

УДК 517.984.54

Решение обратной задачи Штурма – Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями¹

Садовнический В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М.

В настоящей работе получены новые теоремы единственности, разрешимости и устойчивости решений обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями, а также дан алгоритм построения решения этой обратной задачи. Наряду с новыми теоремами в статье приводится также история изучения проблемы, даются примеры и контрпримеры.

Библиография: 19 наименований.

Обозначим через L следующую спектральную задачу Штурма-Лиувилля:

З а д а ч а L :

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y = s^2 y, \quad (1)$$

$$U_1(y) = y'(0) + a_{11}y(0) + a_{12}y(\pi) = 0, \quad (2)$$

$$U_2(y) = y'(\pi) + a_{21}y(0) + a_{22}y(\pi) = 0 \quad (3)$$

($q(x)$ — суммируемая функция, a_{ij} , $i, j = 1, 2$ — комплексные постоянные).

Обратная задача Штурма-Лиувилля для L в случае распадающихся граничных условий ($a_{12} = a_{21} = 0$) была впервые рассмотрена в работах [1, 2] и в настоящее время хорошо изучена (см. [3]–[5]). В частности, получены теоремы о корректности задачи восстановления L по двум спектрам или по спектру и так называемым весовым числам.

¹Садовнический В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. // Евразийский математический журнал. 2005, № 2. С. 57–75 (начало), № 3. С. 99–117 (окончание).

В настоящей работе получены новые теоремы единственности, разрешимости и устойчивости решений обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями, а также дан алгоритм построения решения этой обратной задачи. Наряду с новыми теоремами в статье приводятся также история изучения проблемы, даются примеры и контрпримеры.

§ 1. Предыстория и основные результаты

Первой работой, посвященной изучению обратных спектральных задач была статья В.А. Амбарцумяна [1], вышедшая в 1929 году. В.А. Амбарцумян рассмотрел краевую задачу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

и показал, что если $\int_0^\pi q(x) dx = 0$, а собственные значения суть числа $1^2, 2^2, \dots$, то $q(x)$ должна тождественно равняться нулю. Эта работа показывала, что краевая задача может быть восстановлена по одному набору собственных значений. Однако, в 1946 году Г. Борг установил (см. [2]), что задачу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) - h y(0) = y'(\pi) + H y(\pi) = 0,$$

(где коэффициенты h и H не обязательно равны нулю) восстановить по одному набору ее собственных значений, вообще говоря, уже невозможно. Боргом было показано, что для восстановления этой задачи нужен еще и набор собственных значений вспомогательной задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) - h_1 y(0) = y'(\pi) + H y(\pi) = 0, \quad h_1 \neq h.$$

Теорема Борга вызвала всплеск интереса к обратным задачам Штурма-Лиувилля. Интерес был обусловлен тем, что теорема показывала, что непрерывная функция (континуум) может быть восстановлена по счетному множеству собственных значений.

В настоящее время для решения обратной задачи Штурма-Лиувилля разработано несколько методов. Исследованиями в этом направлении занимались Н. Левинсон, М. Г. Крейн, Б. М. Левитан, В. А. Марченко, З. Л. Лейбензон, В. А. Юрко и другие (подробнее см. [4, 5]).

Исследованиям в области обратных задач Штурма-Лиувилля, а также в целом обратных спектральных задач, придавало импульс

и то, что они позволили создать оригинальные методы для расчета радиоволн, теплового излучения, вибрации металлических конструкций.

Одним из наиболее популярных методов решения обратных спектральных задач вплоть до середины 70-х годов XX века был метод операторов преобразования. Однако при решении обратной задачи для нераспадающихся краевых условий (т.е. для таких условий, которые содержат комбинации значений функций в точке 0 и в точке π) возникли трудности, связанные с применением операторов преобразования. Поэтому результаты в этой области долгое время не публиковались.

Первой работой, посвященной изучению обратной задачи с нераспадающимися краевыми условиями была статья И. В. Станкевича [6] (1970). В ней рассматривался вопрос о восстановлении функции $q(x)$ для самосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с периодическими или антипериодическими краевыми условиями по спектру задачи и так называемым нормировочным числам. В этой работе был применен метод, использующий функцию Ляпунова.

