \frac{5}{z} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{d_{2\mu+1}}{z^{2\mu+1}}, \quad (71)$$

где

$$d_{2\mu+1} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_m=\mu \\ k_i \geq 1}} B_{2k_1} B_{2k_2} \dots B_{2k_m} (-1)^m \frac{2\mu}{m}. \quad (72)$$

Выражения для A_k и B_{2k} мы приводим в добавлении к настоящей статье.

Таким образом, в формуле (64)

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = -3 \quad (73)$$

и при $\mu \geq 1$

$$\omega_{2\mu} = b_{2\mu} \quad \text{и} \quad \omega_{2\mu+1} = b_{2\mu+1} - d_{2\mu+1}. \quad (74)$$

Для вычисления значений регуляризованной суммы корней $f(z)$

$$\sum_{(n)} (z_{n,1}^{2k} + z_{-n,1}^{2k} + z_{n,2}^{2k} + z_{-n,2}^{2k} + \dots) = 2 \sum_{(n)} (z_{n,1}^{2k} + z_{n,2}^{2k} + \dots) \quad (75)$$

найдем разложение $z_{n,1}^{-\sigma}$ и $z_{n,2}^{-\sigma}$ в асимптотические ряды по степеням n и $n + 1/2$. В соответствии с формулами (60) и (60') получаем:

$$\begin{aligned} z_{n,1}^{-\sigma} \sim (2\pi i)^{-\sigma} n^{-\sigma} & \left[1 + \binom{-\sigma}{1} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{r_{\mu,1}}{n^{2\mu}} + \binom{-\sigma}{2} \sum_{\mu_1=1}^{\infty} \frac{r_{\mu_1,1}}{n^{2\mu_1}} \sum_{\mu_2=1}^{\infty} \frac{r_{\mu_2,1}}{n^{2\mu_2}} + \right. \\ & \left. + \dots + \binom{-\sigma}{m} \sum_{\mu_1=1}^{\infty} \frac{r_{\mu_1,1}}{n^{2\mu_1}} \dots \sum_{\mu_m=1}^{\infty} \frac{r_{\mu_m,1}}{n^{2\mu_m}} + \dots \right] = (2\pi i)^{-\sigma} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\rho_{\nu,1}(\sigma)}{n^{2\nu+\sigma}}, \end{aligned} \quad (76)$$

где при $\nu \geq 1$

$$\rho_{\nu,1}(\sigma) = \sum_{m=1}^{\nu} \sum_{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_m=\nu} \binom{-\sigma}{m} r_{\mu_1,1} r_{\mu_2,1} \dots r_{\mu_m,1} \quad (77)$$

и

$$\rho_{0,1}(\sigma) \equiv 1. \quad (77')$$

Аналогично

$$z_{n,2}^{-\sigma} \sim (2\pi i)^{-\sigma} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\rho_{\nu,2}(\sigma)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{2\nu+\sigma}}, \quad (78)$$

где

$$\rho_{\nu,2}(\sigma) = \sum_{m=1}^{\nu} \sum_{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_m=\nu} \binom{-\sigma}{m} r_{\mu_1,2} r_{\mu_2,2} \dots r_{\mu_m,2}, \quad (79)$$

$$\rho_{0,2}(\sigma) \equiv 1. \quad (79')$$

Заметив ещё, что

$$z_{-n,1}^{-\sigma} = (-1)^{-\sigma} z_{n,1}^{-\sigma} \quad \text{и} \quad z_{-n,2}^{-\sigma} = (-1)^{-\sigma} z_{n,2}^{-\sigma},$$

рассмотрим функцию⁶

$$\begin{aligned} \Psi(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [z_{n,1}^{-\sigma}(1 + (-1)^{-\sigma}) + z_{n,2}^{-\sigma}(1 + (-1)^{-\sigma})] - \right. \\ \left. - (2\pi i)^{-\sigma} \left[\sum_{\nu=0}^k \frac{\rho_{\nu,1}(\sigma)}{n^{2\nu+\sigma}} (1 + (-1)^{-\sigma}) + \sum_{\nu=0}^k \frac{\rho_{\nu,2}(\sigma)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{2\nu+\sigma}} (1 + (-1)^{-\sigma}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (80)$$

