

УДК 517.948.35

# **Единственность решений обратной задачи в случае уравнений второго порядка с нераспадающимися краевыми условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя<sup>1</sup>**

**В. А. Садовничий**

Рассматриваются два вопроса спектрального анализа, относящиеся к обыкновенным дифференциальным операторам. Получена теорема единственности решения обратной задачи для уравнения второго порядка, заданного на отрезке  $[0, \pi]$ , в случае общих краевых условий, т. е. тогда, когда граничные формы содержат комбинации значений функций в точке 0 и точке  $\pi$ . Содержатся также формулы регуляризованных следов только части собственных чисел для оператора Штурма—Лиувилля; при этом получается факторизация характеристического определителя оператора. Заметим, что все рассмотрения справедливы и в случае уравнения порядка  $n$ .

В случае распадающихся граничных условий (т. е. условий Штурма—Лиувилля) разработано несколько методов решения обратной задачи [1, 2, 3, 4]. В работе [1] дано полное решение обратной задачи, при этом доказательство строилось на использовании операторов преобразования. В [4] для решения обратной задачи порядка  $n \geq 2$  и распадающихся граничных условий был предложен другой метод, в котором вместо операторов преобразования использовались определенные отображения  $T_1$  пространств решений, задаваемые матрицами.

При решении обратной задачи в случае нераспадающихся краевых условий возникают трудности, связанные с применением операторов преобразования. Поэтому мы пользуемся отображениями пространств

---

<sup>1</sup> ДАН СССР, № 2, т. 206, 1972. с. 293–296

решений. Хотя эта задача обладает рядом специфических особенностей, удастся доказать теорему, которая является аналогом таких же теорем единственности в случае задачи Штурма—Лиувилля.

Регуляризованные следы дифференциальных операторов (суммы собственных чисел, из которых вычтены выражения, делающие эти ряды сходящимися) являются естественным обобщением понятия следа для матриц. Наиболее общие результаты, относящиеся к этому вопросу, получены в работе [5]. Однако во всех работах по теории регуляризованных следов речь шла о суммах, в которые входят все собственные числа операторов. После широко известных результатов М. В. Келдыша по теории операторных пучков стало ясно, что во многих вопросах представляет интерес часть собственных функций, часть собственных значений и т. д. операторных пучков. В настоящей работе мы ставим и решаем вопрос о регуляризованных следах только части собственных чисел  $z_n$  (лежащих вдоль одного направления;  $z_n^2 = \lambda_n$ ) оператора Штурма—Лиувилля. Заметим, что для решения этого вопроса информации, которую можно извлечь из асимптотики резольвенты оператора, недостаточно. Здесь уже надо знать ту часть следа резольвенты, которая "отвечает" за данную серию собственных чисел. Мы решаем также и этот вопрос, т. е. фактически факторизуем оператор.

1. Мы рассматриваем следующую задачу:

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y = s^2 y, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} U_1(y) &= y'(0) + \alpha_{11}y(0) + \alpha_{12}(\pi) = 0, \\ U_2(y) &= y'(\pi) + \alpha_{21}y(0) + \alpha_{22}(\pi) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

( $q(x)$  — суммируемая функция,  $\alpha_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  — комплексные постоянные).

Эту задачу в дальнейшем будем называть задачей  $L$ . Условимся в дальнейшем задачу типа  $L$ , но с другими коэффициентами в уравнении и с другими параметрами в граничных формах обозначать  $\tilde{L}$ . Всюду будем считать, что если некоторый символ обозначает объект, относящийся к задаче  $L$ , то этот же символ с волной наверху обозначает аналогичный объект задачи  $\tilde{L}$ . Целочисленный индекс  $k$  будем всюду считать меняющимся от 0 до  $\infty$ . Символ  $a$ , встречающийся в качестве индекса, будем считать всюду принимающим только значения 0 и  $\pi$ .

