УДК 517.927.26

Единственность решения обратной задачи для уравнения второго порядка с нераспадающимися краевыми условиями[1]

В. А. Садовничий

В настоящей статье содержится доказательство единственности решения обратной задачи для уравнения второго порядка, заданного на отрезке $[0, \pi]$, при общих краевых условиях, то есть когда граничные формы содержат комбинации значений функции в точке 0 и в точке π.

Для распадающихся граничных условий (условия Штурма-Лиувилля) разработано несколько методов решения обратной задачи (см. [1—5]). И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан дали полное решение этой задачи, построив доказательство на использовании операторов преобразования. В работе [4] при решении ее для уравнения порядка $n \geqslant 2$ и распадающихся граничных условий применен другой метод, в котором вместо операторов преобразования использованы определенные отображения T_λ пространств решений, задаваемые матрицами.

При решении обратной задачи для нераспадающихся краевых условий возникают трудности, связанные с применением операторов преобразования. Поэтому мы используем отображения пространств решений. Однако и при применении этого способа решения возникает ряд сложностей (например, нет единообразных асимптотик главных решений, равномерных по всем $0 \leqslant x \leqslant \pi$). Тем не менее удается доказать теорему единственности, которая является естественным обобщением аналогичных теорем задачи Штурма-Лиувилля.

[1]Вестник МГУ, сер. 1. матем., мех., № 1, 1974. с. 143–151

§ 1. Обозначения. Формулировка теоремы

Мы рассматриваем следующую задачу:

$$
\begin{gathered}
ly = -y'' + q(x)y = \lambda y = s^2 y,\\
U_1(y) = y'(0) + \alpha_{11}y(0) + \alpha_{12}y(\pi) = 0,\\
U_2(y) = y'(\pi) + \alpha_{21}y(0) + \alpha_{22}y(\pi) = 0
\end{gathered}
$$

($g(x)$ — суммируемая функция, α_{ij}, $i, j = 1, 2,$ — комплексные постоянные).

Эту задачу в дальнейшем будем называть задачей L. Условимся в дальнейшем задачу типа L, но с другими коэффициентами в уравнении и с другими параметрами в граничных формах, обозначать $\tilde{L}$. Всюду будем считать, что если некоторый символ обозначает объект, относящийся к задаче L, то этот же символ с "волной" наверху обозначает аналогичный объект задачи $\tilde{L}$. Целочисленный индекс k будем всюду считать меняющимся от 1 до ∞. Символ a, встречающийся в качестве индекса будем считать всюду принимающим только два значения 0 и π.

Пусть λ_k — собственные числа задачи L, а $y_{k,0}(x)$ и $y_{k,\pi}(x)$ — собственные функции, им отвечающие, и нормированные условиями $y_{k,0}(0) = 1$ и $y_{k,\pi}(\pi) = 1$ соответственно. Пусть $f_{k,0}(x)$ и $f_{k,\pi}(x)$ — аналогично определяемые собственные функции сопряженной с L задачи. Заметим, что спектральным параметром в сопряженных задачах считаем параметр λ, а не $\bar{\lambda}$.

Предположим, что все собственные числа рассматриваемых задач однократны. Пусть

$$(-1)^{a/\pi} \cdot \alpha_{k,a}(x)\tilde{f}_{k,a}(x)\,dx.$$

Будем использовать функции $\varphi_{1,a}(x,\lambda)$, $\varphi_{2,a}(x,\lambda)$, которые назовем главными решениями:

$$
\begin{gathered}
l\varphi_{1,a}(x,\lambda) = \lambda\varphi_{1,a}(x,\lambda),\ \varphi_{1,0}(0,\lambda) = 1,\ \varphi'_{1,0}(0,\lambda) = -\alpha_{11} - \alpha_{12}y_{k,0}(\pi),\\
\varphi_{1,\pi}(\pi,\lambda) = 1, \quad \varphi'_{1,\pi}(\pi,\lambda) = -\alpha_{22} - \alpha_{21}y_{\lambda,\pi}(0),
\end{gathered}
$$

а также

$$
\begin{gathered}
l\varphi_{2,a}(x,\lambda) = \lambda\varphi_{2,a}(x,\lambda), \qquad U_1(\varphi_{2,0}) = 1, \qquad U_2(\varphi_{2,0}) = 0,\\
U_1(\varphi_{2,\pi}) = 0, \qquad U_2(\varphi_{2,\pi}) = 1.
\end{gathered}
$$

