

УДК 517.5

Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций¹

В. Б. Лидский, В. А. Садовничий

В статье [1] был введен класс K целых функций $f(z)$, допускающих представление²

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z} P_k(z), \quad (1)$$

где $P_k(z)$ разлагаются в асимптотические ряды при $z \rightarrow \infty$:

$$P_k(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu}^{(k)} \cdot z^{-\nu}, \quad \beta_0^{(k)} \neq 0. \quad (2)$$

Функции вида (1) используются при рассмотрении краевых задач для дифференциальных уравнений со спектральным параметром z .

Пусть P — выпуклая оболочка точек

$$\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{r-1}, \bar{\alpha}_r, \dots, \bar{\alpha}_{N-1}. \quad (3)$$

P в общем случае — r -угольник, $r \leq N$. Для определенности предположим, что вершинами многоугольника P являются первые r точек множества (3), нумерация которых возрастает при обходе границы P по часовой стрелке. Множество корней z_1 целой функции (1) распадается на r серий, расположенных при $|z_1| > R$ в секторах $T_0, T_1, \dots, T_s, \dots, T_{r-1}$, заштрихованных на рис. 1. В (1) была введена дзета-функция, связанная с множеством всех корней функции $f(z)$

$$Z(\sigma) = \sum_{(l)} z_l^{-\sigma}, \quad (4)$$

¹Мат. сборник, №4, т. 75(117), 1968. с. 558–566.

²Полное определение класса K см. в [1]

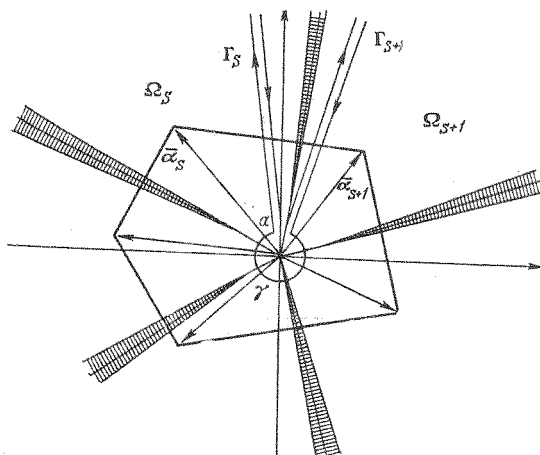


Рис. 1

которая, как было показано, является *целой*. В настоящей статье рассматривается дзета-функция, связанная лишь с некоторой серией корней $z_{n,s}$, расположенной в одном из секторов T_s ;

$$\zeta_s(\sigma) = \sum_{(n)} z_{n,s}^{-\sigma}. \quad (5)$$

Функция (5) оказывается мероморфной с простыми полюсами в точках $\sigma = 1, 0, -1, -2, \dots$. Вычеты функции $\zeta_s(\sigma)$ удается найти. Изучение функции $\zeta(\sigma)$ позволяет получить рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения корней в асимптотический ряд. Отметим, что в частном случае, когда $z_{n,s}$ — собственные числа задачи Штурма—Лиувилля, аналогичные рекуррентные формулы были указаны Л. А. Диким [2].

§ 1. Функция $\zeta_0(\sigma)$

Рассмотрим сначала две функции³

$$Z_s(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (6)$$

³Функции $Z_s(\sigma)$ и $Z_{s+1}^{(s)}(\sigma)$ первоначально определяются при $\operatorname{Re} \sigma > 1$ посредством формул (6) и (7), а затем аналитически продолжаются на всю σ -плоскость.

$$Z_{s+1}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{s+1}} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (7)$$

