

УДК 517.927.26

Теорема единственности решения обратной задачи спектрального анализа в случае дифференциального уравнения с периодическими граничными условиями¹

В. А. Садовничий

В настоящей работе содержится доказательство теоремы единственности обратной задачи спектрального анализа в случае уравнения второго порядка, заданного на отрезке, и периодических граничных условий,

В случае распадающихся условий разработано несколько методов решения обратной задачи (см, [1, 2, 3, 4], а также [5] и библиографию там).

В работах [1, 2, 3] доказательства строились на использовании операторов преобразования. В работе [4] для решения обратной задачи в случае уравнения порядка $n \geq 2$ и распадающихся граничных условий был предложен другой метод, в котором вместо операторов преобразования использовались определенные отображения T_λ пространств решений.

Нами в работе [6] доказана теорема единственности решения обратной задачи в случае нераспадающихся граничных условий (т. е. тогда, когда граничные формы содержат комбинации значений функции на концах отрезка). Для доказательства теоремы единственности нам пришлось уже вводить несколько отображений пространств решений. В рассмотрении работы [6] предполагалось, что собственные значения рассматриваемой задачи однократны.

В настоящей работе рассматривается кратный случай (т. е. собственные значения могут быть кратными).

¹ Дифф. уравнения, № 2, т. 9, 1973. с. 271–277

§ 1. Вспомогательные утверждения, формулировка теорем

Мы рассмотрим следующую задачу L :

$$ly = -y' + q(x)y = \lambda y = s^2 y, \\ U_1(y) = y'(0) - y'(\pi) = 0, \quad U_2(y) = y(0) - y(\pi) = 0$$

($q(x)$ — действительная суммируемая функция). В дальнейшем задачу типа L , но с другими коэффициентами в уравнении будем обозначать \tilde{L} . Всюду будем считать, что если некоторый символ обозначает объект, относящийся к задаче L , то этот же символ с "волной" наверху обозначает аналогичный объект задачи \tilde{L} .

Пусть $\lambda_{k,i}$ ($i = 1, 2$) — i -кратные собственные числа задачи L (индекс k всюду меняется от 1 до ∞), $y_{k,0,2}(x)$ — собственная функция, отвечающая $\lambda_{k,2}$ и такая, что $y_{k,0,2}(0) = 1$, $y'_{k,0,2}(0) = 1$, $y_{k,0,2}(x)$ — также собственная функция, отвечающая $\lambda_{k,2}$, причем $y_{k,\pi,2} = 0$, $y'_{k,\pi,2} = 1$. Обозначим

$$\alpha_{k,a,2} = -(1)^{a/\pi} \int_0^\pi y_{k,\pi-a,2}^2(x) dx \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \Delta(\lambda_{k,2}) \right]^{-1}$$

(символ a всюду принимает только значения: 0 и π).

Пусть далее $y_{k,a,1}(x)$ — собственные функции задачи, отвечающие собственным $\lambda_{k,1}$ и нормированные условием: $y_{k,a,1}(a) = 1$, а

$$\alpha_{k,a,1} = -(1)^{a/\pi} \int_0^\pi y_{k,a,1}^2(x) dx.$$

Положим, что $z_{k,0}$ — собственные числа, а $z_{k,0}(x)$ — им отвечающие собственные функции задачи с тем же уравнением, что и в задаче L , но с граничными условиями вида $z(0) = z(\pi) = 0$. Аналогично, пусть $z_{k,\pi}$, $z_{k,\pi}(x)$ — собственные числа и собственные функции задачи с условиями $z'(0) = z'(\pi) = 0$ (выше введенные собственные функции нормированы произвольным фиксированным образом).