Функции $y_{\lambda,a}(x)$ определяются следующим образом:

$$y_{\lambda,a}(x) = \begin{vmatrix} \psi_{1,a}(x) & \psi_{2,a}(x) \\ U_{2-a/\pi}(\psi_{1,a}) & U_{2-a/\pi}(\psi_{2,a}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_{1,a}(a) & \psi_{2,a}(a) \\ U_{2-a/\pi}(\psi_{1,a}) & U_{2-a/\pi}(\psi_{2,a}) \end{vmatrix}^{-1},$$

где $\psi_{1,a}(x)$ и $\psi_{2,a}(x)$ — два линейно независимых решения, таких, что

$$\psi_{1,a}(a) = 0, \qquad \psi'_{1,a}(a) = 1, \qquad \psi_{2,a}(a) = 1, \qquad \psi'_{2,a}(a) = 0.$$

Наряду с задачей L, рассмотрим две задачи с распадающимися граничными условиями. Задачу L_0:

$$lu = zu, \qquad u(0) = 0, \qquad U_2(u) = 0$$

и L_π:

$$lv = zv, \qquad v(\pi) = 0, \qquad U_1(v) = 0.$$

Пусть $z_{k,0}$, $z_{k,\pi}$ — собственные числа этих задач соответственно, а отвечающие им собственные функции обозначим $z_{k,0}(x)$ и $z_{k,\pi}(x)$.

Обозначим, наконец, через $\beta_{k,a}$ вычеты функций $\varphi_a(\lambda)$:

$$\varphi_0(\lambda) = \varphi'_{1,0}(0,\lambda) + \alpha_{12}\varphi_{1,0}(\pi,\lambda),$$
$$\varphi_\pi(\lambda) = \varphi'_{1,\pi}(\pi,\lambda) + \alpha_{21}\varphi_{1,\pi}(0,\lambda),$$

в точках $z_{k,0}$ и $z_{k,\pi}$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть*

$$\lambda_k = \tilde{\lambda}_k, \qquad \alpha_{k,a} = \tilde{\alpha}_{k,a} \qquad z_{k,a} = \tilde{z}_{k,a}, \qquad \beta_{k,a} = \tilde{\beta}_{k,a}.$$

Тогда совпадают коэффициенты уравнений и константы в граничных условиях задач L и $\tilde{L}$, то есть $q(x) = \tilde{q}(x)$, $\alpha_{ij} = \tilde{\alpha}_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Замечание 1. Отметим, что, в отличие от случая с распадающимися граничными условиями, нам пришлось рассматривать данные уже трех задач: L, L_0, L_π.

Замечание 2. Если $\alpha_{12} = 0$, $\alpha'_{21} = 0$, то $\beta_{k,a} = \tilde{\beta}_{k,a} = 0$, а множества особенностей $\varphi_{1,a}$, $\tilde{\varphi} - \{z_{k,a}\}$, $\{z_{k,a}\}$ пусты. Поэтому формулировка теоремы совпадает с ранее известными формулировками теорем единственности обратных задач в случае распадающихся граничных условий.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Функции $\varphi_{1,a}(x,\lambda)$ суть аналитические функции от λ, регулярные при всех $\lambda \neq z_{k,a}$. При $\lambda = z_{k,a}$ функции $\varphi_{1,a}(x,\lambda)$ имеют особенности типа полюсов. Функции $\varphi_{2,a}(x,\lambda)$ также суть аналитические функции от λ, регулярные при $\lambda \neq \lambda_k$, а при $\lambda = \lambda_k$ они имеют особенности типа полюсов. При $\lambda \neq z_{k,0}$, $\lambda \neq \lambda_k$ функции $\varphi_{1,0}(x,\lambda)$ и $\varphi_{2,0}(x,\lambda)$ как функции переменного x линейно независимы между собой и их определитель Вронского равен 1. Аналогичное утверждение справедливо и для функций $\varphi_{1,\pi}(x,\lambda)$, $\varphi_{2,\pi}(x,\lambda)$, если $\lambda \neq z_{k,\pi}$, $\lambda \neq \lambda_k$.*

Доказательство. Проведем доказательство об аналитической зависимости для функции $\varphi_{1,0}(x,\lambda)$, для остальных функций оно аналогично. Имеем

$$\varphi_{1,0}(x,\lambda) = \psi_{2,0}(x) - (\alpha_{11} + \alpha_{12} y_{\lambda,0}(\pi))\,\psi_{1,0}(x).$$