где контуры Γ_s и Γ_{s+1} изображены на рис 1. Каждый из контуров состоит из дважды проходимого луча и окружности γ достаточно малого радиуса с центром в нуле. Аргументы лучей мы обозначим через φ_s и φ_{s+1} соответственно. Лучи имеют общее начало—точку $a \in \gamma$. Очевидно, можно считать, что все корни функции $f(z)$, кроме, быть может, корня $z = 0$, лежат вне контуров Γ_s и Γ_{s+1} . Функции $z^{-\sigma}$ в (6) и (7) выбраны вещественными при $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Im} \sigma = 0$ и аналитическими —вне соответствующих контуров. Как показано в [1], функции (6) и (7) являются целыми и при этом

$$Z_s - (k) = \omega_{k+1}^{(s)} \quad (-k = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

где $\omega_{k+1}^{(s)}$ — коэффициенты асимптотического разложения

$$\alpha_s + \frac{P'(z)}{P_s(z)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k^{(s)}}{z^k}. \quad (9)$$

Отметим еще, что как следует из [1] (см. в [1, формулу (19)]).

$$Z_s(1) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{z f(z)} dz + \omega_0^{(s)}. \quad (10)$$

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$\zeta_s(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (11)$$

где интеграл берется по верхним берегам разрезв Γ_s и Γ_{s+1} с сохранением указанного на рис 1 направления интегрирования (контур C_s). Функция $z^{-\sigma}$ в (11) берется по-прежнему вещественной при $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Im} \sigma = 0$ и аналитической вне разреза Γ_s . Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. При $\operatorname{Re} \sigma > 1$

$$\zeta_s(\sigma) = \sum_{(n)} z_{n,s}^{-\sigma}, \quad (12)$$

где сумма взята по всем корням функции $f(z)$, расположенным внутри контура C_s .

Доказательство этой леммы проводится так же, как и леммы 2 в работе [1].

Установим теперь следующее предложение.

ЛЕММА 2. *Справедливо тождество*

$$\zeta(\sigma) = \frac{Z_{s+1}(\sigma) - Z_s(\sigma)}{e^{2\pi i \sigma} - 1} \quad (13)$$

и, следовательно, $\zeta_s(\sigma)$ продолжается аналитически во всю плоскость как мероморфная функция с полюсами в точках

$$\sigma = i, 0, -1, -2, \dots \quad (14)$$

при этом

$$\operatorname{Res} \zeta_s(\sigma)|_{\sigma=-k} = \frac{\omega_{k+1}^{(s+1)} - \omega_{k+1}^{(s)}}{2\pi i}. \quad (15)$$

Для доказательства формулы (13) заметим, что при $\operatorname{Re} \sigma > 1$

$$\begin{aligned} Z_{k+1}(\sigma) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\infty e^{i\varphi_{s+1}}}^a z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_a^{\infty e^{i\varphi_{s+1}}} e^{i2\pi\sigma} \cdot z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \right. \\ &+ \oint_{\gamma} z^{-\sigma} \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} (e^{i2\pi\sigma} - 1) \cdot \int_a^{\infty e^{i\varphi_{s+1}}} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \\ &\left. + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \right. \quad (16) \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$Z_s(\sigma) = -\frac{1}{2\pi i} (e^{i2\pi\sigma} - 1) \int_{\infty e^{i\varphi_s}}^a z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dx. \quad (17)$$

Вычитая из равенства (16) равенство (17), получаем тождество (13). Значения вычетов функции $\zeta(\sigma)$ при $\sigma = 1, 0, -1, \dots$ находятся из формул (13), (8) и (10). Наконец, регулярность функции $\zeta(\sigma)$ при $\sigma = 2, 3, \dots$ следует из равномерной сходимости ряда (12) при $\operatorname{Re} \sigma > 1 + \varepsilon$. В этом можно также убедиться, заметив, что значения $Z_{s+1}(\sigma)$ и $Z_s(\sigma)$ при $\sigma = 2, 3, \dots$ совпадают (см. [1, формула (20)]).

