

УДК УДК 513.88

Регуляризованные суммы полужелых степеней оператора Штурма—Лиувилля¹

В. А. Садовничий

В работе изучается вопрос о регуляризованных суммах части собственных чисел z_n (лежащих вдоль одного направления) оператора Штурма—Лиувилля. Первая регуляризованная сумма выглядит так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(z_n - n - \frac{c_1}{n} + \frac{2}{\pi} \cdot z_n \operatorname{arctg} \frac{1}{z_n} - \frac{2}{\pi} \right) = \\ = \frac{B_2}{2} - c_1 \cdot \gamma + \int_1^{\infty} \left[R(\vartheta) - \frac{l_0}{\sqrt{\vartheta}} - \frac{l_1}{\vartheta} - \frac{l_2}{\vartheta \sqrt{\vartheta}} \right] \sqrt{\vartheta} d\vartheta,$$

где z_n — собственные числа, лежащие вдоль положительной полуоси $z_n^2 = \lambda_n$.

$$l_0 = \frac{\pi}{2}, \quad l_1 = -\frac{1}{2}, \quad l_2 = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} q(x) dx, \quad c_1 = -\frac{2}{\pi} l_2,$$

B_2 — число Бернулли, γ — постоянная Эйлера, $R(\vartheta)$ — след резольвенты оператора Штурма—Лиувилля. Библ. 5 назв.

Регуляризованные следы дифференциальных операторов (суммы собственных чисел, из которых вычтены некоторые выражения так, что ряды становятся сходящимися) являются естественным обобщением понятия следа для матриц. Для регулярных обыкновенных дифференциальных операторов второго парядка такие тождества были доказаны в статье [1] (см. также книгу [2]). Наиболее общие результаты, относящиеся к этому вопросу, получены в работе [3].

¹Мат. заметки, №2, т. 14, 1973. с. 279–290

Однако во всех работах, относящихся к регуляризованным следам, речь шла о суммах, в которые собственные числа входят в целых степенях. Представляет интерес получение регуляризованных сумм, содержащих дробные степени собственных чисел.

В настоящей работе получены формулы регуляризованных сумм полуцелых степеней оператора Штурма—Лиувилля. Заметим, что в отличие от известных формул регуляризованных следов, в случае полуцелых степеней суммы уже равны числам, которые в явном виде не выражаются через коэффициенты уравнения и константы в граничных условиях, а содержат интегралы от регуляризованных следов резольвенты.

§ 1. Изучение структуры дзета-функции и части следа резольвенты

Мы рассматриваем оператор Штурма—Лиувилля:

$$-y'' + q(x)y = z^2 y = \lambda y, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Для простоты предлагаем, что функция $q(x)$ вещественная, а собственные числа оператора положительны.² Хорошо известно, что если $q(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, то справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$z_n \sim \sum_{p=0}^{\infty} c_{2p-1} n^{-(2p-1)}, \quad c_{-1} \equiv 1, \quad z_n = \sqrt{\lambda_n} > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.1)$$

Для чисел c_p ($p \geq 1$) получим ниже рекуррентные соотношения (см. также [4], [5]).

Введем в рассмотрение (см. [4]) дзета-функцию $\zeta_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{-s}$ (здесь $z_n^{-s} = e^{-s \ln z_n}$ и берется фиксированная ветвь логарифма, регулярная в плоскости с разрезом по положительной полуоси). Просто доказывается следующая

ЛЕММА 1. Функция $\zeta_0(s)$, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$, допускает аналитическое продолжение влево как мероморфная функция с полюсами первого порядка в точках $s = -2k + 1$ и вычетами в них, равными $\rho_{2k}(-2k + 1)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