В [7, 8] впервые была исследована единственность решения обратной задачи для L с произвольными коэффициентами a_{ij} , $i, j = 1, 2$. В [7, 8] был применен метод, в котором вместо операторов преобразования использовались определенные отображения T_λ пространств решений, задаваемых матрицами.

Впоследствии обратная задача Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями изучалась в работах В. А. Юрко [9] (1974), В. А. Марченко [3] (1977), О. А. Плаксиной (1986) [10] и других авторов. В основном в этих работах рассматривались теоремы единственности.

Изучение разрешимости и устойчивости решений обратной задачи восстановления L с произвольными коэффициентами a_{ij} , $i, j = 1, 2$ только по спектрам без использования дополнительных спектральных данных (нормировочных или весовых чисел, вычетов определенных функций, функции Вейля или Ляпунова и т.п.) началось сравнительно недавно. В 2000 году В. А. Юрко [11] была доказана разрешимость и устойчивость решения задачи восстановления L по спектрам в случае, когда $a_{12} = -a_{21} = b \in \mathbb{R}$. В 2004 году в работе авторов [12] (2004) доказана теорема разрешимости задачи восстановления L с произвольными коэффициентами a_{ij} по двум спектрам и двум собственным значениям.

Позже авторами были доказаны еще две теоремы разрешимости задачи восстановления L . В первой из этих теорем задача L восста-

новливается по двум спектрам и одному собственному значению, а во второй — по одному спектру и двум собственным значениям.

В параграфе 2 статьи приведена формулировка теоремы единственности В.А. Садовничего из [7]. Формулировка необходима для понимания последующих теорем, а также контрпримера, построенного в параграфе 3.

Теорема единственности В. А. Садовничего из [7] была первой статьей, посвященной единственности решения обратной задачи для L с произвольными коэффициентами a_{ij} (см. формулировку теоремы 1). В [7] был применен метод, в котором вместо операторов преобразования использовались определенные отображения T_λ пространств решений, задаваемых матрицами. Для распадающихся краевых условий использование отображения пространств решений впервые было применено в работе З. Л. Лейбензона [13] в 1966 году. Но непосредственное применение метода З. Л. Лейбензона не давало нужного результата в случае нераспадающихся граничных условий, поскольку при применении этого способа возникает ряд сложностей (например, нет единообразных асимптотик главных решений, равномерных по всем $0 \leq x \leq 1$). Тем не менее в [7] эти трудности были преодолены и была доказана теорема единственности, которая явилась естественным обобщением аналогичных теорем для задачи Штурма-Лиувилля. Было показано, что в случае уравнения вида $-y'' + q(x)y = \lambda y$ для однозначного восстановления функции $q(x)$ и коэффициентов нераспадающихся краевых условий

$$y'(0) + a_{11}y(0) + a_{12}y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) + a_{21}y(0) + a_{22}y(\pi) = 0$$

требуется использовать набор собственных значений самой задачи, собственные значения двух вспомогательных задач и другие дополнительные спектральные данные, а именно два набора весовых чисел и вычетов определенных функций.

В теореме 1 для восстановления краевой задачи с нераспадающимися краевыми условиями в качестве данных восстановления используется спектр самой задачи, два спектра вспомогательных задач, два набора весовых чисел и два набора вычетов определенных функций.

Возникает вопрос: не слишком ли много данных используется в теореме 1 для восстановления задачи? Оказывается, нет. При том выборе вспомогательных задач как в статье [7], условия теоремы существенны. Это становится понятным из контрпримера, который приводится в параграфе 3.

В параграфе 3 впервые публикуется пример, который показывает, что в случае выбора вспомогательных задач как в статье [7], спектра исходной задачи, спектров двух вспомогательных задач и двух наборов весовых чисел для восстановления краевой задачи еще недостаточно. Таким образом, требование совпадения вычетов является существенным и теорема 1, доказанная в 1972 году представляет собой в некотором смысле неулучшаемый результат. Однако, так ли уж оптимален выбор самих вспомогательных задач, произведенный в [7]?

