

УДК 517.43

О некоторых тождествах для собственных чисел сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов. Соотношения для нулей функций Бесселя¹

В. А. Садовничий

Тождества для собственных чисел операторов, о которых пойдет речь, являются естественным обобщением понятия следа для матриц. Для регулярных обыкновенных дифференциальных операторов впервые такие тождества были доказаны в статье [1], которая явилась началом целой серии работ, посвященных этому вопросу. Наиболее общие результаты для регулярных обыкновенных дифференциальных операторов получены в публикации [2]. В ней предложен метод, позволяющий вычислять регуляризованные следы (суммы собственных значений, из которых вычтены выражения, делающие эти ряды сходящимися) для широкого класса задач на отрезке; коэффициенты уравнений и граничных условий при этом могли аналитическим образом зависеть от спектрального параметра.

Для сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов с дискретным спектром задача получения регуляризованных следов гораздо труднее, что объясняется прежде всего сложной асимптотикой собственных функций. Нам известны исследования [3, 4] и [5], относящиеся к этой проблеме. В них к сингулярному дифференциальному оператору с дискретным спектром на оси (полуоси) добавлено возмущение, вычислен след разности между возмущенным и невозмущенным операторами; при этом существенным образом использована асимптотика некоторого "среднего" для собственных функций, а именно асимптотика спектральной функции.

Тождества, доказанные в настоящей статье, не относятся непосредственно к теории возмущения. Они основаны на асимптотике инди-

¹Вестник МГУ, сер. 1, матем., мех., № 3, 1971. с. 77–86

видуальной собственной функции, поэтому приходится существенно ограничивать класс рассматриваемых операторов.

Мы рассматриваем сингулярный обыкновенный дифференциальный оператор на отрезке вида

$$-y'' + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} y + p(x) y = \lambda y \quad (1)$$

($p(x)$ предполагается достаточно гладкой, финитной в окрестности нуля и не имеющей особенностей), находим асимптотику собственных чисел одного из самосопряженных расширений (а именно $y(\pi) = 0$) — минимального оператора, заданного операцией (1), и затем вычисляем суммы вида $\sum_n [\lambda_n^k - f^k(n)]$, $k = 0, 1, \dots$, где $f^k(n)$ — выражение, делающее написанные ряды сходящимися. Если положить в этих формулах $p(x) \equiv 0$, то получаются некоторые новые соотношения для нулей функций Бесселя, которые по-видимому, можно использовать в качестве способа приближенного вычисления этих нулей.

Интересен еще один эффект, проявляющийся в этих формулах. Уравнение (1) можно записать в форме

$$-y'' + q(x) y = \lambda y, \quad q(x) = \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + p(x).$$

Если бы оператор такого вида рассматривался на отрезке и с функцией $q(x)$, не имеющей особенностей, то первое из упомянутых тождеств выглядело бы так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx \right) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx = -\frac{q(0) + g(\pi)}{4}.$$

В нашем случае $q(x)$ имеет особенность и, например, интеграл от нее не существует.

Оказывается, что в наших формулах данный интеграл "регуляризуется" и уже в знакомом нам смысле — в смысле регуляризации при рассмотрении функционала x^λ ; значение $q(x)$ в нуле полагается равным нулю.

§ 1. Вспомогательные предложения

Прежде чем приступить к доказательству тождеств для собственных чисел, необходимо получить сопряженное расширение соответ-

ствующего уравнению (1) оператора L_0 , затем выяснить природу спектра и, если он окажется дискретным, получить точную его асимптотику. Дальнейшее сводится к изучению функции Вейля задачи. Всюду для упрощения изложения предположим, что $\nu \geq 1$.