§ 2. Асимптотические ряды для $z_{n,s}$

Предположим, что на стороне $[\bar{\alpha}_s, \bar{\alpha}_{s+1}]$ многоугольника P отсутствуют другие точки множества (3), кроме концов. В этом случае для отыскания корней $z_{n,s}$ следовало бы решать уравнение

$$e^{(\alpha_{s+1}-\alpha_s)z} = Q_s(z), \quad (18)$$

где в правой части стоит аналитическая в секторе T_s при $|z| > R$ функция, разлагающаяся в асимптотический ряд

$$Q_s(z) \sim -\frac{P_s(z)}{P_{s+1}(z)} = z^{n_s-n_{s+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu}^{(s)} z^{-\nu}, \quad \gamma_0^{(s)} \neq 0. \quad (19)$$

Как показано в работе Хорна [3], корни $z_{n,s}$ уравнения вида (18) допускают разложение в асимптотический ряд следующего вида⁴ ($n \rightarrow +\infty$)

$$z_n \sim an \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k(\ln n)}{n^k} \right\} \quad (a \neq 0), \quad (20)$$

где

$$R_k(\ln n) = \sum_{l=0}^k r_l^k \ln^l n, \quad (21)$$

r_l^k ($0 \leq l \leq k$) — некоторые числа⁵

В нашем случае нетрудно непосредственно найти первые коэффициенты разложения (20):

$$a = \frac{2\pi i}{\alpha_{s+1} - \alpha_s}, \quad r_1^1 = \frac{n_s - n_{s+1}}{2\pi i}, \quad (22)$$

$$r_0^1 = \frac{1}{2\pi i} \left[(n_s - n_{s+1}) \ln a + \ln \left(-\frac{\beta_0^{(s)}}{\beta_0^{(s+1)}} \right) \right]. \quad (23)$$

Заметим, что в формуле (23) могут быть взяты произвольные значения логарифмов. Это обстоятельство приводит к тому, что член асимптотического ряда (20), не содержащий n , как это обычно бывает при разложении по целочисленному параметру, определен с точностью до целого числа. Отыскание коэффициентов r_l^k ряда (20) с

⁴Мы опускаем индекс s в формуле (20).

⁵При этом $r_k^k = 0$, если $k > 1$.

индексами $k > 1$ методом последовательных приближений приводит к сложным выкладкам. Ниже показывается, что для этих коэффициентов могут быть выписаны рекуррентные соотношения, при выводе которых используются установленные в леммах 1 и 2 свойства дзета-функции (11).

§ 3. Рекуррентные формулы

Возведя обе части разложения (20) в степень $-\sigma$, получим формально

$$\begin{aligned} z_n^{-\sigma} \sim a^{-\sigma} n^{-\sigma} \left\{ 1 + \binom{-\sigma}{1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{R_p(\ln n)}{n^p} + \right. \\ \left. + \binom{-\sigma}{2} \sum_{p=2}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2=p} R_{k_1} R_{k_2} \right) \frac{1}{n^p} + \dots \right. \\ \left. \dots + \binom{-\sigma}{m} \sum_{p=m}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\dots+k_m=p} R_{k_1} \dots R_{k_m} \right) \frac{1}{n^p} + \dots \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

где

$$R_{k_1} R_{k_2} \dots R_{k_m} = \sum_{\substack{0 \leq l_i \leq k_i \\ i=1,2,\dots,m}} r_{l_1}^{k_1} \cdot r_{l_2}^{k_2} \dots r_{l_m}^{k_m}. \quad (25)$$

Ряд (24) является асимптотическим при $n \rightarrow \infty$, а именно, при любом целом N и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} z_n^{-\sigma} - a^{-\sigma} n^{-\sigma} - \sum_{m=1}^N a^{-\sigma} n^{-\sigma} \binom{-\sigma}{m} \sum_{p=m}^N \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \times \\ \times \left[\sum_{\substack{0 \leq l_i \leq k_i \\ i=1,2,\dots,m}} r_{l_1}^{k_1} \cdot r_{l_2}^{k_2} \dots r_{l_m}^{k_m} (\ln n)^{l_1+l_2+\dots+l_m} \right] \cdot \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{(\ln n)^N}{n^{N+1+\sigma}}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

причем постоянная в O -члене равномерно ограничена по σ в любой ограниченной области σ -плоскости. В справедливости формулы (26) легко убедиться, написав в формуле Тейлора для $(1+u)^{-\sigma}$ остаточный член в интегральной форме.