Пусть $\beta_{k,a} = \text{res}_{U_{1+a/\pi}}(\varphi_{1,a})$, где решения $\varphi_{1,a}(x, \lambda)$ определяются следующим образом:

$$\varphi_{1,a}(a, \lambda) = y_{\lambda,a}(0). \quad \varphi'_{1,a}(a, \lambda) = y_{\lambda,a}(\pi).$$

и

$$y_{\lambda,0}(x) = \begin{vmatrix} \psi_{1,0}(x, \lambda) & \psi_{2,0}(x, \lambda) \\ U_2(\psi_{1,0}) & U_2(\psi_{2,0}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_{1,0}(0, \lambda) & \psi_{2,0}(0, \lambda) \\ U_2(\psi_{1,0}) & U_2(\psi_{2,0}) \end{vmatrix}^{-1},$$

$$y_{\lambda,\pi}(x) = \begin{vmatrix} \psi_{1,0}(x, \lambda) & \psi_{2,0}(x, \lambda) \\ U_1(\psi_{1,0}) & U_1(\psi_{2,0}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi'_{1,0}(\pi, \lambda) & \psi'_{2,0}(\pi, \lambda) \\ U_1(\psi_{1,0}) & U_1(\psi_{2,0}) \end{vmatrix}^{-1},$$

причем решения $\psi_{1,a}(x, \lambda)$, $\psi_{2,a}(x, \lambda)$ определяются условиями Коши

$$\psi_{1,a}(a, \lambda) = 0, \quad \psi'_{1,a}(a, \lambda) = 1, \quad \psi_{2,a}(a, \lambda) = 1, \quad \psi'_{2,a}(a, \lambda) = 0.$$

Обозначим, наконец, через $\varphi_{2,a}(x, \lambda)$ решения уравнения и такие, что

$$U_{1+a/\pi}(\varphi_{2,a}) = 1, \quad U_{2-a/\pi}(\varphi_{2,a}) = 0.$$

В рассматриваемом нами случае хорошо известны следующие факты, которыми мы будем пользоваться (и уже воспользовались при введении обозначений):

а) *характеристический определитель задачи $\Delta(\lambda)$ не может иметь нулей порядка выше двух;*

б) *нулю $\lambda_{k,2}$ второго порядка соответствуют две линейно независимые собственные функции $y_{k,0,2}(x)$, $y_{k,\pi,2}(x)$, причем $y_{k,0,2}(x) = \psi_{2,0}(x, \lambda_{k,2})$, $y_{k,\pi,2}(x) = \psi_{1,0}(x, \lambda_{k,2})$;*

в) *для решений $\psi_{1,\sigma}(x, \lambda)$, $\psi_{2,a}(x, \lambda)$ при $\lambda = \lambda_{k,2}$ справедливы соотношения $\psi_{1,a}(\pi - a, \lambda) = 0$, $\psi'_{1,a}(\pi - a, \lambda) = 1$, $\psi_{2,a}(\pi - a, \lambda) = 1$, $\psi'_{2,a}(\pi - a, \lambda) = 0$;*

г) *для двукратного корня $\lambda_{k,2}$ функции $\Delta(\lambda)$ справедливы равенства: $\lambda_{k,2} = z_{\bar{k}',0}$, $\lambda_{k,2} = z_{\bar{k}'',\pi}$, при некоторых \bar{k}' и \bar{k}'' .*

Предположим в дальнейшем выполненными следующие неравенства: $\lambda_{k,1} \neq z_{k',0}$, $\lambda_{k,1} \neq z_{k'',\pi}$ при любых k , k' и k'' .

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\lambda_{k,i} = \tilde{\lambda}_{k,i}$, $\alpha_{k,a,i} = \tilde{\alpha}_{k,a,i}$ $i = 1, 2$, $z_{k,a} = \tilde{z}_{k,a}$, $\beta_{k,a} = \tilde{\beta}_{k,a}$, тогда совпадают коэффициенты в уравнениях задач L и \tilde{L} т. е. $q(x) = \tilde{q}(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если некоторое собственное число задачи L оказалось двукратным, то согласно г), оно совпадает с одним из $z_{k',0}$ и $z_{k'',\pi}$, кроме того, $\beta_{k',0} = 0$, $\beta_{k'',\pi} = 0$, так как величины $U_{1+a/\pi}(\varphi_{1,a})$ являются регулярными при $\lambda = z_{k',0}$ и $\lambda = z_{k'',\pi}$ соответственно, поэтому в этом случае величины $z_{k',0}$, $z_{k'',\pi}$, $\beta_{k',0}$, $\beta_{k'',\pi}$, задавать не надо (здесь k' и $''$ — определенные целые числа, которые легко выразить через число k , при котором k -ое собственное число $\lambda_{k,2}$ окажется двукратным).