В силу формул (76) и (78) общий член этого ряда есть $O\left(\frac{1}{n^{2k+2+\sigma}}\right)$ с константой, не зависящей от σ в каждой ограниченной области комплексной σ -плоскости⁷. Поэтому ряд (80) равномерно сходится при $\operatorname{Re} \sigma > -(2k+1)$ и в этой области представляет собой регулярную

⁶Штрих над знаком суммы означает, что выражения в первой квадратной скобке суммируются по всем корням $f(z)$, отличным от нуля. Выражения во второй квадратной скобке суммируются по всем натуральным n .

⁷В этом легко убедиться, записав остаток разложения $(1+z)^{-\sigma}$ по степеням z по формуле Тэйлора в интегральной форме.

функцию. Заметим теперь, что из формулы (80) с учетом (67) следует равенство

$$\begin{aligned} \Psi(\sigma) = & Z(\sigma) - (2\pi i)^{-\sigma} \sum_{\nu=0}^k \rho_{\nu,1}(\sigma)(1 + (-1)^{-\sigma})\zeta(2\nu + \sigma) - \\ & - (2\pi i)^{-\sigma} \sum_{\nu=0}^k \rho_{\nu,2}(\sigma)(1 + (-1)^{-\sigma})\zeta\left(2\nu + \sigma, \frac{1}{2}\right) + \\ & + (2\pi i)^{-\sigma} \sum_{\nu=0}^k \rho_{\nu,2}(\sigma)(1 + (-1)^{-\sigma})\left(\frac{1}{2}\right)^{-2\nu-\sigma}, \end{aligned} \quad (81)$$

где

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{и} \quad \zeta\left(\alpha, \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{\alpha}} \quad (82)$$

– дзета-функция Римана и обобщённая дзета-функция Римана [см., например, [9], с. 1087 – 1092]. Полагая в формулах (80) и (81) $\sigma = -2k$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [z_{n,1}^{2k} + z_{n,2}^{2k}] - (2\pi i)^{2k} (-1)^k \left[\sum_{\nu=0}^k \frac{\rho_{\nu,1}(-2k)}{n^{2\nu-2k}} + \sum_{\nu=0}^k \frac{\rho_{\nu,2}(-2k)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{2\nu-2k}} \right] \right\} = \\ = \frac{1}{2} \omega_{2k+1} + \frac{1}{2} (2\pi)^{2k} (-1)^k - (2\pi)^{2k} (-1)^k \sum_{\nu=0}^k \rho_{\nu,2}(-2k) \zeta\left(2\nu - 2k, \frac{1}{2}\right) - \\ - (2\pi)^{2k} (-1)^k \sum_{\nu=0}^k \rho_{\nu,2}(-2k) 2^{2\nu-2k}. \end{aligned} \quad (83)$$

Мы учли здесь равенство (65)

$$Z(-2k) = \omega_{2k+1},$$

а также известные значения дзета-функции Римана в точках $2s$ ($s = 0, -1, -2, \dots$).

Прежде чем формулировать окончательный результат, покажем, что штрих в формуле (83) можно отбросить, если, однако, условиться нумеровать с учётом кратности и нулевые корни $f(z)$ (напомним, что нумерация корней $z_{n,1}$ и $z_{n,2}$ функции $f(z)$ согласована с асимптотическими формулами (59) и (59'); при таком способе нумерации может, вообще говоря, оказаться избыток или недостаток индексов в конечном числе).