ЛЕММА 1. *Индексы дефекта оператора L_0 есть (2,2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, в случае одного сингулярного конца индексы L_0 могут либо (2,2) либо (1,1). Для того чтобы доказать, что имеем случай точки Вейля, надо выяснить, что из двух линейно независимых решений уравнения (1) только одно лежит в $L_2[0, \pi]$. Пусть

$$-y'' + \left\{ \lambda - \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) x^{-2} \right\} y = f(x). \quad (2)$$

Общее решение уравнения запишем в виде

$$y(x) = c_1 \sqrt{x} I_\nu(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sqrt{x} Y_\nu(\sqrt{\lambda} x) - \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \{I_\nu(\sqrt{\lambda} x) Y_\nu(\sqrt{\lambda} \xi) - Y_\nu(\sqrt{\lambda} x) I_\nu(\sqrt{\lambda} \xi)\} f(\xi) y(\xi) d\xi. \quad (3)$$

(Здесь $I_\nu(\sqrt{\lambda} x)$, $Y_\nu(\sqrt{\lambda} x)$ — функции Бесселя первого и второго родов). Поэтому, записав уравнение (1) в виде (2), получим ограниченное в нуле решение, выбрав $c_2 \equiv 0$, $c_1 = (\sqrt{\lambda})^{-\nu}$. Обозначив это решение через $y_1(x, \lambda)$, запишем

$$y_1(x, \lambda) = \sqrt{x} \cdot I_\nu(sx) s^{-\nu} - \frac{\pi}{2} \int_0^x \{I_\nu(sx) Y_\nu(s\xi) - Y_\nu(sx) I_\nu(s\xi)\} \sqrt{x} \sqrt{\xi} p(\xi) y_1(\xi, \lambda) d\xi \quad (4)$$

(здесь $\sqrt{\lambda} = s$: сразу зафиксируем ветвь корня из условия, что s положительно для положительных λ). Пусть

$$y_1^0(x, \lambda) = \sqrt{x} I_\nu(sx) \cdot s^{-\nu},$$

и пусть для $n = 1, 2, \dots$

$$y_1^n = y_1^0 - \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \{I_\nu(sx) Y_\nu(s\xi) - Y_\nu(sx) I_\nu(s\xi)\} \sqrt{x} \sqrt{\xi} p(\xi) y_1^{n-1}(\xi, \lambda) d\xi.$$

Поскольку из асимптотики функции Бесселя следует, что $|y_1^0| \leq Ax^{\nu+\frac{1}{2}}$, $p(x) \leq B$ в каждом конечном интервале, а при $0 < \xi \leq x$

$$\frac{1}{2}\pi|I_\nu(sx)Y_\nu(s\xi) - Y_\nu(s\xi)I_\nu(sx)| \leq C\left(\frac{x}{\xi}\right)^\nu,$$

то получим

$$|y_1^1 - y_1^0| \leq A \cdot B \cdot C \cdot \int_0^x x^{\nu+\frac{1}{2}} \cdot \xi^{-\nu+\frac{1}{2}} \cdot \xi^{\nu+\frac{1}{2}} d\xi = A \cdot B \cdot C \cdot x^{\nu+\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Предположив, что

$$|y_1^n - y_1^{n-1}| \leq \frac{A \cdot B^n \cdot C^n \cdot x^{\nu+\frac{1}{2}} \cdot x^{2n}}{2^n \cdot n!},$$

найдем

$$\begin{aligned} |y_1^{n+1} - y_1^n| &\leq \frac{A \cdot B^{n+1} \cdot C^{n+1}}{2^n \cdot n!} \cdot \int_0^\pi x^{\nu+\frac{1}{2}} \cdot \xi^{-\nu+\frac{1}{2}} \cdot \xi^{2n} \cdot \xi^{\nu+\frac{1}{2}} d\xi = \\ &= \frac{A \cdot B^{n+1} \cdot C^{n+1} \cdot x^{\nu+\frac{1}{2}} \cdot x^{2n+2}}{2^n \cdot n! \cdot 2 \cdot (n+1)} = \frac{A \cdot B^{n+1} \cdot C^{n+1} x^{\nu+\frac{1}{2}} \cdot x^{2n+2}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенства верны для всех n , а, значит, ряд

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (y_1^{n+1} - y_1^n) + y_1^0$$

находится абсолютна для всех x .

Второе линейно зависимое решение, не ограниченное в нуле и не лежащее в $L_2[0, \pi]$, можно получить, выбрав c_1 и c_2 в интегральном уравнении (3) так, чтобы

$$\begin{aligned} y_2(x, \lambda) &= \sqrt{x} \cdot Y_\nu(sx) \cdot s^\nu + \\ &+ \frac{\pi}{2} \int_x^\pi \{I_\nu(sx)Y_\nu(s\xi) - I_\nu(s\xi)Y_\nu(sx)\} \sqrt{x} \sqrt{\xi} p(\xi) y_2(\xi, \lambda) d\xi. \end{aligned}$$

Прежде чем проводить итерации, надо ввести функцию $\tilde{y}_2(x, \lambda)$ по формуле $\tilde{y}_2 = y_2 \cdot x^{2\nu}$, после чего итерационный процесс проходит точно также, как в случае решения $y_1(x, \lambda)$ (фигурная скобка под интегралом оценивается через $C\left(\frac{\xi}{x}\right)^\nu$).