§ 2. Доказательство теоремы единственности

Доказательство теоремы §1 разбивается на два этапа. На первом этапе надо изучить аналитическую природу решений $\varphi_{1,a}(x, \lambda)$ и $\varphi_{2,a}(x, \lambda)$ как функций переменного λ . После этого необходимо получить оценки элементов T_{ij}^a , $i, j = 1, 2$, матриц отображений $T_{\lambda,a}\varphi_{1,a} = \tilde{\varphi}_{1,a}$, $T_{\lambda,a}\varphi_{2,a} = \tilde{\varphi}_{2,a}$, (если $a = 0$, то $0 \leq x \leq \pi/2$, если $a = \pi$, то $\pi/2 < x \leq \pi$).

Точно так же, как в работе [6], мы приходим к следующим утверждениям.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Отображение $T_{\lambda,0}$ является регулярной аналитической матрицей-функцией от λ при всех значениях λ таких, что $\lambda \neq \lambda_{k,i}$, $i = 1, 2$, $\lambda \neq z_{k,0}$. Аналогично отображение $T_{\lambda,\pi}$ — регулярная аналитическая матрица-функция, если $\lambda \neq \lambda_{k,i}$, $i = 1, 2$, $\lambda \neq z_{k,\pi}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть заданы четыре полупрямые P_1, P_2, P_3, P_4 комплексной плоскости λ , определенные соответственно уравнениями $\arg \lambda = \theta_0$, $\arg \lambda = \pi - \theta_0$, $\arg \lambda = \pi + \theta_0$, $\arg \lambda = -\theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi/2$.

Пусть $T_{\lambda,0} = \|T_{ij}^0(x, \lambda)\|$, $i, j = 1, 2$, $0 \leq x \leq \pi/2$, тогда если $\lambda \in P_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $|\lambda|$ достаточно велик, то

$$|T_{12}^0(x, \lambda)| < c|\lambda|^{-1}, \quad |T_{21}^0(x, \lambda)| < c, \quad |1 - T_{11}^0(x, \lambda)| < c|\lambda|^{-1/2}, \\ |1 - T_{22}^0(x, \lambda)| < c|\lambda|^{-1/2}.$$

Если же $|\lambda| = H_k$, $k^2 \leq H_k \leq (k+1)^2$, то $|T_{ij}(x, \lambda)| < ck^c \lambda^i$, $i, j = 1, 2$, c обозначают, вообще говоря, разные константы, не зависящие от λ , k , i , j . Если $\pi/2 < x \leq \pi$ и $T_{\lambda,\pi}(x) = \|T_{ij}^\pi(x, \lambda)\|$, то аналогичные утверждения справедливы для элементов $T_{ij}^\pi(x, \lambda)$, $i, j = 1, 2$.

На втором этапе, учитывая эти утверждения, мы сможем получить доказательство теоремы единственности, если выясним вопрос о тех условиях, при которых матрицы-функции $T_{\lambda,a}(x)$ являются целыми матрицами-функциями параметра λ . Для этой цели докажем следующие леммы.