²Последнего всегда можно добиться сдвигом по параметру

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем

$$\zeta_0(s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \left(1 + \frac{c_1}{n^2} + \dots \right)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta(s+2k) \rho(s), \quad (1.2)$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, а для функции $\rho_{2k}(s)$, ($k = 1, 2, \dots$) имеем равенства

$$\rho_{2k}(s) = \sum_{m=1}^k \sum_{k_1+\dots+k_m=k} \binom{-s}{k} c_{2k_1-1} \dots c_{2k_m-1}, \quad \rho_0 \equiv 1 \quad (1.3)$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[z_n^{-s} - \sum_{k=0}^p \frac{\rho_{2k}(s)}{n^{2k+s}} \right] = \zeta_0(s) + D_p(s), \quad (1.4)$$

$$D_p(s) = - \sum_{k=0}^p \rho_{2k}(s) \zeta(s+2k). \quad (1.4')$$

Из соотношений (1.1), (1.2) получаем, что $\Psi_0(s)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -(2p+1)$ для любого целого $p \geq 0$. Поскольку дзета-функция Римана $\zeta(s)$ имеет единственный плюс в точке $s = 1$ с вычетом, равным единице, мы получаем, что $\zeta_0(s)$ имеет полюсы в точках $s = 1, -1, -3, \dots$ с вычетами соответственно $\rho_0(1) = 1, \rho_2(-1), \rho_4(-3), \dots$ что и требовалось.

Полагая в формуле (1.4) $s = -m$ ($m < 2p+1$), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[z_n^m - \sum_{k=0}^p \rho_{2k}(-m) n^{-2k+m} \right] = \lim_{s \rightarrow -m} [\zeta_0(s) + D_p(s)]. \quad (1.5)$$

Если m — четно, то (1.5) известны; в этом случае, поскольку $z_n^2 = \lambda_n$, суммируются собственные числа оператора. Поэтому нас будет интересовать только тождества с $m = 2l - 1$ ($l = 1, 2, \dots$). Суммы в левой части (1.5) с $m = 2l - 1$ будем называть регуляризованными суммами полуцелых степеней собственных чисел оператора. Они, как мы видим, равны пределу правой части (1.5) при $s \rightarrow -(2l-1)$. Подчеркнем, что функция $\zeta_0(s)$ имеет в этой точке полюс, а поэтому, чтобы определить регуляризованные суммы, необходимо знать значение регуляризованной части $\zeta_0(s)$ ($\operatorname{Per}_{s=-2l+1} r\zeta_0(s) = c_0(l)$) в точке $s = -2l+1$, и это главное в решаемой задаче. Значения $\zeta_0(s)$ в тех целых точках,

где она регулярна, просто связаны с асимптотикой всей резольвенты. Оказывается, что числа $c_0(l)$ тесно связаны с асимптотикой части следа резольвенты задачи.

Пусть $R(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \vartheta}$ — след резольвенты задачи $\vartheta > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} R(\vartheta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z_n + it)(z_n - it)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n(z_n + it)} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n(z_n - it)} = R_0(t) + R_0(-t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

здесь z_n определены формулой (1.1), $t = \sqrt{\vartheta} > 0$. С другой стороны,

$$R_1(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \vartheta) z_n} = \frac{1}{it} [R_0(-t) - R_0(t)]. \quad (1.7)$$

Вычитая из (1.6) выражение (1.7) умноженное на it , получим

$$R_0(t) = \frac{1}{2} [R(\vartheta) - i\sqrt{\vartheta} R_1(\vartheta)] \quad (t = \sqrt{\vartheta} > 0). \quad (1.8)$$

□

ТЕОРЕМА 1. *Функция $R_0(t)$ при $t > 0$, $t \rightarrow \infty$ может быть разложена в асимптотический ряд*

$$\begin{aligned} R_0(t) \sim \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\zeta(-2k)}{(-1)^k t^{2k+2}} + \right. \\ \left. + \frac{i\rho_{2k}(-2k+1)\ln t + \rho_{2k}(-2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} + ic_0(k)}{(-1)^{k+1} t^{2k+1}} \right], \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\rho_{2k}(-2k+1)$ — вычет функции $\zeta_0(s)$ в точке $s = -2k$, $c_0(k)$ — значение регулярной части функции $\zeta_0(s)$ в той же точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при $0 < \operatorname{Re} s < 1$ справедливо следующее соотношение:

$$\zeta_0(s+1) = -\frac{2}{\pi i} \frac{\sin s\pi}{e^{-s\pi i/2}} \int_0^{\infty} t^{-s} R_0(t) dt.$$

По формуле обращения Меллина получим, что

$$R_0(t) = -\frac{1}{4} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} t^{s-1} \frac{\zeta_0(s+1)e^{-s\pi i/2}}{\sin \pi s} ds, \quad (0 < \gamma < 1).$$

Перенеся контур интегрирования влево, получим (1.9).