В параграфе 4 приводится доказательство теоремы 2, суть которой состоит в том, что если в качестве двух вспомогательных спектральных задач выбрать не те задачи, которые были выбраны в статье [7], а задачи из теоремы Г. Борга, то для получения единственности решения обратной задачи достаточно использовать только спектры двух вспомогательных задач и спектр исходной задачи Штурма-Лиувилля без использования дополнительных спектральных данных. Таким образом, при выборе вспомогательных задач как в параграфе 3 нет необходимости в использовании дополнительно двух наборов весовых чисел и вычетов.

Теорема 2, которая впервые была анонсирована авторами в несколько иной формулировке в статье [14], породила поиск новых теорем решения обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. Этот поиск увенчался успехом. Авторами было получено несколько новых теорем. В частности, в том же параграфе 4 приводится одна из таких новых теорем — теорема 3. Теорема 3 представляет собой улучшение теоремы 2. В этой теореме, в отличие от теоремы 2, вместо всего спектра исходной задачи Штурма-Лиувилля, используются лишь одно собственное значение. В теореме 3 все коэффициенты краевых условий (кроме одного) и коэффициент уравнения задачи Штурма-Лиувилля восстанавливается с помощью спектров двух задач Борга. Оставшийся после этого не восстановленным один коэффициент краевых условий восстанавливается лишь по одному достаточно большому собственному значению исходной задачи Штурма-Лиувилля. Таким образом, теорема 3 при выборе вспомогательных задач как в теореме Борга представляет собой в некотором смысле неулучшаемый результат. Ведь для восстановления двух вспомогательных задач использование в качестве данных восстановления спектров двух задач Борга является не только достаточным, но и необходимым условием. А для нахождения оставшегося невосстановленным коэффициента используются минимальное число данных — лишь одно достаточно большое собственное значение исходной задачи.

Теорема 3 имеет практическую ценность. Она обосновывает однозначность нахождения переменного коэффициента упругости среды, а также упругих нераспадающихся закреплений струны по собственным частотам ее колебаний с тремя видами закреплений.

Доказательство теоремы 3 основано на асимптотических методах. Поэтому в формулировке теоремы используется достаточно большое собственное значение. Однако возникает вопрос: Так ли уж необходимо требование того, чтобы собственное значение было достаточно большим. Оказывается, что это требование по существу. После доказательства теоремы приведен контрпример 2, который показывает, что если в качестве собственного значения λ_N в теореме выбрать небольшое собственное значение, утверждение теоремы окажется неверным.

В параграфе 5 показано как восстановить задачу Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями по двум спектрам и одному собственному значению. Доказана теорема 4 о разрешимости обратной задачи Штурма-Лиувилля и приведен пример восстановления задачи.

В параграфе 6 доказан аналог теоремы единственности Губреева-Пивоварчика — теорема 5. Теорема утверждает следующее: если в качестве вспомогательной спектральной задачи выбрать задачу, рассмотренную Губреевым и Пивоварчиком, то для получения единственности решения обратной задачи достаточно использовать лишь два спектра, а не три как в параграфе 4.

В параграфе 5 доказана и более сильная теорема — теорема 6. Эта теорема утверждает, что для однозначности восстановления задачи L достаточно спектра задачи R и двух собственных значений задачи L . То есть вместо всего спектра L для однозначности восстановления задачи L можно использовать лишь два его собственных значения. Эти два собственных значения не могут быть произвольными. В условии теоремы требуется, чтобы эти значения были достаточно большими и соседними. Причем показана существенность этого условия теоремы. Приведен контрпример 3, который показывает, что при выборе не достаточно больших собственных значений утверждение теоремы не выполняется. Другой контрпример (контрпример 4) показывает, что при выборе в качестве данных восстановления собственных значений задачи L , не являющихся соседними, утверждение теоремы 6 не выполняется.

В параграфе 7 доказана теорема разрешимости обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями по

одному спектру и двум собственным значениям. Это теорема 7. Приводится также алгоритм решения обратной задачи и пример решения конкретной задачи.

В параграфе 8 доказаны теоремы единственности, разрешимости и устойчивости задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями по двум спектрам и двум собственным значениям (теоремы 8,9). Приведен пример приближенного решения соответствующей задачи.