ЛЕММА 1. а) Если $\lambda = \lambda_{k,1}$, то $\varphi_{1,a}(x, \lambda_{k,1}) = y_{k,a,1}(x)$; б) если $z_{k',0} = \lambda_{k,2}$, $z_{k'',\pi} = \lambda_{k,2}$ то

$$\varphi_{2,0}(x, z_{k',0}) = \omega_1^0 z_{k',0}(x), \quad \varphi_{2,\pi}(x, z_{k'',\pi}) = \omega_1^\pi z_{k'',\pi}(x)$$

(о выборе k' и k'' смотри в §1); в) функции $\varphi_{1,0}(x, \lambda)$, $\varphi_{1,\pi}(x, \lambda)$ в окрестностях точек $z_{k',0}$ и $z_{k'',\pi}$ соответственно допускают представления

$$\varphi_{1,0}(x, \lambda) = t_0(x, \lambda)[\lambda - z_{k',0}]^{-1}, \quad \varphi_{1,\pi}(x, \lambda) = t_\pi(x, \lambda)[\lambda - z_{k'',\pi}]^{-1},$$

причем

$$t_0(x, z_{k',0}) = \omega_0^0 z_{k',0}(x), \quad t_\pi(x, z_{k'',\pi}) = \omega_0^\pi z_{k'',\pi}(x),$$

$\omega_0^a | \omega_1^a = \beta_{k,a}$, Γ функции $\varphi_{2,a}(x, \lambda)$ в окрестностях точек $\lambda = \lambda_{k,1}$ допускают представления: $\varphi_{2,a}(x, \lambda) = h_{a,1}(x) |\lambda - \lambda_{k,1}|^{-1}$, $h_{a,1}(x, \lambda_{k,1}) = \alpha_{k,a,1}^{-1} y_{k,a,1}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Составим функцию $e_{1,a}(x, \lambda) = \varphi_{1,a}(x, \lambda) - y_{k,a,1}(x)$. Заметим, что $e_{1,a}(x, \lambda_{k,1})$ — решение уравнения $le_{1,a} = \lambda_{k,1} e_{1,a}$. Далее при $\lambda = \lambda_{k,1}$ имеем, что

$$e_{1,a}(a, \lambda_{k,1}) = 0, \quad e'_{1,a}(a, \lambda_{k,1}) = \varphi'_{1,a}(a, \lambda_{k,1}), \\ -y'_{k,a,1}(a) = y'_{k,1,a}(\pi) - y_{k,a,1}(a) = 0,$$

утверждение а) доказано. Докажем утверждение б). Составим функцию $e_{2,0}(x, \lambda) = \varphi_{2,0}(x, \lambda) - z_{k',0}(x)$. Имеем, что $U_2(e_{2,0}) = 0$,

$$e_{2,0}(0, z_{k',0}) = \varphi_{2,0}(0, z_{k',0}) - z_{k',0}(0) = \varphi_{2,0}(0, z_{k',0}) = 0$$

(здесь мы воспользовались тем, что также $\lambda_{k,1} \neq z_{k',0}$). Аналогично доказывается и утверждение для $\varphi_{2,\pi}(x, z_{k'',\pi})$.

Для доказательства утверждения в) заметим, что функция, например, $t_0(x, z_{k,0})$ удовлетворяет уравнению $lt_0 = z_{k,0} t_0$ и граничным условиям

$$t_0(0, z_{k',0}) = 0, \quad U_2(t_0(x, z_{k',0})) = \lim_{\lambda \rightarrow z_{k',0}} (\lambda - z_{k',0}) U_2(\varphi_{1,0}) = 0.$$

Аналогично доказывается (с помощью применения тождеств Лагранжа) и утверждение относительно отношения чисел ω_0^a / ω_1^a , а также утверждение 2). Лемма доказана. \square

ЛЕММА 2. Пусть $\lambda = \lambda_{k,2}$, тогда а)

$$\varphi_{1,a}(x, \lambda_{k,2}) = y_{k,a,2}(x) + l_{k,a} y_{k,\pi-a,2}(x), \\ l_{k,a} = - \left[\int_0^\pi y_{k,0,2}(x) y_{k,\pi,2}(x) dx \right] \left[\int_0^\pi y_{k,\pi-a,2}(x) dx \right],$$