Таким образом, значения регулярной части функции $\zeta_0(s)$ при $s = -2k + 1$ ($k = 0, 1, \dots$) мы определим, если получим еще одно разложение функции $R_0(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Из (1.8) видно, что для этого достаточно получить разложение функции $R_0(\vartheta)$. \square

§ 2. Доказательство представления для части резольвенты

Заметим, что, как хорошо известно, характеристический определитель задачи — функция $\Delta(z)$ экспоненциального типа, четная по z . Поэтому для целой функции $f(\lambda) = \Delta(z)$ ($\lambda = z^2$) имеет место разложение

$$\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n}. \quad (2.1)$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Для функции $R_1(\vartheta)$ выполняется следующее представление:

$$R_1(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n(z_n^2 + \vartheta)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f'(-\lambda) d\lambda}{f(-\lambda)\sqrt{\lambda}(\lambda - \vartheta)} \quad (\vartheta > 0), \quad (2.2)$$

где $f(\lambda)$ — характеристический определитель задачи, интеграл понимается в смысле главного значения.

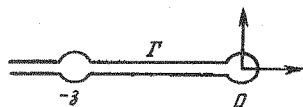


Рис. 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим обе части равенства (2.1) на $1/2\pi i \cdot \lambda^{-1/2}(\lambda + \vartheta)^{-1}$ ($\vartheta > 0$) и проинтегрируем по контуру Γ (см. рисунок). Поскольку при $\lambda \in \Gamma$ ряд в правой части (2.1) сходится равномерно по λ , то интегрирование и суммирование можно поменять местами. Но

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\lambda}{(-\lambda_n + \lambda)(\lambda + \vartheta)\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{(\lambda_n + \vartheta)\sqrt{\lambda_n}}.$$

Устремим теперь радиусы окружностей, входящих в контур Γ , к нулю. Интеграл по окружности вокруг начала стремится к нулю, если ее радиус стремится к нулю. Устремляя радиус окружности вокруг точки $-\vartheta$ к нулю, учитывая двузначность подынтегральной функции, получим интеграл, стоящий в правой части (2.2), причем он понимается в смысле главного значения. Теорема доказана. \square

СЛЕДСТВИЕ 1. Учитывая формулы (1.8) и (1.9), получаем следующее представление для части резольвенты оператора Штурма – Лиувилля:

$$R_0(\sqrt{\vartheta}) = \frac{1}{2} \left[R(\vartheta) - \frac{i\sqrt{\vartheta}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R(x)}{\sqrt{x}(\vartheta - x)} dx \right] \quad (2.3)$$

(здесь мы воспользовались тем, что

$$-\frac{f'(-x)}{f(-x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x + \lambda_n} = R(x).$$

Асимптотику второго слагаемого правой части (2.3) непосредственно получить трудно. Поэтому мы получим сначала другое представление функции $R_1(\vartheta)$.

ЛЕММА 2. При $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ для функции $R_1(\vartheta)$ выполняется следующее равенство:

$$R_1(\vartheta) = -\frac{1}{2\pi i \sqrt{\vartheta}} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \vartheta^{s-1} \frac{\pi \cdot Z(s)}{\cos \pi s} ds \quad (2.4)$$

(здесь $Z(s)$ — дзета-функция оператора Штурма–Лиувилля).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(\vartheta - x)} = 0$ в смысле главного значения, то $R_1(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R(x) - R(\vartheta)}{\sqrt{x}(\vartheta - x)} dx$ и интеграл сходится абсолютно.

Поскольку $R(\vartheta x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} (\vartheta x)^{s-1} \frac{\pi \cdot Z(s)}{\sin \pi s} ds$ ($\frac{1}{2} < \gamma < 1$), мы получим

$$R_1(\vartheta) = \frac{1}{\pi \sqrt{\vartheta}} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)} \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\pi [(\vartheta x)^{s-1} - \vartheta^{s-1}] Z(s)}{\sin \pi s} ds \right).$$

Переставляя порядок интегрирования, запишем

$$R_1(\vartheta) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{\vartheta}} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\vartheta^{s-1} \cdot Z(s)}{\sin \pi s} ds \int_0^\infty \frac{x^{s-1} - 1}{\sqrt{x}(1-x)} dx. \quad (2.5)$$