Хотя впервые проблема устойчивости решения обратных задач была поставлена еще в 1943 году А. Н. Тихоновым [15], тем не менее изучение устойчивости обратной задачи для L с нераспадающимися краевыми условиями началось сравнительно недавно [11]. Параграф 8 посвящен доказательству устойчивости и корректности обратной задачи для L с нераспадающимися краевыми условиями, более общими нежели в работе [11]. Полученные теоремы дополняют теоремы единственности, доказанные авторами в предыдущих параграфах, и теорему устойчивости из работы В. А. Юрко [11], где рассматривался частный случай задачи L ($a_{12} = -a_{21} = b \in \mathbb{R}$), а также дают алгоритм построения решения обратной задачи.

§ 2. Формулировка теоремы единственности решения обратной задачи (1972)

Обозначим через L следующую спектральную задачу Штурма-Лиувилля:

Задача L :

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y = s^2 y, \quad (4)$$

$$U_1(y) = y'(0) + a_{11}y(0) + a_{12}y(\pi) = 0, \quad (5)$$

$$U_2(y) = y'(\pi) + a_{21}y(0) + a_{22}y(\pi) = 0 \quad (6)$$

($q(x)$ — суммируемая функция, a_{ij} , $i, j = 1, 2$ — комплексные постоянные).

Задачу, определенную равенствами (4)–(6) будем называть задачей L . Условимся в дальнейшем задачу типа L , но с другими коэффициентами в уравнении и с другими параметрами в граничных формах обозначать \tilde{L} . Всюду будем считать, что если некоторый символ обозначает объект из задачи L , то символ с волной \sim наверху обозначает

аналогичный объект задачи \tilde{L} . Целочисленный индекс k будем всюду считать меняющимся от $-\infty$ до ∞ . Символ a , встречающийся в качестве индекса будем считать всюду принимающим только два значения: 0 и π .

Пусть λ_k — собственные числа задачи L , а $y_{k,0}(x)$ и $y_{k,\pi}(x)$ — собственные функции, им отвечающие, и нормированные условиями $y_{k,0}(0) = 1$ и $y_{k,\pi}(\pi) = 1$ соответственно. Пусть $f_{k,0}(x)$ и $f_{k,\pi}(x)$ — аналогично определяемые собственные функции сопряженной с L задачи. Заметим, что спектральным параметром в сопряженных задачах считается параметр λ , а не $\overline{\lambda}$.

Предположим, что все собственные числа рассматриваемых задач однократны. Пусть

$$(-1)^{a/\pi} \cdot \alpha_{k,a} = \int_0^\pi y_{k,a}(x) \overline{f_{k,a}(x)} dx.$$

Функции $y_{\lambda,a}(x)$ определяются следующим образом:

$$y_{\lambda,a}(x) = \begin{vmatrix} \psi_{1,a}(x) & \psi_{2,a}(x) \\ U_{2-a}(\psi_{1,a}) & U_{2-a}(\psi_{2,a}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_{1,a}(a) & \psi_{2,a}(a) \\ U_{2-a}(\psi_{1,a}) & U_{2-a}(\psi_{2,a}) \end{vmatrix}^{-1}.$$

где $\psi_{1,a}(x)$ и $\psi_{2,a}(x)$ — два линейно независимых решения, таких, что

$$\psi_{1,a}(a) = 0, \quad \psi'_{1,a}(a) = 1, \quad \psi_{2,a}(a) = 1, \quad \psi'_{2,a}(a) = 0.$$

Будем использовать функции $\varphi_{1,a}(x, \lambda)$, $\varphi_{2,a}(x, \lambda)$, которые назовем главными решениями:

$$\begin{aligned} l\varphi_{1,a}(x, \lambda) &= \lambda \varphi_{1,a}(x, \lambda), \\ \varphi_{1,0}(0, \lambda) &= 1, \quad \varphi'_{1,0}(0, \lambda) = -a_{11} - a_{12} \cdot y_{\lambda,0}(\pi), \\ \varphi_{1,\pi}(1, \lambda) &= 1, \quad \varphi'_{1,\pi}(1, \lambda) = -a_{22} - a_{21} \cdot y_{\lambda,\pi}(\pi), \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} l\varphi_{2,a}(x, \lambda) &= \lambda \varphi_{2,a}(x, \lambda), \\ U_1(\varphi_{2,0}) &= 1, \quad U_2(\varphi_{2,0}) = 0, \\ U_1(\varphi_{2,\pi}) &= 0, \quad U_2(\varphi_{2,\pi}) = 1. \end{aligned}$$

Наряду с задачей L мы рассматриваем две задачи с распадающимися граничными условиями.