Замечая далее, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\sigma} n}{n^{\sigma}} = \zeta^{(q)}(\sigma)(-1)^{\sigma}, \quad (27)$$

где $\zeta(\sigma)$ — дзета-функция Римана, просуммируем обе части формулы (26) по n . В результате придем к заключению, что функция

$$\begin{aligned} \psi_N(\sigma) = & \zeta(\sigma) - a^{-\sigma} \zeta(\sigma) - a^{-\sigma} \binom{-\sigma}{1} \sum_{p=1}^N \sum_{l=0}^p r_l^p \zeta^{(l)}(p+\sigma)(-1)^l - \\ & - \sum_{m=2}^N a^{-\sigma} \binom{-\sigma}{m} \sum_{p=m}^N \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \sum_{\substack{0 \leq l_i \leq k_i \\ i=1,2,\dots,m}} (-1)^{l_1+\dots+l_m} r_{l_1}^{k_1} \dots r_{l_m}^{k_m} \zeta_{p+\sigma}^{(l_1+\dots+l_m)} \end{aligned} \quad (28)$$

регулярна при $\operatorname{Re} \sigma > -N$, поскольку ряд из правых частей в (26) сходится равномерно. В то же время слагаемые в правой части формулы (28) имеют полюса в точках $\sigma = 1, 0, -1, -2, \dots$. Приравняв нулю главные части лорановских разложений, мы получим искомые рекуррентные соотношения. Для наших целей достаточно ограничиться главными частями при $\sigma = -k$ ($k \geq 1$).

Заметим, что с точностью до регулярных членов

$$\zeta^{(l)}(p+\sigma) = \frac{l!(-1)^l}{(p+\sigma-1)^{1+l}}, \quad (29)$$

поэтому особенности при $\sigma = -k$ ($k \geq 1$) в правой части формулы (28) имеют лишь функции $\zeta_s(\sigma)$ (см. (15)) и те члены, которым соответствует индекс $p = k+1$. Следовательно, с точностью до функции, регулярных в окрестности $\sigma = -k$,

$$\begin{aligned} & a^{-\sigma} \binom{-\sigma}{1} \sum_{l=0}^{k+1} r_l^{k+1} \frac{l!}{(k+\sigma)^{1+l}} = \zeta_s(\sigma) - \\ & - \sum_{m=2}^{k+1} a^{-\sigma} \binom{-\sigma}{m} \sum_{k_1+\dots+k_m=k+1} \sum_{\substack{0 \leq l_i \leq k_i \\ i=1,2,\dots,m}} r_{l_1}^{k_1} \dots r_{l_m}^{k_m} \frac{(l_1+\dots+l_m)!}{(k+\sigma)^{1+l_1+\dots+l_m}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Так как $k_i \geq 1$ и $k_1 + k_2 + \dots + k_m = k+1$, то в правые части формулы (30) входят коэффициенты $r_{l_i}^{k_i}$, верхние индексы которых

не больше k . Это обстоятельство и позволяет выразить r_l^{k+1} через коэффициенты $r_{l_i}^{k_i}$ с $k_i \leq k$.

Введем многочлены

$$b_m(\sigma) = \frac{1}{m!}(\sigma+1)(\sigma+2)\dots(\sigma+m-1)(-1)^{m-1} \quad (31)$$

и положим

$$b_m(\sigma) = \sum_{\tau=0}^{m-1} \beta_{m,k}^{\tau}(\sigma+k)^{\tau}. \quad (32)$$