Функции $\psi_{1,0}(x)$ и $\psi_{2,0}(x)$ — целые функции λ (они определяются условиями Коши). Поэтому особенности $\varphi_{1,0}(x,\lambda)$ по λ совпадают с особенностями $y_{\lambda,0}(\pi)$. Эта функция имеет особенности на спектре задачи L_0, то есть в точках $z_{k,0}$. Посчитаем определитель Вронского, например, функций $\varphi_{1,0}$, $\varphi_{2,0}$. Вычислим его в точке нуль. Имеем

$$W(\varphi_{1,0},\varphi_{2,0}) = \varphi_{1,0}(0,\lambda)\varphi'_{2,0}(0,\lambda) - \varphi_{2,0}(0,\lambda)\varphi'_{1,0}(0,\lambda) = \\ = 1 + \alpha_{12}[\varphi_{2,0}(0,\lambda) y_{\lambda,0}(\pi) - \varphi_{2,0}(\pi,\lambda)].$$

Заметим , что

$$y_{\lambda,0}(\pi) = [1 - \alpha_{21}\psi_{1,0}(\pi)]/[\psi'_{1,0}(\pi) + \alpha_{22}\psi_{1,0}(\pi)],$$

а

$$\varphi_{2,0}(\pi,\lambda) = \varphi'_{2,0}(0,\lambda)\psi_{1,0}(\pi) + \varphi_{2,0}(0,\lambda)\psi_{2,0}(\pi).$$

Поэтому нам надо доказать, что

$$\varphi_{2,0}(0,\lambda) - \alpha_{21}\varphi_{2,0}(0,\lambda)\psi_{1,0}(\pi) - \\ -[\varphi'_{2,0}(0,\lambda)\psi_{1,0}(\pi) + \varphi_{2,0}(0,\lambda)\psi_{2,0}(\pi)], [\psi'_{1,0}(\pi) + \alpha_{22}\psi_{1,0}(\pi)] = 0.$$

Для $\psi_{1,0}(\pi)$ нетрудно найти выражение

$$\psi'_{1,0}(\pi) = \frac{-a_{21}\varphi_{2,0}(0,\lambda)\psi_{1,0}(\pi) - a_{22}\varphi_{2,0}(\pi,\lambda)\psi_{1,0}(\pi) + \varphi_{2,0}(0,\lambda)}{\varphi'_{2,0}(0,\lambda)\psi_{1,0}(\pi) + \varphi_{2,0}(0,\lambda)\psi_{2,0}(\pi)}.$$

Подставив его в равенство, которое надо доказать, и учтя выражение для $\varphi_{2,0}(\pi,\lambda)$, получим тождественный нуль. Поэтому $W(\varphi_{1,0},\varphi_{2,0})=1$. Лемма доказана $\square$

Хорошо известно, что в рассматриваемом случае собственные числа λ_k задачи при достаточно больших k однократны и выражаются асимптотическими формулами

$$\lambda_k' = (2k)^2\left[1+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]^2, \quad \lambda_k''(2k+1)^2\left[1+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]^2.$$

Аналогично этому

$$z_{k,a} = \left(k+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left[1+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]^2.$$

Предположим в дальнейшем, что $\lambda_k \neq z_{k',a}$. Учитывая это исследуем асимптотику $\varphi_{1,a}(x,\lambda)$, $\varphi_{2,a}(x,\lambda)$ при $\lambda\to\infty$, $\arg\lambda=\gamma=\mathrm{const}$, $\gamma\neq 0$, π и фиксированном x.

Справедлива

Лемма 2. *Если* $\lambda\to\infty$ *и* $\arg\lambda=\mathrm{const}=\gamma$, $\gamma\neq 0$, π, *то при фиксированном* $0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\varphi_{1,0}(x,\lambda)=\frac{1}{2}e^{\omega_{q_1}sx}[1], \qquad \varphi_{1,0}'(x,\lambda)=\frac{s}{2}e^{\omega_{q_1}sx}[\omega_{q_1}],$$
$$\varphi_{2,0}(x,\lambda)=-\frac{1}{s}e^{\omega_{q_2}sx}[\omega_{q_2}], \qquad \varphi_{2,0}'(x,\lambda)=e^{\omega_{q_2}sx}[1].$$