Полученные решения линейно независимы, их определитель Вронского отличен от нуля. Всюду в дальнейшем значение определителя Вронского $W(y_1, y_2)$ — символ ω . Заметим, что в нуле $y_2(x, \lambda) = O(x^{-\nu+\frac{1}{2}})$ и поэтому не принадлежит $L_2[0, \pi]$.

Таким образом лемма доказана. \square

СЛЕДСТВИЕ 1. Решение $y_1(x, \lambda)$ — целая функция по s и в силу четности по λ .

Выше мы доказали, что индексы дефекта оператора L_0 порожденного операцией (1) при $\nu \geq 1$, суть (2, 2). Значит, всякое его самосопряженное расширение определится краевым условием на правом конце. Выберем это условие таким: $y(\pi) = 0$. Оператор, заданный в $L_2[0, \pi]$ операцией (1) и нулевым условием на правом конце, обозначим L .

ЛЕММА 2. Спектр оператора L дискретен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{\omega} [y_1(x, \lambda)y_2(\pi, \lambda) - y_2(x, \lambda)y_1(\pi, \lambda)],$$

и

$$\theta(x, \lambda) = \frac{1}{\omega} [y_1(x, \lambda)y_2'(\pi, \lambda) - y_2(x, \lambda)y_1'(\pi, \lambda)].$$

Тогда

$$\varphi(\pi, \lambda) = 0, \quad \varphi'(\pi, \lambda) = 1, \quad \theta(\pi, \lambda) = -1, \quad \theta'(\pi, \lambda) = 0.$$

Обозначим

$$\psi(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m(\lambda)\varphi(x, \lambda),$$

где $m(\lambda)$ — функция Вейля. Функция $\psi(x, \lambda)$ должна принадлежать $L_2[0, \pi]$, поэтому согласно лемме 1 и введенным выше обозначениям

$$m(\lambda) = -\frac{y_1'(\pi, \lambda)}{y_1(\pi, \lambda)}.$$

По следствию к лемме 1, y_1 — целая функция λ . Поэтому $m(\lambda)$ — функция мероморфная, а, значит, спектр оператора L дискретен, что и требовалось доказать. \square

Начиная с этого момента, предположим, что $p(x)$ финитна окрестности нуля, то есть $p(x) \equiv 0$, $0 \leq x \leq a$, где a — произвольное число, лежащее между 0 и π . Для дальнейшего нам необходимо получить асимптотику $y_1(x, \lambda)$ при больших значениях λ . Если $x < a$, то асимптотика $y_1(x, \lambda)$ известна и совпадает с асимптотикой $\sqrt{x} I_\nu(sx) s^{-\nu}$ (см.

уравнение (4)). Для удобства выпишем асимптотику этой функции. Имеем при $|s| > R$, $0 \leq \arg s \leq \pi$, где R — произвольное достаточно большое число.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} I_\nu(sx) s^{-\nu} &= \frac{e^{-\frac{\pi\nu}{2}} s^{-\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{isx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s^k x^k} \right] + \\ &+ \frac{e^{(\frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4})} s^{-\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-isx} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k}{s^k x^k} \right], \end{aligned}$$

причем этот формальный ряд можно понимать как асимптотический в обычном смысле, а

$$\begin{aligned} \alpha_{2k} &= \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + 2k + \frac{1}{2})}{2^{2k} (2k)! \Gamma(\nu - 2k + \frac{1}{2})}, \\ \alpha_{2k+1} &= \frac{(-1)^{k+1} \Gamma(\nu + 2k + \frac{3}{2})}{i \cdot 2^{2k+1} \cdot (2k+1)! \Gamma(\nu - 2k - \frac{1}{2})}, \end{aligned}$$

Теперь мы получим асимптотику $y_1(x, \lambda)$ при $a < x \leq \pi$ и из двух этих асимптотик "склеим" общую асимптотику для $y_1(x, \lambda)$.