Положим в формулах (80) и (81) $\sigma = 0$. Как легко проверить, выражение во второй квадратной скобке в формуле (80) при $\sigma = 0$ равно четырём:

$$\rho_{\nu,1}(0) = \rho_{\nu,2}(0) = \begin{cases} 0, & \text{при } \nu \geq 1, \\ 1, & \text{при } \nu = 0. \end{cases}$$

Поскольку при $\sigma = 0$ и первая квадратная скобка равна четырём (во всяком случае начиная с некоторого n), то число $-\Psi(0)$ равно избытку (или недостатку) индексов при принятом нами способе нумерации. С другой стороны, согласно формуле (81):

$$\Psi(0) = Z(0) - 2 \left[\zeta(0) + \zeta \left(0, \frac{1}{2} \right) - 1 \right].$$

Поскольку, далее, в силу (66) и (73), $Z(0) = -3 - s$, а $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, $\zeta \left(0, \frac{1}{2} \right) = 0$, то $-\Psi(0) = s$, где s – кратность корня $z = 0$. Это обстоятельство и позволяет отбросить знак штриха в формуле (83) и нумеровать корни в порядке возрастания модуля. К тому же заключению можно прийти, применяя теорему Руше к функции $f(z)$ (см. (44)).

Умножив теперь обе части (83) на $\left(\frac{i}{\alpha R} \right)$ [см. формулу (4'')], мы придем к следующему результату.

Теорема. Пусть

$$c_{1,1}; c_{1,2}; c_{2,1}; c_{2,2}; \dots; c_{n,1}; c_{n,2}; \dots \quad (84)$$

– занумерованные в порядке возрастания модуля собственные значения задачи (1)–(2); тогда при любом целом $k \geq 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[c_{n,1}^k - \frac{(2\pi)^{2k} (-i)^k}{(\alpha R)^k} \sum_{\nu=0}^k \frac{\rho_{\nu,1}(-2k)}{n^{2\nu-2k}} \right] + \right. \\ & \left. + \left[c_{n,2}^k - \frac{(2\pi)^{2k} (-i)^k}{(\alpha R)^k} \sum_{\nu=0}^k \frac{\rho_{\nu,2}(-2k)}{(n + 1/2)^{2\nu-2k}} \right] \right\} = \\ & = \frac{(i)^k}{2(\alpha R)^k} \omega_{2k+1} + \frac{(2\pi)^{2k} (-i)^k}{2(\alpha R)^k} + \frac{(2\pi)^{2k} (-i)^k}{(\alpha R)^k} \sum_{\nu=0}^k \rho_{\nu,2}(-2k) 2^{2\nu-2k} - \end{aligned}$$

$$- \frac{(2\pi)^{2k}(-i)^k}{(\alpha R)^k} \sum_{\nu=0}^k \rho_{\nu,2}(-2k) \zeta\left(2\nu - 2k, \frac{1}{2}\right). \quad (85)$$

Определение входящих в эти формулы величин $\rho_{\nu,1}(-2k)$, $\rho_{\nu,2}(-2k)$ и ω_{2k+1} через коэффициенты уравнения (1) приводит к цепи операций (см. формулы (77), (79), (61), (55), (56), (74), (70), (72), (D1) – (D5), (10) и (12)). Все эти операции включают лишь умножение, сложение и интегрирование и легко могут быть запрограммированы.

Приведём один результат, следующий из формулы (85) и представляющий самостоятельный интерес. Положим в (85) $k = 1$.

Можно проверить, что числа $\rho_{0,1}(-2)$ и $\rho_{1,1}(-2)$ при условии (4) не зависят от $p(x)$. Если поэтому собственные значения (84) перенумеровать одним индексом c_λ ($\lambda = 1, 2, \dots$), а через λ_λ обозначить собственные значения задачи (1) с $p(x) \equiv 0$, то, вычитая из равенства (85) с $k = 1$ аналогичное равенство для λ_λ , мы найдем

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} (c_\lambda - \lambda_\lambda) = \frac{i}{2\alpha R} (\omega_{2k+1} - \tilde{\omega}_{2k+1}). \quad (86)$$