Если теперь обе части равенства (30) разложить на $a^{-\sigma}(-\sigma)$ и учесть, что $\binom{-\sigma}{m} \frac{1}{-\sigma} = b_m(\sigma)$, то, приравняв в (30) коэффициенты при $(k+\sigma)^{-1-l}$, получим следующую формулу

$$r_l^{k+1} = -\frac{1}{l!} \sum_{m=2}^{k+1} \sum_{\tau=0}^{m-1} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=k+1 \\ k_i \geq 1}} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_m=\tau=l \\ 0 \leq l_i \leq k_i}} \beta_{m,k}^{\tau} \cdot r_{l_1}^{k_1} \dots r_{l_m}^{k_m} (l+\tau)l, \quad (33)$$

если $l \neq 0$; при $l = 0$ к сумме в правой части формулы (33) следует добавить

$$\operatorname{Res} \frac{a^{\sigma}}{(-\sigma)} \zeta_s(\sigma)|_{\sigma=-k} = \frac{a^{-k}}{k} \cdot \frac{\omega_{k+1}^{(s+1)} - \omega_{k+1}^{(s)}}{2\pi i}. \quad (33')$$

Формулы (33) и составляют цель настоящего параграфа.

Сделаем в связи с ними несколько замечаний.

а) Проверим сначала, что в силу (33)

$$r_{k+1}^{k+1} = 0 \quad (k \geq 1). \quad (34)$$

В самом деле, если $l = k+1$ в (33), то $\tau = 0$ и $l_i = k_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Поэтому, согласно (33),

$$r_{k+1}^{k+1} = - \sum_{m=2}^{k+1} \sum_{k_1+\dots+k_m=k+1} \beta_{m,k}^0 r_{k_1}^{k_1} \dots r_{k_m}^{k_m}. \quad (35)$$

Пусть сначала $k = 1$. Тогда, согласно (35)

$$r_2^2 = - \sum_{k_1+k_2} \beta_{2,k}^0 r_{k_1}^{k_1} r_{k_2}^{k_2} = 0,$$

ибо $\beta_{2,k}^0 = b_2(\sigma)|_{\sigma=-1} = 0$. Если поэтому предположить по индукции, что $r_{k_i}^{k_i} = 0$ при всех $2 \leq k_i \leq k$, то в правой части формулы (35) остается лишь одно слагаемое с $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 1$, но при этом, очевидно, $m = k + 1$ и, следовательно,

$$r_{k+1}^{k+1} = -\beta_{k+1,k}^0 (r_1^1)^{k+1} = 0, \quad (36)$$

ибо

$$\beta_{k+1,k}^0 = b_{k+1}(\sigma)|_{\sigma=-k} = 0.$$

б) Установим теперь следующую формулу для коэффициентов при старших членах в (21)⁶

$$r_k^{k+1} = \frac{1}{k} (-1)^{k+1} (r_1^1)^{k+1} \quad (k \geq 1). \quad (37)$$

Полагая в (33) $l = k$, легко заключаем, что

$$\begin{aligned} r_k^{k+1} = & -(k+1) \sum_{m=2}^{k+1} \sum_{k_1 + \dots + k_m = k+1} \beta_{k+1,k}^1 \cdot r_{k_1}^{k_1} \dots r_{k_m}^{k_m} - \\ & - \sum_{m=2}^{k+1} \sum_{k_1 + \dots + k_m = k+1} \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_m = k \\ 0 \leq l_i \leq k}} \beta_{m,k}^0 r_{l_1}^{k_1} \dots r_{l_m}^{k_m}. \end{aligned} \quad (38)$$

В первой сумме, согласно (34), следует положить $k_1 = \dots = k_m = 1$ и $m = k + 1$, после чего она оказывается равной $\frac{1}{k} (r_1^1)^{k+1}$. Во второй сумме отличными от нуля, в силу (34), будут лишь те слагаемые, в которых $l_1 = l_2 = \dots = l_{i-1} = l_{i+1} = \dots = l_m = 1$, $l_i = k - m + 1$.