ЛЕММА 3. Пусть γ — фиксированное вещественное число; всегда можно указать такое $R(\gamma)$, что для любого целого N в области $G: \operatorname{Im} z < \gamma$, $|z| > R(\gamma)$ уравнение (4) (с $p(x)$ финитной в окрестности нуля) имеет решение $y_1(x, \lambda)$ допускающее асимптотическое представление при $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in G$, $a < x \leq \pi$:

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= \frac{s^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-(\frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\{ e^{isx} \left[\sum_{k=0}^N \frac{\alpha_k(x)}{s^k} + O\left(\frac{1}{s^{N+1}}\right) \right] \right\} + \\ &+ \frac{s^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{(\frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-isx} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \alpha_k(x)}{s^k} + O\left(\frac{1}{s^{N+1}}\right) \right] \right\} + \quad (5) \end{aligned}$$

Функции $\alpha_k(x)$ определяются следующими рекуррентным соотношением:

$$\alpha'_{k+1}(x) = \frac{i}{2} \alpha''_k(x) - \frac{i}{2} \cdot \frac{(\nu^2 - \frac{1}{4})}{x^2} \alpha_k(x) - \frac{i}{2} p(x) \alpha_k(x)$$

и условиями склейки:

$$\alpha_k(a) = \frac{\alpha_k}{a_k}, \quad \alpha_0(x) \equiv 1.$$

Постоянные в O -членах формулы (5) не зависят от x . Формула (5) может быть почленно продифференцирована.

Доказательство. Составим формальный ряд

$$\begin{aligned}\varphi(x, s) &= \frac{s^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{isx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{s^k} \right] + \\ &+ \frac{s^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-isx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k(x)}{s^k} \right].\end{aligned}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению (1), если $\alpha_k(x)$ находятся по выписанным выше формулам. Записав ряд для $\varphi(x, s)$ в виде

$$\begin{aligned}\varphi(x, s) &= \frac{s^{-\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{isx-(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4})} \sum_{k=0}^N + e^{isx-(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4})} \times \right. \\ &\times \sum_{k=N+1}^{\infty} + e^{-isx+(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4})} \sum_{k=0}^N + e^{-isx+(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4})} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left. \right\} = \\ &= \frac{s^{-\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \{ \varphi_0^1 + \varphi_1^1 + \varphi_0^2 + \varphi_1^1 \},\end{aligned}$$

покажем, что, например,

$$\varphi_1^1 = O\left(\frac{1}{s^{N+1}}\right) e^{isx}.$$

Пусть

$$ly = -y'' + \frac{(\nu^2 - \frac{1}{4})}{x^2} y + p(x)y - s^2 y = l_0 y + p(x)y;$$

имеем

$$l\varphi = [l\varphi_0^1 + l\varphi_1^1 + l\varphi_0^2 + l\varphi_1^2] \cdot \frac{s^{-\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$l\varphi_0^1 = O\left(\frac{1}{s^{N+1}}\right) e^{isx} = \psi_0(x, s),$$

а, значит

$$l\varphi_1^1 = -\tilde{\psi}_0(x, s) = -\psi_0 + O(e^{-isx}) = O\left(\frac{1}{s^{N+1}}\right) e^{isx} \quad \text{в } G.$$

Но

$$l\varphi_1^1 = l_0\varphi_1^1 + p(x)\varphi_1^1 = -\tilde{\psi}_0(x, s)$$

Поэтому

$$\varphi_1^1 + l_0^{-1} p \cdot \varphi_1^1 = -l_0^{-1} \tilde{\psi}_0(x, s),$$

где l_0^{-1} — оператор, обратный оператору Бесселя. Известно (см., например, [6]), что это интегральный оператор с ядром, которое вычисляется в явном виде. Это ядро при s , лежащих в области, указанной в лемме, и $a \leq x \leq \pi$ стремится к нулю, когда $s \rightarrow \infty$. Ядро оператора p — оператора умножения на функцию $p(x)$ — не зависит от s . Поэтому из равенства $(E + l_0^{-1} p) \varphi_1^1 = -l_0^{-1} \tilde{\psi}_0$ получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi_1^1 &= -(E + l_0^{-1} p)^{-1} l_0^{-1} \tilde{\psi}_0 = (E + l_0^{-1} p)^{-1} l_0^{-1} O\left(\frac{1}{s^{N+1}}\right) e^{isx} = \\ &O\left(\frac{1}{s^{N+1}}\right) e^{isx}. \end{aligned}$$

Возможность почленного дифференцирования доказывается так же.