З а д а ч а L_0 :

$$lu = zu, \quad u(0) = 0, \quad U_2(u) = 0;$$

З а д а ч а L_1 :

$$lv = zv, \quad v(\pi) = 0, \quad U_1(v) = 0.$$

Пусть $z_{k,0}, z_{k,\pi}$ — собственные числа этих задач соответственно, а отвечающие им собственные функции обозначим $z_{k,0}(x)$ и $z_{k,\pi}(x)$.

Обозначим, наконец, через $\beta_{k,a}$ вычеты функций $\varphi_a(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\lambda) &= \varphi'_{1,0}(0, \lambda) + a_{12} \varphi_{1,0}(\pi, \lambda), \\ \varphi_1(\lambda) &= \varphi'_{1,\pi}(\pi, \lambda) + a_{21} \varphi_{1,\pi}(0, \lambda) \end{aligned}$$

в точках $z_{k,0}$ и $z_{k,\pi}$ соответственно.

Теорема 1 ([7, 8]). Пусть

$$\lambda_k = \tilde{\lambda}_k, \quad \alpha_{k,a} = \tilde{\alpha}_{k,a}, \quad z_{k,a} = \tilde{z}_{k,a}, \quad \beta_{k,a} = \tilde{\beta}_{k,a}.$$

Тогда совпадают коэффициенты уравнений и константы в граничных условиях задач L и \tilde{L} , то есть $q(x) = \tilde{q}(x)$, $\alpha_{ij} = \tilde{\alpha}_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

§ 3. Пример, показывающий существование условия теоремы 1 о равенстве вычетов

В [8] было отмечено, что существуют два различных оператора L и \tilde{L} , у которых последовательности $\{\lambda_k\}$, $\{z_{k,a}\}$, $\{\alpha_{k,a}\}$ совпадают. Ниже нами будет показано, что такие операторы существуют даже в случае $q(x) \equiv \tilde{q}(x) \equiv 0$.

Этот пример показывает, что условие совпадения вычетов ($\beta_{k,a} = \tilde{\beta}_{k,a}$) является существенным. При выборе вспомогательных задач так как они выбраны в формулировке теоремы 1 совпадения трех наборов спектров и весовых чисел для единственности решения обратной задачи еще недостаточно.

Контрпример 1.

Рассмотрим следующие задачи:

$$L: l(y, \lambda) = -y'' = \lambda y, U_1(y) = y'(0) = 0, U_2(y) = y'(\pi) + y(0) = 0,$$

$$\tilde{L} : l(y, \lambda) = -y'' = \lambda y, \tilde{U}_1(y) = y'(0) - y(\pi) = 0, \tilde{U}_2(y) = y'(\pi) = 0,$$

$$L_0 : l(u, z) = z u, u(0) = 0, U_2(u) = 0,$$

$$\tilde{L}_0 : l(u, z) = z u, u(0) = 0, \tilde{U}_2(u) = 0,$$

$$L_1 : l(v, z) = z v, U_1(v) = 0, v(\pi) = 0,$$

$$\tilde{L}_1 : l(v, z) = z v, \tilde{U}_1(v) = 0, v(\pi) = 0.$$

Здесь λ и z — параметры.