Если $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$, *то*

$$\varphi_{1,\pi}(x,\lambda)=\frac{1}{2}e^{\omega_{q_1}s(\pi-x)}[1], \quad \varphi_{1,\pi}'(x,\lambda)=-\frac{s}{2}e^{\omega_{q_1}sx}[\omega_{q_1}],$$
$$\varphi_{2,\pi}(x,\lambda)=\frac{1}{s}e^{\omega_{q_2}s(\pi-x)}[\omega_{q_2}], \quad \varphi_{2,\pi}'(x,\lambda)=e^{\omega_{q_2}s(\pi-x)}[1].$$

Здесь мы, следуя Биркгоффу, ввели обозначения:

$$1+O\left(\frac{1}{s}\right)=[1], \qquad s\to\infty,$$

а $s=\sqrt{\lambda}=s_0|s|$, $s_0=\mathrm{const}$, $|s_0|=1$, $\arg s_0^2=\gamma\neq 0$, π, $\mathrm{Re}(\omega_{q_1}s_0)>$ $>\mathrm{Re}(\omega_{q_2}s_0)$, *где* q_1 *и* q_2 *совпадают с числами 1 или 2, записанными в ином порядке,* ω_1, ω_2 *— корни второй степени из минус единицы.*

Доказательство. Пусть, например, $\varphi_{2,0}(x,\lambda) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — два линейно независимых решения, таких, что во всякой области T комплексной s-плоскости они регулярны при $|s|$, достаточно большом, линейно независимы и $y_q^\nu(x) = s^\nu e^{s\omega_q x}[\omega_q^\nu]$, где $\nu = 0, 1$ [5]. Значит

$$c_1U_1(y_1) + c_2U_1(y_2) = 1, \qquad c_1U_2(y_1) + c_2U_2(y_2) = 0.$$

Пусть

$$\Delta = U_1(y_1)U_2(y_2) - U_1(y_2)U_2(y_1).$$

Тогда

$$c_1 = \frac{U_2(y_2)}{\Delta}, \qquad c_2 = -\frac{U_2(y_1)}{\Delta},$$

но, как отмечено,

$$y_q^\nu(0) = s^\nu[\omega_q^\nu], \qquad y_q^\nu(\pi) = s^\nu e^{s\omega_q\pi}[\omega_q^\nu] \qquad \nu = 0,1 \quad q = 1,2.$$

Значит,

$$\begin{aligned} U_2(y_2) &= se^{s\omega_2\pi}[\omega_2] + \alpha_{21}[1] + \alpha_{22}e^{s\omega_2\pi}[1],\\ U_2(y_1) &= se^{s\omega_1\pi}[\omega_1] + \alpha_{21}[1] + \alpha_{22}e^{s\omega_1\pi}[1],\\ U_1(y_1) &= s[\omega_1] + \alpha_{11}[1] + \alpha_{12}e^{s\omega_1\pi}[1],\\ U_1(y_2) &= s[\omega_2] + \alpha_{11}[1] + \alpha_{12}e^{s\omega_2\pi}[1]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Delta = s^2e^{s\omega_1\pi}[1] - s^2e^{s\omega_2\pi}[1] + s[h],$$

h — некоторое число, отличное от нуля, если $\alpha_{21} - \alpha_{12} \neq 0$. Учтя выражение для Δ и для $U_2(y_2)$, $U_2(y_1)$, получим, что

$$c_1 = -\frac{[\omega_{q2}]}{s}, \qquad c_2 = O\left(\frac{1}{s^2}\right)e^{\omega_{q2}s\pi};$$

$$\varphi_{2,0}(x,\lambda) = -\frac{[\omega_{q2}]}{s}e^{s\omega_{q2}x} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)e^{s\omega_{q2}(\pi-x)} = -\frac{1}{s}e^{s\omega_{q2}x}[\omega_{q2}],$$

если $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, а ω_{q2} выбирается так, как сказано в условии леммы. Доказательство формулы для асимптотического выражения функции $\varphi_{2,\pi}(x,\lambda)$ аналогично. Проведем теперь доказательство асимптотического выражения для функции $\varphi_{1,0}(x,\lambda)$. Для этого необходимо получить асимптотику функции $y_{\lambda,0}(\pi)$ по λ. Нетрудно убедиться, что

$$\psi_{1,0}(x) = \frac{\sin sx}{s}[1], \qquad \psi_{2,0}(x) = \cos sx[1].$$

Поэтому

$$y_{\lambda,0}(\pi) = [1 - \alpha_{21}\psi_{1,0}(\pi)][\psi'_{1,0}(\pi) + \alpha_{22}\psi_{1,0}(\pi)]^{-1} = \left(\frac{1}{s}\right)$$