Полученное решение $\varphi(x, s)$ одинаково с $y_1(x, \lambda)$. Действительно, у них совпадают асимптотики при $0 < x \leq a$. Отсюда легко следует, что эти два решения совпадают при указанных значениях x , а значит, они совпадают и везде на $[0, \pi]$. \square

ЛЕММА 4. Для собственных чисел оператора L верно следующее асимптотическое представление:

$$\lambda_n = (n + \gamma)^2 + c_0 + \frac{c_2}{(n + \gamma)^2} + \frac{c_4}{(n + \gamma)^4} + \dots, \quad (6)$$

где

$$\gamma = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственные числа оператора L являются нулями целой функции $y_1(\pi, \lambda)$. Подставив в ее асимптотические разложения ряд (6) и приравняв результат нулю, получим, во-первых, что корни $y_1(\pi, \lambda) = 0$ имеют вид (6), а во-вторых, что например,

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx - \frac{1}{\pi^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

\square

§ 2. Тождества для собственных чисел

Всюду в дальнейшем будем обозначать $\zeta(s, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} (n + \gamma)^{-s}$, $\operatorname{Re} s > 1$. Функцию $Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$, регулярную в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, будем называть дзета-функцией оператора L . Наша цель – отыскание регуляризованных следов, то есть сумм вида

$$\begin{aligned} \sum^1 \lambda_n &= \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n - (n + \gamma)^2 - c_0], \\ \sum^2 \lambda_n &= \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n^2 - (n + \gamma)^4 - 2c_0(n + \gamma)^2 - 2c_2 - c_0], \dots \end{aligned}$$

Оказывается справедливой

ТЕОРЕМА 1. Дзета-функцию оператора L можно продолжить в полуплоскость $\operatorname{Re} s \leq \frac{1}{2}$, и справедливы равенства

$$\sum^k \lambda_n = Z(-k) + D_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} D_k &= \sum_{l=0}^k d_{2l}(-k) \zeta(-2k + 2l, \gamma), \\ d_{2l}(s) &= \sum_{m=1}^l \sum_{k_1 + \dots + k_m = l-m} \binom{-s}{m} c_{2k_1} \dots c_{2k_m}, \quad d_0(s) \equiv 1. \end{aligned} \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$\Psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_n^{-s} - \sum_{l=0}^p \frac{d_{2l}(s)}{(n + \gamma)^{2l+2s}} \right].$$

Из соотношений (8), (6), следует, что $\Psi(s)$ продолжается в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -(p + \frac{1}{2})$, а также при $s = -k$, $k \leq p$ верны формулы (7).

Введем теперь следующую функцию:

$$R(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \zeta}, \quad \zeta > 0.$$

Хорошо известно асимптотическое разложение этой функции:

$$R(\zeta) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{Z(-k)}{\zeta^{k+1}} + \pi \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{\zeta^{k+\frac{1}{2}}} \text{Выч. } Z(s) + R_N. \quad (9)$$

Однако, $y_1(\pi, \lambda)$ — целая четная функция s экспоненциального типа, и поэтому

$$-\frac{y'(\pi, \lambda)}{y(\pi, \lambda)} \Big|_{\lambda=-\zeta < 0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \zeta} = R(\zeta). \quad (10)$$

Учитывая формулу (5) при $\lambda = -\zeta$, то есть при $s = i\sqrt{\zeta}$, $\zeta > 0$ (см. выбор ветви $\sqrt{\lambda}$) получаем, что

$$-\frac{y'(\pi, -\zeta)}{y(\pi, -\zeta)} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \omega_k}{\zeta^{k+1}} + \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{\pi \delta_k}{\zeta^{k+\frac{1}{2}}} + R'_N, \quad (11)$$

где R'_N — остаток.