Воспользуемся тем, что при $0 < \operatorname{Re} \mu < 1$ $\int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}}{1-u} du = \pi \operatorname{ctg} \pi \mu$. Значит,

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{\sqrt{x}(1-x)} dx = -\pi \cdot \operatorname{tg} \pi s, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)} = 0.$$

Подставляя эти значения в (2.5), получим (2.4), что и требовалось. \square

ТЕОРЕМА 3. Для функции $R_1(\vartheta)$ при больших положительных ϑ справедливо асимптотическое равенство

$$R_1(\vartheta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c(k) + b(k) \ln \vartheta}{\vartheta^{k+1}}, \quad (2.6)$$

где $c(k)$ — значение регулярной части $Z(s)$ в точке $s = \frac{-2k+1}{2}$, а $b(k)$ — вычет $Z(s)$ в той же точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см., например, [5]), что $Z(s)$ — мероморфная функция с простыми полюсами в точках $\frac{-2k+1}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). В представлении (2.4) контур интегрирования перенесем вправо. Вычет подынтегральной функции в точке $\frac{-2k+1}{2}$ равняется $(-1)^{k+1} \cdot \frac{c(k) + b(k) \ln \vartheta}{\vartheta^{k+1}}$. Поскольку экспоненты в знаменателе растут быстрее числителя, перенесение контура оправдано. \square

Заметим, что, как нетрудно показать, характеристический определитель рассматриваемой задачи при $z \rightarrow \infty$ допускает асимптотическое представление

$$f(\lambda) = \Delta(z) \sim e^{i\pi z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(\pi)}{z^k} + e^{-i\pi z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b_k(\pi)}{z^k},$$

где $z^2 = \lambda$, а функции $b_{k+1}(x)$ находятся по следующим формулам:

$$b_{k+1}(x) = -\frac{1}{2i} \left[b'_k(x) + (-1)^k b'_k(0) - \int_0^{\infty} b_k(t) q(t) dt \right] \quad \left(k = 1, 2, \dots, b_1 \equiv \frac{1}{2i} \right).$$

Выпишем несколько коэффициентов $b_k(\pi)$.

Имеем

$$\begin{aligned} b_1 - \frac{1}{2i}, \quad b_2(\pi) &= -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} q(x) dx, \\ b_3(\pi) &= -\frac{1}{8i} \left[\frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi} q(x) dx \right)^2 - q(\pi) - q(0) \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Запишем, наконец, что

$$R(\vartheta) = -\frac{f'(-\vartheta)}{f(-\vartheta)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{t^{k+1}} \quad (t = \sqrt{\vartheta} > 0). \quad (2.8)$$

Числа l_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) выражаются через $b_k(\pi)$, и мы в дальнейшем будем считать их известными. Так, учитывая (2.7), имеем

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{\pi}{2}, \quad l_1 = -\frac{1}{2}, \quad l_2 = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} q(x) dx, \\ l_3 &= \frac{q(0) + q(\pi)}{4}, \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таким образом, учитывая (2.3), (2.6), (2.8), получим следующее представление для функции $R_0(\sqrt{\vartheta}) = R_0(t)$ ($t > 0$):

$$R_0(t) \sim$$

$$\sim \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{l_{2k} + (-1)^{k+1} \cdot i \cdot c(k) + (-1)^{k+1} \cdot 2i \cdot b(k) \cdot \ln t\vartheta}{t^{2k+1}} + \frac{l_{2k+1}}{t^{2k+1}} \right]. \quad (2.10)$$

Здесь числа l_p ($p = 0, 1, 2, \dots$) определяют по формулам (2.9), (2.8), $c(k)$ — значение регулярной части $Z(s)$ в точке $-2k+1/2$, $b(k)$ — вычет $Z(s)$ в той же точке. Сравнивая (2.10) и (1.9), получаем формулы

$$\begin{aligned} \rho_{2k}(-2k+1) &= (-1)^k \cdot \frac{2}{\pi} l_{2k}, & 2b(k) &= \rho_{2k}(-2k+1), \\ c(k) &= c_0(k), & Z(-k) &= (-1)^k \cdot l_{2k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Формулы (2.11) позволяют сделать следующие выводы

1. Равенство $\rho_{2k}(-2k+1) = \frac{2}{\pi}(-1)^k l_{2k}$ дает систему рекуррентных соотношений для определения коэффициентов c_k ($k = 1, 2, \dots$) разложения (1.1).