Используя выражение для ω_3 (см. D5), приходим к следующему равенству, справедливому при всех α и R :

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} (c_\lambda - \lambda_\lambda) = -\frac{3}{4}(p(1) + p(0)) + \frac{1}{\alpha \operatorname{sh} \alpha} \int_0^1 \operatorname{sh} \alpha(1-t) \operatorname{sh} \alpha t p''(t) dt. \quad (87)$$

Отделив здесь мнимые части, получаем:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} (\operatorname{Im} c_\lambda - \operatorname{Im} \lambda_\lambda) = 0. \quad (88)$$

Добавление

Приведём выражение для коэффициентов A_μ , $C_{2\mu+1}$, $B_{2\mu}$, фигурирующих в формулах (42) и (43):

$$A_\mu = -\frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \left\{ \sum_{k+2s=\mu-2} [a'_k(1) \cdot c_{2s,0}(1) - a_k(1) \cdot c'_{2s,0}(1)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k+2s=\mu-1} [a_k(1) \cdot c_{2s,0}(1) + a_k(1) \cdot c'_{2s,1}(1) - a'_k(1) \cdot c_{2s,1}(1)] + \\
& + \sum_{k+m+2s=\mu-2} (-1)^k [a'_k(0) \cdot a'_m(1) \cdot c_{2s,1}(1) - a'_k(0) \cdot a_m(1) \cdot c'_{2s,1}(1)] + \\
& + \sum_{k+m+2s=\mu-1} a'_k(0) \cdot a_m(1) (-1)^k \cdot c_{2s,1}(1) - \sum_{k+2s=\mu} a_k(1) \cdot c_{2s,1}(1) \Bigg\}, \quad (D1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2\mu+1} = & -\frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \left\{ 2 \sum_{k+m=2\mu-1} a_k(1) \cdot a'_m(1) (-1)^m - \right. \\
& - 2 \sum_{k+m=2\mu} a_k(1) \cdot a_m(1) (-1)^m - 2 \sum_{s+\sigma=\mu} [c_{2s,0}(1) \cdot c'_{2\sigma,1}(1) - c_{2s,1}(1) \cdot c'_{2\sigma,0}(1)] - \\
& \left. - 2 \sum_{\tau+s+\sigma=\mu-1} a'_{2\tau+1}(0) [c_{2s,0}(1) \cdot c'_{2\sigma,1}(1) - c_{2s,1}(1) \cdot c'_{2\sigma,0}(1)] \right\}, \quad (D2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{2\mu} = & 5a'_{2\mu-1}(0) + 4a''_{2\mu-2}(0) + a'''_{2\mu-3}(0) - c''_{2\mu-2,0}(0) - c'''_{2\mu-2,1}(0) + \\
& + \sum_{s+\sigma=\mu-2} [3c''_{2\sigma,1}(0) \cdot a''_{2s+1}(0) + c''_{2\sigma,1}(0) \cdot a'''_{2s}(0) - 3c'''_{2\sigma,1}(0) \cdot a'_{2s+1}(0) + \\
& + c'''_{2\sigma,1}(0) \cdot a''_{2s}(0) - 3c''_{2\sigma,0}(0) (a'_{2s+1}(0) + a''_{2s}(0)) + 2c'''_{2\sigma,0}(0) \cdot a'_{2s}(0) + \\
& + c''_{2s,0}(0) \cdot c'''_{2\sigma,1}(0) - c''_{2s,1}(0) \cdot c'''_{2\sigma,0}(0)] + \sum_{k+\lambda=2\mu-4} [3a''_k(0) \cdot a''_{\lambda}(0) (-1)^{\lambda} - \\
& - 2a'_k(0) \cdot a'''_{\lambda}(0) (-1)^{\lambda}] + \sum_{s+\sigma=\mu-3} [c'''_{2\sigma,0}(0) \cdot a''_{2s+1}(0) - c''_{2\sigma,0}(0) \cdot a'''_{2s+1}(0)] - \\
& - 6 \sum_{k+\lambda=2\mu-2} a'_k(0) \cdot a'_{\lambda}(0) (-1)^{\lambda} - 3 \sum_{k+\lambda=2\mu-3} a'_k(0) \cdot a''_{\lambda}(0) (-1)^{\lambda} - \\
& - \sum_{k+\lambda=2\mu-5} a''_k(0) \cdot a'''_{\lambda}(0) (-1)^{\lambda} + 2 \sum_{s+\sigma=\mu-1} c''_{2\sigma,1}(0) \cdot a'_{2s}(0) + \\
& + 3 \sum_{2\sigma+k+\lambda=2\mu-3} c''_{2\sigma,1}(0) \cdot a'_k(0) \cdot a'_{\lambda}(0) (-1)^{\lambda} + \sum_{2\sigma+k+\lambda=2\mu-4} [2c'''_{2\sigma,1}(0) \cdot a'_k(0) \times \\
& \times a'_{\lambda}(0) (-1)^{\lambda} - 3c''_{2\sigma,1}(0) \cdot a'_k(0) \cdot a''_{\lambda}(0) (-1)^{\lambda}] + \\
& + \sum_{2\sigma+k+\lambda=2\mu-5} [c''_{2\sigma,1}(0) \cdot a'_k(0) \cdot a'''_{\lambda}(0) (-1)^{\lambda} - c'''_{2\sigma,1}(0) \cdot a'_k(0) \cdot a''_{\lambda}(0) (-1)^{\lambda}] +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{s+\sigma+\tau=\mu-3} a'_{2\tau+1}(0) [c''_{2s,0}(0) \cdot c'''_{2\sigma,1}(0) - c''_{2s,1}(0) \cdot c'''_{2\sigma,0}(0)]. \quad (D3)$$