при $\arg\lambda = \gamma \neq 0, \pi$. Значит,

$$\varphi_{1,0}(x,\lambda) = \psi_{2,0}(x) - [\alpha_{11} + \alpha_{12}y_{\lambda,0}(\pi)]\psi_{1,0}(x,\lambda) = \frac{1}{2}\, e^{\omega_{q_1} sx}[1]$$

при указанных значениях λ, а ω_q выбирается так, как указано в формулировке леммы. Аналогично доказывается представление для $\varphi_{1,\pi}(x,\lambda)$, а также представления для производных всех функций. □

Известными методами доказывается

Лемма 3. *Можно подобрать такие числа H_k, $k^2 \leqslant H_k \leqslant (k+1)^2$, чтобы при $|\lambda| = H_k$, и $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$*

$$|\varphi_{1,0}(x,\lambda)| \leqslant ce^{c|\lambda|}, \qquad |\varphi_2(x,\lambda)| \leqslant ce^{c|\lambda|},$$

а также при $\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$

$$|\varphi_{1,\pi}(x,\lambda)| \leqslant ce^{c|\lambda|}, \qquad |\varphi_{2,\pi}(x,\lambda)| \leqslant ce^{c|\lambda|}.$$

Здесь c обозначает, вообще говоря, разные константы.

Обозначим через $T_{\lambda,0}$ линейное отображение (при каждом λ) пространства решений уравнения $l\varphi = \lambda\varphi$ в пространство решений уравнения $\tilde{l}\tilde{\varphi} = \lambda\tilde{\varphi}$, такое, что

$$T_{\lambda,0}\varphi_{1,0}(x,\lambda) = \tilde{\varphi}_{1,0}(x,\lambda),\ T_{\lambda,0}\varphi_{2,0}(x,\lambda) = \tilde{\varphi}_{2,0}(x,\lambda) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2.$$

Пусть $T_{\lambda,\pi}$ аналогично обозначает отображение указанных выше пространств, такое, что

$$T_{\lambda,\pi}\varphi_{1,\pi}(x,\lambda) = \tilde{\varphi}_{1,\pi}(x,\lambda), \quad T_{\lambda,\pi}\varphi_{2,\pi}(x,\lambda) = \tilde{\varphi}_{2,\pi}(x,\lambda) \quad \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Отображение $T_{\lambda,0}$ точек φ порождает линейное отображение $T_{\lambda,0}(x)$ ($0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, выраженное в виде матрицы, векторов $\vec{\varphi}(x) \in E_2$ в векторы $\vec{\tilde{\varphi}}(x) \in E_2$. Поэтому отображение $T_{\lambda,0}(x)$ можно рассматривать, как матрицу, определенную равенством (при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$):

$$T_{\lambda,0}(x)\begin{Vmatrix} \varphi_{1,0}(x,\lambda) & \varphi_{2,0}(x,\lambda) \\ \varphi'_{1,0}(x,\lambda) & \varphi'_{2,0}(x,\lambda) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \tilde{\varphi}_{1,0}(x,\lambda) & \tilde{\varphi}_{2,0}(x,\lambda) \\ \tilde{\varphi}'_{1,0}(x,\lambda) & \tilde{\varphi}'_{2,0}(x,\lambda) \end{Vmatrix}.$$

Такие же рассуждения можно привести для отображения $T_{\lambda,\pi}$.

Из леммы 1 следует

Утверждение 1. *Отображение $T_{\lambda,0}$ является регулярной аналитической функцией от λ при всех значениях λ, таких, что $\lambda \neq \lambda_k$, $\lambda \neq z_{k,0}$. Аналогичное отображение $T_{\lambda,\pi}$ — регулярная аналитическая функция λ, если $\lambda \neq \lambda_k$, $\lambda \neq z_{k,\pi}$.*

Учитывая результаты лемм 2 и 3 и используя методику, примененную в работе [4] при доказательстве теоремы 3, приходим к выводу, что справедливо

Утверждение 2. *Пусть заданы четыре полупрямые P_1, P_2, P_3, P_4 комплексной плоскости λ, определенные соответственно уравнениями* $\arg\lambda = \theta_0$, $\arg\lambda = \pi - \theta_0$, $\arg\lambda = \pi + \theta_0$, $\arg\lambda = -\theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi/2$, *и пусть*

$$T_{\lambda,0}(x) = \begin{Vmatrix} T^0_{1,1}(x,\lambda) & T^0_{1,2}(x,\lambda) \\ T^0_{2,1}(x,\lambda) & T^0_{2,2}(x,\lambda) \end{Vmatrix}.$$