2. По формуле $b(k) = \frac{(-1)^k}{\pi} l_{2k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) находятся вычеты функции $Z(s)$ в точках $s = \frac{-2k+1}{2}$, что известно (см. [5]).

3. Регуляризованные следы оператора Штурма—Лиувилля находятся из соотношений $Z(-k) = (-1)^k l_{2k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$), так при $k = 1$ получаем $Z(-1) = -\frac{q(0)+q(\pi)}{4}$, что также хорошо известно.

4. Мы получим регуляризованные следы полуцелых степеней собственных чисел, если определим числа $c(k)$ и подставим их в формулу (2.10).

Этим последним мы сейчас и займемся.

§ 3. Регуляризованные суммы полуцелых степеней собственных чисел оператора

Докажем основную теорему.

ТЕОРЕМА 4. Значения регулярной части функции $Z(s)$ в точке $s = -2k + 1/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) (числа $c(k)$) находятся из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} c(k) &= \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \sum_{p=0}^{2k-1} \frac{l_p}{k - \frac{p}{2}} + \frac{(-1)^k}{\pi} \int_1^{\infty} \vartheta^{k-\frac{1}{2}} R^*(\vartheta) d\vartheta + \\ &\quad + \frac{2}{\pi} (-1)^k \sum^* z_n^{2k-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{z_n}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где числа l_p определяются формулами (2.8), а

$$R^*(\vartheta) = R(\vartheta) - \sum_{p=0}^{2k} \frac{l_p}{\frac{p+1}{2}},$$

$$\sum^* z_n^{2k-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{z_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2k-1} - \frac{z_n^2}{2k-3} + \dots + \right. \\ \left. + (-1)^{k-1} z_n^{2k-2} + (-1)^k z_n^{2k-1} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{z_n} \right], \quad (3.2)$$

(т. е. интеграл представляет собой регуляризованный интеграл от резольвенты $R(\vartheta)$ всего оператора, умноженной на $\vartheta^{k-1/2}$ а Z^* означает регуляризованную сумму чисел $z_n^{2k-1} \cdot \operatorname{arctg} 1/z_n$; при $k=0$ первое слагаемое в правой части (3.1) не участвует, а в последней сумме берется только арктангенс).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем равенство

$$\frac{\pi}{\sin s\pi} \cdot Z(s) = \int_0^{\infty} \vartheta^{-s} R(\vartheta) d\vartheta \quad \left(\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < 1 \right).$$

Заметим, что при $\operatorname{Re} s > a$ справедливо тождество

$$\frac{1}{s-a} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_1^{\infty} \vartheta^{-s} \vartheta^{a-1} d\vartheta.$$

Поэтому при $1/2 < \operatorname{Re} s < 1$ выполняется равенство

$$\frac{\pi}{\sin \pi s} \cdot Z(s) - \sum_{p=0}^{2k} \frac{l_p}{s + \frac{p-1}{2}} = \int_0^1 \vartheta^{-s} R(\vartheta) d\vartheta + \\ + \int_1^{\infty} \left[R(\vartheta) - \sum_{p=0}^{2k} \frac{l_p}{\vartheta^{\frac{p+1}{2}}} \right] \vartheta^{-s} d\vartheta. \quad (3.3)$$

Первое слагаемое справа представляет собой регулярную функцию при $\operatorname{Re} s < 1$. Согласно (2.8) выражение в квадратных скобках под знаком интеграла есть $O(\vartheta^{-k-1})$, и поэтому интеграл представляет собой регулярную функцию в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -k$. Выражение слева также допускает аналитическое продолжение в область

$-k < \operatorname{Re} s \leq 1/2$ и, согласно формулам (2.11), представляет там регулярную функцию. Таким образом, левые и правые части (3.3) представляют собой регулярные функции в области $-k < \operatorname{Re} s < 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Полагая в (3.3) $s = \frac{-2k+1}{2}$, получим, что

$$\begin{aligned} (-1)^k c(k) - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{2k-1} \frac{l_p}{\frac{p}{2} - k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \vartheta^{k-\frac{1}{2}} R(\vartheta) d\vartheta + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \vartheta^{k-\frac{1}{2}} \left[R(\vartheta) - \sum_{p=0}^{2k} \frac{l_p}{\vartheta^{\frac{p+1}{2}}} \right] d\vartheta. \end{aligned}$$