б) функции $\varphi_{2,a}(x, \lambda)$ в окрестностях точек $\lambda = \lambda_{k,2}$ допускают представления $\varphi_{2,a}(x, \lambda) = \frac{h_{a,2}(x, \lambda)}{\lambda - \lambda_{k,2}}$, причем

$$h_{2,a}(x, \lambda_{k,2}) = \gamma_{k,a} y_{k,\pi,2}(x) + \delta_{k,a} y_{k,0,2}(x),$$

где

$$\gamma_{k,a} = -2 \left[\int_0^\pi y_{k,\pi-a,2}(x) y_{k,0,2}(x) dx \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \Delta(\lambda_{k,2}) \right]^{-1},$$

$$\delta_{k,a} = 2 \left[\int_0^\pi y_{k,\pi-a,2}(x) y_{k,\pi,2}(x) dx \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \Delta(\lambda_{k,2}) \right]^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $\psi_{1,a}(x, \lambda)$, $\psi_{2,a}(x, \lambda)$ образуют базис пространства решений. Поэтому

$$\varphi_{1,a}(x, \lambda) = c_{1,a} \psi_{1,a}(x, \lambda) + c_{2,a} \psi_{2,a}(x, \lambda).$$

Дальнейшие рассуждения проведем для случая $a = 0$. Имеем $c_{2,0} \equiv 1$, $c_{1,0}(\lambda) = \varphi'_{1,0} = y'_{\lambda,0} = [\psi'_{1,0}(\pi, \lambda) - 1] \psi_{1,0}^{-1}(\pi, \lambda)$. Дифференцируя основное уравнение и начальные условия частным образом по λ и применяя метод вариации произвольных постоянных, нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi_{1,0}(\pi, \lambda) &= \int_0^\pi [\psi_{2,0}(\pi, \lambda) \psi_{1,0}(\xi, \lambda) - \\ &\quad - \psi_{2,0}(\xi, \lambda) \psi_{1,0}(\pi, \lambda) \psi_{1,0}(\xi, \lambda) d\xi, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi'_{1,0}(\pi, \lambda) &= \int_0^\pi \{ \psi'_{2,0}(\pi, \lambda) \psi_{1,0}(\xi, \lambda) - \\ &\quad - \psi_{2,0}(\xi, \lambda) \psi'_{1,0}(\pi, \lambda) \} \psi_{1,0}(\xi, \lambda) d\xi. \end{aligned}$$

Значит, если учесть, что $\psi'_{2,0}(\pi, \lambda_{k,2}) = \psi_{1,0}(\pi, \lambda_{k,2}) = 0$, $\psi_{2,0}(\pi, \lambda_{k,2}) = \psi'_{1,0}(\pi, \lambda_{k,2}) = 1$, получим требуемое выражение для $c_{1,0}(\lambda_{k,2}) = l_{k,0}$, доказательство утверждения а) закончено, если вспомнить, что $\psi_{2,0}(x, \lambda_{k,2}) = y_{k,0,2}(x)$, $\psi_{1,0}(x, \lambda_{k,2}) = y_{k,\pi,2}(x)$,

Докажем утверждение б). Поскольку

$$\varphi_{2,a}(x, \lambda) = \begin{vmatrix} \psi_{1,a}(x, \lambda) & \psi_{2,a}(x, \lambda) \\ U_{2-a/\pi}(\psi_{1,a}) & U_{2-a/\pi}(\psi_{2,a}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{1+a/\pi}(\psi_{1,a}) & U_{1+a/\pi}(\psi_{2,a}) \\ U_{2-a/\pi}(\psi_{1,a}) & U_{2-a/\pi}(\psi_{2,a}) \end{vmatrix}^{-1},$$