Тогда, если $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ и $\lambda \in P_i$, $i = 1,2,3,4$ и $|\lambda|$ достаточно велик, то

$$|T^0_{1,2}(x,\lambda)| \leqslant c|\lambda|^{-1}, \quad |T^0_{2,1}(x,\lambda)| \leqslant c, \quad |1 - T^0_{1,1}(x,\lambda)| \leqslant c|\lambda|^{-1/2},$$
$$|1 - T^0_{2,2}(x,\lambda)| \leqslant c|\lambda|^{-1/2}.$$

Если же $|\lambda| = H_k$, то $|T^0_{ij}(x,\lambda) \leqslant ce^{c|\lambda|}$, $i,j = 1,2$, c обозначает, вообще говоря, разные константы, не зависящие от λ,k, i, j. Если $\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$ и

$$T_{\lambda,\pi}(x) = \begin{Vmatrix} T^\pi_{1,1}(x,\lambda) & T^\pi_{1,2}(x,\lambda) \\ T^\pi_{2,1}(x,\lambda) & T^\pi_{2,2}(x,\lambda) \end{Vmatrix},$$

то аналогичное утверждение справедливы для элементов

$$T^\pi_{i,j}(x,\lambda), \qquad i,j = 1.2.$$

§ 3. Доказательство теоремы единственности

В дальнейшем важную роль будут играть следующие две леммы.

Лемма 4. *Если $\lambda = \lambda_k$, то:* а) $\varphi_{1,a}(x,\lambda) = y_{k,a}(x)$; б) $\varphi_{2,a}(x, z_{k,a}) = \omega_1^a z_{k,a}(x)$; в) *функции $\varphi_{1,a}(x,\lambda)$ в окрестности точек $z_{k,a}$ допускают представление: $\varphi_{1,a}(x,\lambda) = t_a(x,\lambda)/(\lambda - z_{k,a})$, причем справедливы равенства*

$$t_a(x, z_{k,a}) = \omega_0^a z_{k,a}(x), \qquad \beta_{k,a} = \frac{\omega_0^a}{\omega_1^a};$$

г) *функции $\varphi_{2,a}(x,\lambda)$ в окрестности точек $\lambda = \lambda_k$ допускают представление: $\varphi_{2,a}(x,\lambda) = h_a(x,\lambda)/(\lambda - \lambda_k)$, где $h_a(x,\lambda_k) = \alpha^{-1}_{k,a} y_{k,a}(x)$.*

Доказательство. Проверим равенство а); составим для этого функции
$$e_{1,a}(x,\lambda)=\varphi_{1,a}(x,\lambda)-y_{k,a}(x).$$
Заметим, что $e_{1,a}(x,\lambda_k)$ — решения уравнений $le_{1,a}=\lambda_k e_{1,a}$. Далее при $\lambda=\lambda_k$ имеем, что
$$e_{1,a}(a,\lambda)=0,\qquad e'_{1,a}(a,\lambda_k)=\varphi'_{1,a}(a,\lambda_k)-y'_{k,a}(a)=0.$$

Докажем утверждение б). Пусть
$$e_{2,a}(x,\lambda)=\varphi_{2,a}(x,\lambda)-z_{k,a}(x).$$
Тогда $e_{2,a}$ — решения уравнений так же, как и $e_{1,a}$. Кроме того,
$$U_{2-a/\pi}(e_{2,a})=0,\qquad e_{2,a}(a,\lambda)=\varphi_{2,a}(a,\lambda)-z_{k',a}(a)=\varphi_{2,a}(a,\lambda).$$
Если положим $\lambda=z_{k,a}$, то получим. что $\varphi_{2,a}(a,z_{k,a})=0$, поскольку это согласно определению $\varphi_{2,a}(x,\lambda)$ суть характеристические определители задач L_a. Здесь мы воспользовались тем, что $\lambda_k\neq z_{k',a}$. Таким образом, $e_{2,a}(x,z_{k,a})$ — собственные функции задач L_a и, значит, они пропорциональны функциям $z_{k,a}(x)$.