Числа ω_k , δ_k легко высчитать через $\alpha_k(\pi)$. Мы выписывать эти формулы не будем, а будем считать их известными. Вычисляя, легко получаем, что, например,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{p(\pi)}{4} - \frac{1}{4\pi^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right), \\ \delta_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi p(x) dx - \frac{1}{4\pi^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right), \dots \end{aligned}$$

Из формул (9), (10), (11) следует, в частности, что в асимптотическом разложении λ_n присутствуют только четные степени $(n + \gamma)$ (см. по этому поводу статью [7]). Таким образом, доказана □

ТЕОРЕМА 2. Для регуляризованных сумм собственных чисел оператора L верны тождества

$$\sum^k \lambda_n = \omega_k + D_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где числа ω_k и D_k определяются по формулам (11) и (8) соответственно. Для первой регуляризованной суммы справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n - (n + \gamma)^2 - c_0] &= -\frac{p(\pi)}{4} - \frac{1}{4\pi^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) + D_1, \\ D_1 &= -\zeta(-2, \gamma) - c_0 \zeta(0, \gamma). \end{aligned} \quad (13)$$

Сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Положив в тождествах (12) $p(x) \equiv 0$, получим некоторые новые соотношения для нулей $\lambda_{n,\nu}$ функций Бесселя $I_\nu(s\pi)$, $\lambda = s^2$. Например, тождество (13) выглядит так:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{n,\nu} - \left(n + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{\pi^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \right) = \\ & = \frac{1}{8} \left(\frac{\nu^3}{3} + \frac{\nu^2}{2} - \frac{\nu}{12} - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{8\pi^2} (4\nu^2 - 1) \cdot (\nu + 1). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вычеты функции $Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}$, относящиеся к точкам $-k + \frac{1}{2} [k = 0, 1, \dots]$, легко определяются из вида λ_n^{-s} . Они равны

$$\frac{1}{2} d_{2k} \left(-k + \frac{1}{2} \right).$$

Поэтому из (11) получаем рекуррентную систему для определения c_{2k} , $k = 0, 1, \dots$:

$$\frac{1}{2} d_{2k} \left(-k + \frac{1}{2} \right) = \delta_k.$$

Так, при $k = 1$ получаем, что

$$\frac{1}{4} c_0 = \delta_1, \quad c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx - \frac{1}{\pi^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right)$$

и. т. д.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если бы мы рассматривали задачу для уравнений второго порядка $-y'' + q(x)y = \lambda y$ с функцией $q(x)$, не имеющей особенностей, то известно, что соответствующая сумме (13) формула выглядела бы так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n - n^2 - c_0] = -\frac{q(0) + q(\pi)}{4} - \zeta(-2) - c_0 \zeta(0) \quad (14)$$

здесь $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx$. В нашем случае $q(x)$ имеет особенность, ее значение в нуле лишено смысла, интеграл от нее не существует. С точки зрения обобщенных функций таким интегралом можно придать смысл, рассмотрев обобщенную функцию

x^λ на конечном отрезке. Взяв в качестве основной функции функцию $\varphi(x) \equiv 1$, мы, как известно, получим регуляризованный интеграл

$$\text{Per} \int_0^b x^\lambda dx = \frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1}.$$

Так, например,

$$\text{Per} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + p(x) \right] dx = \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\pi^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx.$$

Учитывая это, мы формулу (13) с $q(x) = \frac{1}{x^2}(\nu^2 - \frac{1}{4}) + p(x)$ можем записать в виде (14), если интеграл в c_0 заменим регуляризованным в указанном смысле, а значение $q(x)$ в нуле положим равным нулю

Литература

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциальных операторов второго порядка. ДАН СССР, 88, № 4. 593—598, 1953.
2. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы нулей одного класса целых функций. ДАН СССР, 176, № 2, 1082—1085, 1967.
3. Гасымов М. Г., Левитан Б. М. О сумме разностей собственных значений двух сингулярных операторов Штурма—Лиувилля. ДАН СССР, 151, № 5, 1014—1017, 1963.
4. Гасымов М. Г. О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов. ДАН СССР, 150, № 6, 1202—1205, 1963.
5. Костюченко А. Г. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов. Диссертация. МГУ, 1966.
6. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., Наука, 1969.
7. Садовничий В. А. О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков. Матем. сб. 72 (114), № 2, 293—317, 1967.