Учитывая, что число таких выборов равно m , а также равенство $\beta_{m,k}^0 = \frac{1}{k} \binom{k}{m}$, найдем, что вторая сумма в (38) равна

$$-\frac{1}{k} \sum_{m=1}^k m \binom{k}{m} (r_1^1)^{m-1} \cdot r_{k-m+1}^{k-m+2}$$

следовательно,

$$r_k^{k+1} = \frac{1}{k} \left\{ (r_1^1)^{k+1} - \sum_{m=2}^k m \binom{k}{m} (r_1^1)^{m-1} \cdot r_{k-m+1}^{k-m+2} \right\}. \quad (39)$$

⁶ Другим путем эта формула была доказана А. О. Кравицким

Из (39) равенство (37) следует по индукции. Соответствующие элементарные рассуждения мы опускаем.

в) Пусть, наконец, в формуле (22)

$$r_1^1 = 0. \quad (40)$$

Это, очевидно, имеет место, если в (2) $n_{s+1} = n_s$. Тогда из формулы (33) следует, что

$$r_l^{k+1} = 0 \quad (41)$$

при всех $k \geq 1$ и $l \neq 0$.

Действительно, в каждое слагаемое правой части формулы (33) при $l \neq 0$ входят множители с индексом $l_i \neq 0$ поскольку $l_1 + l_2 + \dots + l_m - \tau = l > 0$. Поэтому формула (41) немедленно устанавливается по индукции.

Таким образом, при условии (40), наряду с формулой (41), мы получаем следующую рекуррентную формулу:

$$r_0^{k+1} = - \sum_{m+2}^k \sum_{k_1+\dots+k_m=k+1} \frac{1}{k} \binom{k}{m} r_0^{k_1} \cdot r_0^{k_2} \dots r_0^{k_m} + \\ + \frac{a^{-k}}{k} \cdot \frac{\omega_{k+1}^{s+1} - \omega_{k+1}^{(s)}}{2\pi i} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (42)$$

г) Рассмотрим уравнение

$$e^{cz} = Q(z). \quad (43)$$

где функция $Q(z)$ при $|z| > R$ аналитична в спектре с биссектрисой, параллельной вектору $a = \frac{2\pi i}{c}$. Пусть $Q(z)$ разлагается в этой области в асимптотический ряд

$$Q(z) \sim z^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu} z^{-\nu}, \quad \gamma_0 \neq 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (44)$$

Как указывалось выше, согласно теореме Хорна, для корней уравнения (44) справедлива асимптотическая формула (20).

Оказывается, что и в этом общем случае имеют место рекуррентные соотношения (33), а при $m = 0$ соотношение (42).

Действительно, из метода последовательных приближений следует, что конечное число первых коэффициентов ряда (20) определяется лишь первыми коэффициентами ряда (44). Поэтому, если иметь

в виду коэффициенты ряда (20), то уравнение (43) можно заменить уравнением

$$e^{cz} = z^m \sum_{\nu=0}^N \gamma_{\nu} z^{-\nu} \quad (45)$$

с достаточно большим числом N . Корни уравнения (45) совпадают с корнями целой функции

$$f(z) = z^{N-m} e^{cz} - \sum_{\nu=0}^N \gamma_{\nu} z^{N-\nu}$$

рассмотренного нами класса, и, следовательно, рекуррентные соотношения (33), действительно, имеют место. Остается добавить, что свободные члены (см. (33)) при этом имеют вид

$$-\frac{a^{-k}}{k} \cdot \frac{\delta_{k+1}}{2\pi i}, \quad (46)$$

где δ_k — коэффициенты ряда

$$\frac{Q'(z)}{Q(z)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_k}{z^k}. \quad (47)$$

Литература

1. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций, Функц. анализ, **1**, (1967), № 2 С. 52—59.
2. Диккий Л. А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля. Успехи матем. наук, **ХІІІ**, **3(81)** (1958), С. 111—143.
3. *Horn I.* Verwendung asymptotischer Darstellungen, Math. Ann, **49** (1897), P. 473—496.
4. Кравицкий А. О. О двукратном разложении в ряд по собственным функциям одной несамосопряженной краевой задачи (автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук), Москва, 1967.