Докажем утверждение в). Составим функции $g_a(x,\lambda)=t_a(x,\lambda)-$ $-z_{k,a}(x)$. Тогда $g_a(a,z_{k,a})=t_a(a,z_{k,a})=0$, а функции $t_a(x,z_{k,a})$ удовлетворяют уравнению
$$lt_a(x,z_{k,a})=z_{k,a}t_a(x,z_{k,a})$$
и граничному условию
$$t_a(a,z_{k,a})=\lim_{\lambda\to z_{k,a}}(\lambda-z_{k,a})=0.$$
Далее, $U_{2-a/\pi}(g_a)=U_{2-a/\pi}(t_a)$. Заметим, например, для $\varphi_{1,0}(x,\lambda)$, что, как следует из представления
$$\varphi_{1,0}(x,\lambda)=\psi_{2,0}(x)-\alpha_{11}\psi_{1,0}(x)-\alpha_{12}y_{\lambda,0}(\pi)\psi_{1,0}(x),$$
величина $U_2(\varphi_{1,0})$ регулярна при $\lambda=z_{k,0}$. Поэтому
$$U_2(t_0(x,z_{k,0}))=\lim_{\lambda\to z_{k,0}}(\lambda-z_{k,0})\,U_2(\varphi_{1,0})=0;$$
аналогично, $U_1(t_\pi(x,z_{k,\pi}))=0$. Поэтому функция $g_0(x,z_{k,a})$ пропорциональна $z_{k,a}(x)$, что и требовалось. Определим, наконец, отношение $\omega_0^a/\omega_1^a=\beta_{k,a}$. Для этого заметим, что если применим тождество

Лагранжа к функциям $\varphi_{2,a}(x,\lambda)$ и $f_{k,a}(x)$, получим, что

$$(\lambda-\lambda_k)\int_0^\pi \varphi_{2,a}(x,\lambda)\bar f_{k,a}(x)\,dx = (-1)^{a/\pi}.$$

Перейдя здесь к пределу при $\lambda\to z_{k,a}$. Найдем, что

$$\omega_1^a=\gamma_a^{-1}(z_{k,a}-\lambda_k)^{-1},\quad (-1)^{a/\pi}\cdot\gamma_a=\int_0^\pi z_{k,a}(x)\bar f_{k,a}(x)\,dx.$$

Аналогично имеем

$$(\lambda-\lambda_k)\int_0^\pi \varphi_{1,0}(x,\lambda)\bar f_{k,0}(x)\,dx = U_1(\varphi_{1,0})\bar f_{k,0}(0)-U_2(\varphi_{1,0})\bar f_{k,0}(\pi),$$

или

$$\begin{gathered}(z_{k,0}-\lambda_k)\omega_0^0\int_0^\pi z_{k,0}(x)\bar f_{k,0}(x)\,dx=\\ =\lim_{\lambda\to z_{k,0}}(\lambda-z_{k,0})\cdot[\varphi_{1,0}'(0,\lambda)+\alpha_{12}\varphi_{1,0}(\pi,\lambda)]=\beta_{k,0}.\end{gathered}$$

Отсюда и из выражения для ω_1^0 получаем, что $\omega_0^0/\omega_1^0=\beta_{k,0}$; точно так же $\omega_0^\pi/\omega_1^\pi=\beta_{k,\pi}$. Аналогично доказывается и утверждение для $h_a(x,\lambda)$. □

Лемма 5. *Функции*

$$\xi_{1,a}^1(x,\lambda)=\varphi_{1,a}(x,\lambda).\quad \xi_{2,a}^1(x,\lambda)=\varphi_{2,a}(x,\lambda)-\frac{\varphi_{1,a}(x,\lambda)}{a_{k,a}(\lambda-\lambda_k)}$$

являются аналитическими функциями в окрестности точек λ_k, регулярными в этих точках. Аналогично, функция

$$\xi_{1,a}^2(x,\lambda)=\varphi_{1,a}(x,\lambda)-\frac{\beta_{k,a}\varphi_{2,a}(x,\lambda)}{(\lambda-z_{k,a})},\quad \xi_{2,a}^2(x,\lambda)=\varphi_{2,a}(x,\lambda)$$

аналитичны в окрестности точек $z_{k,a}$ и регулярны в самих точках $\lambda=z_{k,a}$.