Пусть  $\lambda_k$  — собственные числа задачи  $L$ , а  $y_{k,0}(x)$  и  $y_{k,\pi}(x)$  — собственные функции, им отвечающие и нормированные условиями  $y_{k,0}(0) = 1$  и  $y_{k,\pi}(\pi) = 1$  соответственно. Пусть  $f_{k,0}(x)$  и  $f_{k,\pi}(x)$  —

аналогично определяемые собственные функции сопряженной к  $L$  задачи. Заметим, что как и в [4], спектральным параметром в сопряженных задачах мы считаем параметр  $\lambda$ , а не  $\bar{\lambda}$ , так что собственные числа задачи и ей сопряженной совпадают.

Предположим, что все собственные числа рассматриваемых задач однократны.

Пусть

$$(-1)^{a/\pi} a_{k,a} = \int_0^\pi y_{k,a}(x) \bar{f}_{k,a}(x) dx.$$

Нами будут использованы функции  $\varphi_{1,a}(x, \lambda)$ ,  $\varphi_{2,a}(x, \lambda)$ , которые мы назовем главными решениями:  $l\varphi_{1,a}(x, \lambda) = \lambda\varphi_{1,a}(x, \lambda)$ ,  $\varphi_{1,a}(0, \lambda) = 1$ ,  $\varphi_{1,0}(0, \lambda) = -\alpha_{11} - \alpha_{12}y_{\lambda,0}(\pi)$ ,  $\varphi_{1,\pi}(\pi, \lambda) = 1$ ,  $\varphi_{1,\pi}(\pi, \lambda) = -\alpha_{22} - \alpha_{21}y_{\lambda,\pi}(0)$ ; а также  $l\varphi_{2,a}(x, \lambda) = \lambda\varphi_{2,a}(x, \lambda)$ ,  $U_1(\varphi_{2,0}) = 1$ ,  $U_2(\varphi_{2,0}) = 0$ ,  $U_1(\varphi_{2,\pi}) = 0$ ,  $U_2(\varphi_{2,\pi}) = 1$ ,

Функции  $y_{\lambda,a}(x)$  определяются следующим образом:

$$y_{\lambda,a}(x) = \begin{vmatrix} \psi_{1,a}(x) & \psi_{2,a}(x) \\ U_{2-a/\pi}(\psi_{1,a}) & U_{2-a/\pi}(\psi_{2,a}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_{1,a}(a) & \psi_{2,a}(a) \\ U_{2-a/\pi}(\psi_{1,a}) & U_{2-a/\pi}(\psi_{2,a}) \end{vmatrix}^{-1},$$

где  $\psi_{1,a}(x)$  и  $\psi_{2,a}(x)$  — два линейно независимых решения таких, что  $\psi_{1,a}(a) = 0$ ,  $\psi_{1,a}(a) = 1$ ,  $\psi_{2,a}(a) = 1$ ,  $\psi_{2,a}(a) = 0$ .

Наряду с задачей  $L$  рассмотрим две задачи с распадающимися граничными условиями. Задачу  $L_0$ :

$$lu = zu, \\ u(0) = 0, \quad U_2(u) = 0$$

и

$$lv = zv, \\ v(\pi) = 0, \quad U_1(v) = 0.$$

Пусть  $z_{k,0}$   $z_{k,\pi}$  — собственные числа этих задач соответственно, а отвечающие им собственные функции обозначим  $z_{k,0}(x)$  и  $z_{k,\pi}(x)$ .

Обозначим, наконец, через  $\beta_{k,a}$  вычеты функций  $\varphi_a(\lambda)$ :

$$\varphi_0(\lambda) = \varphi'_{1,0}(0, \lambda) + \alpha_{12}\varphi_{1,0}(\pi, \lambda), \\ \varphi_\pi(\lambda) = \varphi'_{1,\pi}(\pi, \lambda) + \alpha_{21}\varphi_{1,\pi}(0, \lambda)$$

в точках  $z_{k,0}$  и  $z_{k,\pi}$  соответственно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k$ ,  $\alpha_{k,a} = \tilde{\alpha}_{k,a}$ ,  $z_{k,a} = \tilde{z}_{k,a}$ ,  $\beta_{k,a} = \tilde{\beta}_{k,a}$ ; тогда совпадают коэффициенты уравнений и константы в граничных условиях задач  $L$  и  $\tilde{L}$ , т. е.  $q(x) = \tilde{q}(x)$ ,  $\alpha_{ij} = \tilde{\alpha}_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что в отличие от случая с распадающимися граничными условиями нам пришлось рассматривать данные уже трех задач  $L$ ,  $L_0$ ,  $L_\pi$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если  $\alpha_{12} = 0$ ,  $\alpha_{21} = 0$ , то  $\beta_{k,a} = \tilde{\beta}_{k,a} = 0$ , а множества особенностей  $\varphi_{1,a}$ ,  $\varphi_{1,a} - z_{k,a}$ ,  $z_{k,\pi}$  пусты, поэтому формулировка теоремы 1 совпадает с ранее известными формулировками теорем единственности обратных задач в случае распадающихся граничных условий.