Заметим далее, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \vartheta^{k-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \vartheta} d\vartheta &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2k-1} - \frac{z_n^2}{2k-3} + \dots + (-1)^k \cdot z_n^{2k-2} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{k-1} z_n^{2k-1} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{z_n} \right] \end{aligned}$$

в силу равномерной сходимости ряда для резольвенты. Теорема доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из формулы (3.3) получаем новое доказательство следов всего оператора. Действительно, правая часть регулярна при $-k < \operatorname{Re} s < 1$, значит регулярна и левая часть; но в точках $s = -k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) $\sin \pi s$ обращается в нуль, поэтому справедливо, что

$$Z(-k) = (-1)^k l_{2k+1}.$$

Сформулируем и докажем еще одно утверждение, представляющее интерес.

ЛЕММА 3. При больших положительных ϑ справедливо представление

$$R_1(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{R(x) dx}{\sqrt{x}(\vartheta - x)} \sim$$

$$\sim \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_{2k} \ln \vartheta - \sum_{p=0}^{2k-1} \frac{l_p}{k - \frac{p}{2}}}{\vartheta^{k+1}} + \frac{\int_1^{\infty} \vartheta^{k-\frac{1}{2}} R^*(\vartheta) d\vartheta + 2 \sum^* z_n^{2k-1} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{z_n}}{\vartheta^{k+1}};$$

здесь обозначения те же, что и в теореме 4.

Доказательство. Для функции $R_1(\vartheta)$ справедливо представление (2.6). Подставляя туда значения $c(k)$ и $b(k)$ из формул (3.1) и (2.8), получим доказательство леммы. \square

Выпишем, наконец формулы регуляризованных следов полуцелых степеней собственных чисел оператора, выбирая в формулах (1.4'), (1.5), например, $p = k$ и учитывая лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[z_n^{2k-1} - \sum_{l=0}^k \rho_{2l}(-2k+1) n^{-2l+2k-1} \right] = \\ & = c_0(k) - \rho_{2k}(-2k+1) \cdot \gamma + \sum_{l=0}^{k-1} \rho_{2l}(-2k+1) \frac{B_{2(k-l)}}{2(k-l)}; \end{aligned}$$

здесь $k = 1, 2, \dots$, числа $c_0(k) = c(k)$ определяются по формулам (3.1), (3.2), числа $\rho_{2l}(s)$ находятся из соотношений (1.3), γ — постоянная Эйлера, $B_{2(k-l)}$ — числа Бернулли.

При $k = 0$ получается соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{n} \right) &= \int_1^{\infty} \left(R(\vartheta) - \frac{l_0}{\sqrt{\vartheta}} \right) \frac{d\vartheta}{\sqrt{\vartheta}} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \frac{1}{z_n} \operatorname{arctg} \frac{1}{z_n} - \gamma, \end{aligned}$$

при $k = 1$ получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(z_n - n - \frac{c_1}{n} + \frac{2}{\pi} z_n \operatorname{arctg} \frac{1}{z_n} - \frac{2}{\pi} \right) = \\ & = \frac{B_2}{2} - c_1 \cdot \gamma + \int_1^{\infty} \left[R(\vartheta) - \frac{l_0}{\sqrt{\vartheta}} - \frac{l_1}{\vartheta} - \frac{l_2}{\vartheta \sqrt{\vartheta}} \right] \sqrt{\vartheta} d\vartheta, \\ & l_0 = \frac{\pi}{2}, \quad l_1 = -\frac{1}{2}, \quad l_2 = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} q(x) dx, \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx, \quad B_2 = \frac{1}{6},$$

γ — постоянная Эйлера.

Литература

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. Докл. АН СССР, 88, № 4, (1953), С. 593—596.
2. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М., 1970.
3. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы одного класса целых функций, Функц. анализ 1, № 2 (1967), С. 52—59.
4. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций, Матем. сборник 75, № 4 (1968), С. 558—566.
5. Дикий Л. А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма—Лиувилля, Успехи матем. наук, 13, № 3 (1958), С. 111—144.