Доказательство. Для функций $\xi^1_{1,a}$, $\xi^2_{2,a}$ утверждения лемм следуют из представлений для функции $\varphi_{1,a}$ $\varphi_{2,a}$, а также из того, что $\lambda_k \neq z_{k',a}$. Рассмотрим функции $\xi^1_{2,a}(x,\lambda)$. Согласно утверждениям а) и г) леммы 4 имеем

$$\lim_{\lambda\to\lambda_k}\left[h_a(x,\lambda)-\frac{\varphi_{1,a}(x,\lambda)}{a_{k,a}}\right]=0,$$

то есть функции $\xi^1_{2,a}(x,\lambda)$ регулярны в точках λ_k. Аналогично,

$$\lim_{\lambda\to z_{k,a}}[t_a(x,\lambda)-\beta_{k,a}\varphi_{2,a}(x,\lambda)]=0$$

(см. утверждения б) и в) леммы 4). Таким образом, лемма доказана. □

Теорема 2. *Пусть*

$$\lambda=\lambda_k,\qquad \alpha_{k,a}=\tilde\alpha_{k,a},\qquad z_{k,a}=\tilde z_{k,a},\qquad \beta_{k,a}=\tilde\beta_{k,a}.$$

Тогда совпадают коэффициенты уравнений и константы в граничных условиях задач L и $\tilde L$, то есть

$$q(x)=\tilde q(x),\qquad \alpha_{ij}=\tilde\alpha_{ij},\qquad i.j=1,2.$$

Доказательство. Согласно лемме 5 отображения $T_{\lambda,a}(x)$ будут регулярными аналитическими функциями, удовлетворяющими всем условиям теоремы Фрагмена—Линделефа. Поэтому из утверждения 2 и леммы 5 следует, что

$$T^a_{11}(x,\lambda)\equiv 1,\ T^a_{12}(x,\lambda)\equiv 0,\ T^a_{22}(x,\lambda)\equiv 1,\ T^a_{21}(x,\lambda)\equiv \mathrm{const}\quad \text{по}\quad \lambda,$$

то есть

$$\varphi_{1,0}(x,\lambda)=\tilde\varphi_{1,0}(x,\lambda),\quad \varphi_{2,0}(x,\lambda)=\tilde\varphi_{2,0}(x,\lambda),\quad \text{если}\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Аналогично,

$$\varphi_{1,\pi}(x,\lambda)=\tilde\varphi_{1,\pi}(x,\lambda),\quad \varphi_{2,\pi}(x,\lambda)=\tilde\varphi_{2,\pi}(x,\lambda),\quad \text{если}\quad \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi;$$

значит. $q(x)=\tilde q(x)$. Отсюда следует, что функции $\varphi_{1,a}(x,\lambda)$ совпадают с функциями $\tilde\varphi_{i,a}(x,\lambda)$, $i=1,2$, на всем отрезке. Но как нетрудно показать

$$\varphi_{2,0}(\pi,\lambda)=-\alpha_{21}s^{-2}[1]=-\tilde\alpha_{21}s^{-2}[1]=\tilde\varphi_{2,0}(\pi,\lambda),$$

то есть $\alpha_{21} = \tilde{\alpha}_{21}$. Аналогично, $\alpha_{12} = \tilde{\alpha}_{12}$, поскольку

$$\varphi_{2,\pi}(0,\lambda) = \tilde{\varphi}_{2,\pi}(0,\lambda).$$

Далее, взяв тождество

$$\varphi_{2,0}(0,\lambda)y_{\lambda,0}(\pi) - \varphi_{2,0}(\pi,\lambda) \equiv 0 \equiv \varphi_{2,0}(0,\lambda)\tilde{y}_{\lambda,0}(\pi) - \varphi_{2,0}(\pi,\lambda)$$

(см. лемму 1), получим, что $y_{\lambda,0}(\pi) = \tilde{y}_{\lambda,a}(\pi)$. Итак, учтя второе граничное условие для функции $\varphi_{1,0}(x,\lambda)$, получим, что $\alpha_{11} = \tilde{\alpha}_{11}$ и $\alpha_{22} = \tilde{\alpha}_{22}$. Теорема доказана. □

Замечание 3. Можно убедиться, что существуют два различных оператора L и $\tilde{L}$, у которых последовательности $\{\lambda_k\}$, $\{z_{k,a}\}$, $\{\alpha_{k,a}\}$ совпадают.

Литература

1. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. Изв. АН СССР, сер. матем., **15**, С. 309—360, 1951.
2. *Марченко В. А.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. 1. Тр. Моск. матем. об-ва, **1**, 1952, С. 327—420.
3. *Крейн М. Г.* Решение обратной задачи Штурма—Лиувилля. "Докл. АН СССР 76, № 1, С. 21—24, 1951.
4. *Лейбензон З. Л.* Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков Тр, Моск. матем. об-ва, **15**, 1966, С. 70—144.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., Наука, 1969.