Собственные значения задачи L и собственные значения задачи \tilde{L} совпадают с корнями функции $\Delta(\lambda) = -1 + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi$. Спектральные задачи L_0 и \tilde{L}_0 , L_1 и \tilde{L}_1 , эквивалентны (краевые условия задачи без волны линейно выражаются через краевые условия соответствующей задачи с волной). Отсюда следуют равенства

$$\lambda_k = \tilde{\lambda}_k, \quad z_{k,a} = \tilde{z}_{k,a}.$$

Покажем, что

$$\alpha_{k,a} = \tilde{\alpha}_{k,a}.$$

Все собственные числа рассматриваемых задач однократны. По определению $\alpha_{k,a}$ находится по формуле:

$$(-1)^{a/\pi} \cdot \alpha_{k,a} = \int_0^\pi y_{k,a}(x) \overline{f_{k,a}(x)} dx.$$

Здесь $y_{k,0}(x)$ и $y_{k,\pi}(x)$ собственные функции задачи L и нормированные условиями: $y_{k,0}(0) = 1$ и $y_{k,\pi}(\pi) = 1$ соответственно, а $f_{k,0}(x)$ и $f_{k,\pi}(x)$ — аналогично определяемые собственные функции сопряженной с L задачи.

Используя определение сопряженной задачи (см. [16, с. 17–23]) нетрудно убедиться в том, что сопряженная к L задача совпадает с задачей \tilde{L} и сопряженная к \tilde{L} задача совпадает с задачей L . Отсюда следует, что собственные функции $f_{k,0}(x)$ и $f_{k,\pi}(x)$ задачи L^* совпадают с собственными функциями задачи \tilde{L} , а собственные функции \tilde{L} совпадают с собственными функциями задачи L^* . Значения $s_k = \sqrt{\lambda_k}$ (где λ_k — собственные значения задачи L) — действительны. Поэтому для рассматриваемых задач имеем:

$$\begin{aligned} y_{k,0}(x) &= \cos s_k x, & f_{k,0}(x) &= \cos s_k x + \frac{\sin s_k}{\cos s_k} \cdot \sin s_k x, \\ y_{k,\pi}(x) &= \frac{1}{\cos s_k \pi} \cdot \cos s_k x, & f_{k,\pi}(x) &= \cos s_k \pi \cos s_k x + \sin s_k \pi \sin s_k x, \end{aligned}$$

$$y_{k,a} \cdot \overline{f_{k,a}(x)} = f_{k,a}(x) \cdot \overline{y_{k,a}}, \quad \alpha_{k,a} = \tilde{\alpha}_{k,a}.$$

Таким образом,

$$\lambda_k = \tilde{\lambda}_k, \quad z_{k,a} = \tilde{z}_{k,a}, \quad \alpha_{k,a} = \tilde{\alpha}_{k,a}.$$

Покажем теперь, что равенство $\beta_{k,a} = \tilde{\beta}_{k,a}$, вообще говоря, не верно. Функция $\varphi_{1,0}(x, \lambda)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} l\varphi_{1,0}(x, \lambda) &= \lambda \varphi_{1,0}(x, \lambda), \\ \varphi_{1,0}(0, \lambda) &= 1, \quad \varphi'_{1,0}(0, \lambda) = -a_{11} - a_{12} \cdot y_{\lambda,0}(\pi) = 0. \end{aligned}$$

По теореме об аналитической зависимости решений от параметра функция $\varphi_{1,0}(x, \lambda)$ является целой функцией спектрального параметра λ . Поэтому целой является и функция $\varphi_0(\lambda) = \varphi'_{1,0}(x, \lambda) + a_{12} \varphi_{1,0}(1, \lambda) = \varphi'_{1,0}(x, \lambda)$. Следовательно функция $\varphi_0(x, \lambda)$ не имеет особенностей и ее вычеты в точках $z_{k,0}$ равны нулю, то есть

$$\beta_{k,0} = 0.$$

Покажем, что равенство $\tilde{\beta}_{k,0} = 0$ справедливо не для всех k . Возьмем первое собственное значение $\tilde{z}_{1,0} = 1/4$ задачи \tilde{L}_0 и покажем, что $\tilde{\beta}_{1,0} = 1/\pi$.