то, вообще говоря, разложение Лорана $\varphi_{2,a}(x, \lambda)$ в окрестности точки $\lambda = \lambda_{k,2}$ должно иметь вид

$$\varphi_{2,a}(x, \lambda) = \frac{h_a^2(x)}{(\lambda - \lambda_{k,2})^2} + \frac{h_a^1(x)}{(\lambda - \lambda_{k,2})} + \dots$$

Покажем, что $h_a^2(x) = 0$. Действительно, если раскрыть определитель, стоящий в числителе $\varphi_{2,a}(x, \lambda)$, то получим, что он равен

$$[\psi_{1,a}(x, \lambda)U_{2-a/\pi}(\psi_{2,a}) - \psi_{2,a}(x, \lambda)U_{2-a/\pi}(\psi_{1,a})]_{\lambda=\lambda_{k,2}} \equiv 0,$$

так как

$$U_{2-a/\pi}(\psi_{2,a})|_{\lambda=\lambda_{k,2}} = 0, \quad U_{2-a/\pi}(\psi_{1,a})|_{\lambda=\lambda_{k,2}} = 0.$$

Значит, для $\varphi_{2,a}(x, \lambda)$ верно представление:

$$\varphi_{2,a}(x, \lambda) = h_{2,a}(x, \lambda)(\lambda - \lambda_{k,2})^{-1}$$

и $h_{2,a}(x, \lambda)$ регулярна при $\lambda = \lambda_{k,2}$. Поэтому

$$h_{2,a}(x, \lambda) = k_{1,a}(\lambda) \psi_{1,a}(x, \lambda) + k_{2,a}(\lambda) \psi_{2,a}(x, \lambda).$$

Вычислим коэффициенты в точках $\lambda = \lambda_{k,2}$. Имеем, что $k_{2,a}(\lambda) = h_{2,a}(a, \lambda)$, $k_1 = h'_{2,a}(a, \lambda)$, т. е.

$$\begin{aligned} k_{2,a}(\lambda_{k,2}) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{k,2}} \varphi_{2,a}(a, \lambda)(\lambda - \lambda_{k,2}) = \\ &= -(-1)^{a/\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{k,2}} \frac{2 \frac{\partial}{\partial \lambda} U_{2-a/\pi}(\psi_{1,a})}{\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \Delta(\lambda)} = \\ &= \frac{2 \int_0^\pi \psi_{1+a/\pi,a}(x, \lambda_{k,2}) \psi_{1,a}(x, \lambda_{k,2}) dx}{\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \Delta(\lambda_{k,2})} = \delta_{k,a}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $\det \|U_i(\psi_{j,a})\| = \det \|U_i(\psi_{j,\pi})\|$, $i, j = 1, 2$. Аналогично получаем, что $k_{1,a}(\lambda_{k,2}) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{k,2}} \varphi'_{2,a}(a, \lambda)(\lambda - \lambda_{k,2}) = \gamma_{k,a}$.

Лемма доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко вычислить, что

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \Delta(\lambda_{k,2}) = -2 \int_0^\pi [y_{k,\pi}(x) y'_{k,0}(x) - y_{k,0}(x) y'_{k,\pi}(x)] dx.$$

ЛЕММА 3. Пусть $\lambda = \lambda_{k,1}$ — однократное собственное число задачи. Функции

$$\xi_{1,a}^1(x, \lambda) = \varphi_{1,a}(x, \lambda), \quad \xi_{2,a}^1(x, \lambda) = \varphi_{2,a}(x, \lambda) - \frac{\varphi_{1,a}(x, \lambda)}{\alpha_{k,a,1}(\lambda - \lambda_{k,1})}$$