Приведём, кроме того, выражение для первых коэффициентов непосредственно через коэффициенты уравнения (5). Этими выражениями мы воспользовались при выводе равенств (87) и (88):

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \operatorname{cth} \alpha, \\ A_2 = \frac{3}{4}r(1) - \frac{7}{4}r(0) + 2\alpha^2 + \frac{1}{\alpha \cdot \operatorname{sh} \alpha} \int_0^1 \operatorname{sh} \alpha(1-t) \operatorname{sh} \alpha t q(t) dt, \dots,$$

$$C_1 = \frac{4\alpha}{\operatorname{sh} \alpha}, \dots, \quad B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{5}{2}r(0), \dots, \quad (D4)$$

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = -3, \quad \omega_2 = -\left(\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \operatorname{cth} \alpha\right), \quad \omega_3 = A_1^2 - 2(A_2 - B_2) = \\ = \left(\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \operatorname{cth} \alpha\right)^2 - 2 \left[\frac{3}{4}(r(0) + r(1)) + \frac{3}{2}\alpha^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha \operatorname{sh} \alpha} \int_0^1 \operatorname{sh} \alpha(1-t) \operatorname{sh} \alpha t q(t) dt \right], \dots \quad (D5)$$

Литература

1. Линь Цзя-цзяо Теория гидродинамической устойчивости, М., ИИЛ, 1958.
2. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка, Докл. АН СССР, т. 88, N 4 (1953), 593–596.
3. Гельфанд И.М. О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка, Успехи матем. наук, 11, вып. 1 (1956), 191.
4. Дикий Л.А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля, Успехи матем. наук, 13, вып. 3(1958), 111–143.
5. Лидский В.В., Садовничий В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций, Функциональный анализ и его приложения, 1967, 52–59.
6. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917.

7. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы, М., Гостехиздат.
8. *Лидский В.Б., Садовничий В.А.* Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций, Матем. сб., 75 (117) (1968), 568–566.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Гостехиздат, 1962.