Функция $\tilde{\varphi}_{1,0}(x, \lambda)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} l\tilde{\varphi}_{1,0}(x, \lambda) &= \lambda \tilde{\varphi}_{1,0}(x, \lambda), \\ \tilde{\varphi}_{1,0}(0, \lambda) &= 1, \quad \tilde{\varphi}'_{1,0}(0, \lambda) = -\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{12} \cdot \tilde{y}_{\lambda,0}(\pi) = \tilde{y}_{\lambda,0}(\pi). \end{aligned}$$

Найдем $\tilde{y}_{\lambda,0}(\pi)$. Имеем:

$$\psi_{1,0} = \frac{\sin s x}{s}, \quad \psi_{2,0} = \cos s x, \quad s = \sqrt{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{\lambda,0}(x) &= \begin{vmatrix} \psi_{1,0}(x) & \psi_{2,0}(x) \\ \tilde{U}_2(\psi_{1,0}) & \tilde{U}_2(\psi_{2,0}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_{1,0}(0) & \psi_{2,0}(0) \\ \tilde{U}_2(\psi_{1,0}) & \tilde{U}_2(\psi_{2,0}) \end{vmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\sin s x}{s} & \cos s x \\ \cos s \pi & -s \sin s \pi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos s \pi & -s \sin s \pi \end{vmatrix}^{-1} = \\ &= \operatorname{tg} s \pi \cdot \sin s x + \cos s x. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{1,0}(x, \lambda) &= \cos s x + \frac{\operatorname{tg} s \pi \sin s \pi + \cos s \pi}{s} \cdot \sin s x, \\ \tilde{\varphi}_0(\lambda) &= \tilde{\varphi}'_{1,0}(0, \lambda) - \tilde{\varphi}_{1,0}(\pi, \lambda) = \\ &= \frac{s \sin^2 s \pi - \sin s \pi}{s \cos s \pi}.\end{aligned}$$

Вычислим теперь вычет функции

$$\tilde{\varphi}_0(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \pi - \sin \sqrt{\lambda} \pi}{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi}$$

в точке $\lambda = \tilde{z}_{1,0} = 1/4$. Имеем

$$\tilde{\beta}_{1,0} = \operatorname{Res}(\tilde{\varphi}_0, 1/4) = \frac{\sqrt{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \pi - \sin \sqrt{\lambda} \pi}{\frac{d}{d\lambda} (\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi)} = \frac{1}{\pi}.$$

Таким образом, для собственного значения $\tilde{z}_{1,0} = z_{1,0} = 1/4$ имеем

$$\beta_{1,0} \neq \tilde{\beta}_{1,0}.$$

§ 4. Аналог теоремы единственности Борга для задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями

В настоящем параграфе доказаны две теоремы, являющиеся аналогами теоремы единственности Борга для задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. Показано, в частности, что если в качестве двух вспомогательных спектральных задач выбрать задачи из теоремы Г. Борга ([2]), то для получения единственности решения обратной задачи достаточно использовать только три спектра (или же два спектра и одно собственное значение) без использования трех последовательностей весовых чисел α_k , и вычетов β_k , определенных функций.

Рассмотрим наряду с задачей L две задачи с распадающимися граничными условиями.

Задача B_1 :

$$ly = -y'' + q(x)y = \mu y,$$

$$\begin{aligned}U_{1,1}(y) &= y'(0) + a_{11} y(0) = 0, \\U_{2,1}(y) &= y'(\pi) + a_{22} y(\pi) = 0\end{aligned}$$

З а д а ч а B_2 :

$$\begin{aligned}ly &= -y'' + q(x)y = \mu y, \\U_{1,2}(y) &= y'(0) + a_{12} y(0) = 0, \\U_{2,2}(y) &= y'(\pi) + a_{22} y(\pi) = 0\end{aligned}$$

Пусть $\mu_{k,1}$, $\mu_{k,2}$ — собственные значения этих задач.

Теорема 2. Пусть $a_{11} \neq a_{12}$, $\tilde{a}_{11} \neq \tilde{a}_{12}$. Если собственные значения задач L и \tilde{L} , B_1 и \tilde{B}_1 , B_2 и \tilde{B}_2 совпадают с учетом их алгебраических кратностей, то коэффициенты уравнений и константы в граничных условиях задач L и \tilde{L} также совпадают, то есть $q(x) = \tilde{q}(x)$, $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Доказательство. Применив теорему единственности Борга ([2], [4, с. 9]) к задачам B_1 и B_2 , получим:

$$q(x) = \tilde{q}(x), \quad a_{11} = \tilde{a}_{11}, \quad a_{12} = \tilde{a}_{12}, \quad a_{22} = \tilde{a}_{22}. \quad (7)$$

Для доказательства теоремы осталось показать, что $a_{21} = \tilde{a}_{21}$. Покажем это.