являются аналитическими функциями в окрестности точек $\lambda_{k,1}$, регулярными в самих точках; аналогично $\xi_{1,a}^2(x, \lambda) = \varphi_{1,a}(x, \lambda) - \beta_{k,a} \varphi_{2,a}(x, \lambda)(\lambda - z_{k,a})^{-1}$, $\xi_{2,a}^2(x, \lambda) = \varphi_{2,a}(x, \lambda)$ аналитичны в окрестностях точек $\lambda = z_{k,a}$, регулярны в самих точках $\lambda = z_{k,a}$. Если $\lambda = \lambda_{k,2}$, то $\eta_{1,a}(x, \lambda) = \varphi_{1,a}(x, \lambda)$ регулярны в точках $\lambda = \lambda_{k,2}$, функции $\eta_{2,a}(x, \lambda) = \varphi_{2,a}(x, \lambda) - \frac{2\varphi_{1,a}(x, \lambda)}{\alpha_{k,a,2}(\lambda - \lambda_{k,2})}$ аналитичны в окрестности точек $\lambda = \lambda_{k,2}$ регулярны в самих точках.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения для функций $\xi_{i,a}^j(x, \lambda)$, $i, j = 1, 2$, следуют из соответствующих утверждений леммы 1, т. е. эти функции регулярны в окрестностях точек $\lambda_{k,1}$ и $z_{k,a}$ отличных от точек $\lambda_{k,1}$. Утверждения леммы для функции $\eta_{i,a}(x, \lambda)$ следуют из леммы 2. Таким образом, лемма доказана. \square

Простым подсчетом сравнительно просто доказывается следующая

ЛЕММА 4. При $\lambda \neq z_{k,0}$, $\lambda \neq \lambda_{k,i}$ функции $\varphi_{1,0}(x, \lambda)$, $\varphi_{2,0}(x, \lambda)$ как функции переменного x линейно независимы между собой и их определитель Вронского равен 1. Аналогичное утверждение справедливо и для функций $\varphi_{1,\pi}(x, \lambda)$, $\varphi_{2,\pi}(x, \lambda)$, если $\lambda \neq z_{k,\pi}$, $\lambda \neq \lambda_{k,i}$, $i = 1, 2$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Определители Вронского $W(\xi_{1,a}^j, \xi_{2,a}^j) = 1$, $j = 1, 2$; аналогично $W(\eta_{1,a}, \eta_{2,a}) = 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda_{k,i} = \lambda_{k,i}$, $\alpha_{k,a,i} = \alpha_{k,a,i}$, $i = 1, 2$, $z_{k,a} = z_{k,a}$, $\beta_{k,a} = \beta_{k,a}$, тогда совпадают коэффициенты в уравнениях задач L и \bar{L} т. е. $q(x) = \bar{q}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждениям 1 и 2, а также леммам 3 и 4 и, учитывая линейность отображений $T_{\lambda,a}$ (т. е. тот факт, что

$$T_{\lambda,a}\xi_{i,a}^j(x, \lambda) = \tilde{\xi}_{i,a}^j(x, \lambda), \quad T_{\lambda,a}\eta_{i,a}(x, \lambda) = \tilde{\eta}_{i,a}(x, \lambda)),$$

мы можем заключить, что отображения $T_{k,a}(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы типа Фрагмена—Линделефа. Поэтому $T_{11}^a(x, \lambda) \equiv 1$, $T_{12}^a(x, \lambda) \equiv 0$, а, значит, $\varphi_{i,0}(x, \lambda) = \tilde{\varphi}_{i,0}(x, \lambda)$, если $0 \leq x \leq \pi/2$, $\varphi_{i,\pi}(x, \lambda) = \tilde{\varphi}_{i,\pi}(x, \lambda)$, если $\pi/2 < x \leq \pi$, $i = 1, 2$. Поскольку эти функции линейно независимы, то $q(x) = \bar{q}(x)$. Теорема доказана. \square

Литература

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Изв. АН СССР, сер. матем., 16, 1951.

2. Марченко В. А. Труды Моск. матем. об-ва, **1**, 1952, С. 327—420.
3. Крейн М. Г. ДАН СССР, № 1, 1951.
4. Лейбензон З. Л. Труды Моск. матем. об-ва, **15**, 1965, С. 70—144.
5. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., Наука, 1969.
6. Садовничий В. А. ДАН СССР, **206**, № 2, 1972.