2. Здесь мы рассматриваем то же уравнение, что и в задаче (1), (2) с граничными условиями вида  $y(0) = y(\pi) = 0$ . Пусть

$$R(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \eta)^{-1}$$

— след резольвенты этой задачи,  $\eta > 0$ . Заметим, что вопрос о нахождении регуляризованных следов будет решен, если найти асимптотическое разложение при  $\eta \rightarrow \infty$  функции  $R_1(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \eta)^{-1} \cdot z_n^{-1}$ . Если  $q(z)$  — бесконечно дифференцируемая функция, то как известно, справедливы разложения

$$z_n \sim \sum_{p=0}^{\infty} c_{2p-1} n^{-(2p+1)}, \quad c_{-1} \equiv 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

также

$$R(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k \cdot t^{-k-1}, \quad t = \sqrt{\eta} > 0,$$

причем для определения чисел  $c_{2k-1}$ ,  $l_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , легко получить рекуррентные соотношения.

ТЕОРЕМА 2. При больших положительных  $\eta$  справедливо представление

$$R_1(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R(x) dx}{\sqrt{x}(\eta - x)} \sim \frac{\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} l_{2k} \ln \eta - \sum_{p=0}^{2k-1} \frac{l_p}{k-p/2} + \int_1^{\infty} \eta^{k-1/2} R^*(\eta) d\eta + 2 \sum^* z_n^{2k-1} \operatorname{arctg} z_n^{-1}}{\eta^{k+1}},$$

$$R^*(\eta) = R(\eta) - \sum_{p=0}^{2k} \frac{l_p}{\eta^{(p+1)/2}},$$

$$\Sigma^* z_n^{2k-1} \operatorname{arctg} z_n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2k-1} - \frac{z_n^2}{2k-3} + \dots + (-1)^k z_n^{2k-1} \operatorname{arctg} z_n^{-1} \right],$$

где интеграл представляет регуляризованный интеграл от резольвенты  $R(\eta)$  всего оператора, умноженной на  $\eta^{k-1/2}$ , а  $\Sigma^*$  означает регуляризованную сумму чисел  $z_n^{2k-1} \operatorname{arctg} z_n^{-1}$ .

ТЕОРЕМА 3. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ z_n^{lk-1} - \sum_{l=0}^k \rho_{2l}(-2k+1) n^{-2l+2k-1} \right] = \\ & = c(k) - \rho_{2k}(-2k+1) \gamma + \sum_{l=0}^{k-1} \rho_{2l}(-2k+1) \frac{B_{2(k-l)}}{2(k-l)}. \end{aligned}$$

Здесь  $k-1, 2, \dots$ ,  $\rho_{2l}(s) = \sum_{m=1}^l \sum_{k_1+\dots+k_m=l} (e^{-s}) c_{2k_1-1} \dots c_{2k_m-1}$ ,  $\rho+0 \equiv 1$ ,  $\gamma$  — постоянная Эйлера,  $B_{2(k-1)}$  — числа Бернулли,  $c(k)$  — равняется трем последним слагаемым числителя правой части формулы для  $B_1(\eta)$ , умноженным на  $(-1)^k \pi^{-1}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Формулы регуляризованных сумм собственных чисел можно применять для приближенного вычисления последних.

## Литература

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Изв. АН СССР, сер. матем., 15 (1951).
2. Марченко В. А. Тр. Московск. матем. общ. 1 (1952).
3. Крейн М. Г. ДАН, 76, № 1 (1951).
4. Лейбензон З. Л. Тр. Московск. матем. общ., 15 (1966).
5. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Функциональный анализ. 1, № 2. 1967.