Пусть $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ — линейно независимые решения уравнения (4), удовлетворяющие условиям

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \quad y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1. \quad (8)$$

Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned}y_1(x, \lambda) &= \cos sx + \frac{1}{s} u(x) \sin sx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right), \\y_2(x, \lambda) &= \frac{1}{s} \sin sx - \frac{1}{s^2} u(x) \cos sx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^3}\right), \\y_1'(x, \lambda) &= -s \sin sx + u(x) \cos sx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right), \\y_2'(x, \lambda) &= \cos sx + \frac{1}{s} u(x) \sin sx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ \text{где } u(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt\end{aligned}$$

для достаточно большого $\lambda = s^2 \in \mathbb{R}$ ([16, с. 62–65]).

Собственные значения задачи L являются корнями следующей целой функции

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1(x, \lambda)) & U_1(y_2(x, \lambda)) \\ U_2(y_1(x, \lambda)) & U_2(y_2(x, \lambda)) \end{vmatrix}, \quad (9)$$

причем алгебраическая кратность собственного значения совпадает с кратностью корня функции $\Delta(\lambda)$ ([16, с. 29]).

Откуда

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & (a_{11} + a_{12} y_1(\pi, \lambda)) \cdot (y_2'(\pi, \lambda) + a_{22} y_2(\pi, \lambda)) - \\ & - (1 + a_{12} y_2(\pi, \lambda)) \cdot (y_1'(\pi, \lambda) + a_{21} + a_{22} y_1(\pi, \lambda)). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив асимптотические формулы решений $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$ в (10), получим

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & a_{11} \cos \sqrt{\lambda} \pi + a_{12} + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi - u(\pi) \cos \sqrt{\lambda} \pi - \\ & - a_{21} - a_{22} \cos \sqrt{\lambda} \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \end{aligned}$$

Как видим, $\Delta(\lambda)$ является целой функцией порядка $1/2$. Кроме того, согласно условию теоремы собственные значения спектральных задач L и \tilde{L} совпадают с учетом их алгебраических кратностей. Поэтому из теоремы Адамара о представлении целой функции с помощью своих корней следует, что

$$\Delta(\lambda) \equiv C \tilde{\Delta}(\lambda),$$

где C — некоторый некоторая ненулевая константа.

Отсюда

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(\lambda) - C \Delta(\lambda) \equiv & \\ \equiv & (a_{11} - \tilde{a}_{11} C) \cos \sqrt{\lambda} \pi + (a_{12} - \tilde{a}_{12} C) + \\ & + (1 - C) \lambda \sin \sqrt{\lambda} \pi - (1 - C) u(\pi) \cos \sqrt{\lambda} \pi + \\ & - (a_{21} - \tilde{a}_{21} C) - (a_{22} - \tilde{a}_{22} C) \cos \sqrt{\lambda} \pi + \\ & + (1 - C) \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \equiv 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Функции 1 , $\sin \sqrt{\lambda} \pi$, $\cos \sqrt{\lambda} \pi$, $\sqrt{\lambda} \cdot \sin \sqrt{\lambda} \pi$, $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ являются линейно независимыми функциями аргумента λ . (Это легко проверить

по определению линейной независимости функций.) Следовательно $C = 1$ и

$$(a_{12} - \tilde{a}_{12}) - (a_{21} - \tilde{a}_{21}) + (a_{11} - \tilde{a}_{11} - a_{22} + \tilde{a}_{22}) \cos \sqrt{\lambda} \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \equiv 0. \quad (12)$$

Отсюда и из (7) получаем $a_{21} = \tilde{a}_{21}$. \square

Теорема 2 в отличие от теоремы 1 позволяет восстановить задачу L лишь по трем спектрам, не используя при этом дополнительные спектральные данные (весовые числа и вычеты). Однако и эта теорема является лишь признаком, но не критерием. Теорема 2 может быть улучшена. Ниже показано, что условие совпадения всех собственных значений задач L и \tilde{L} является излишне жестким условием. Оказывается это условие теоремы может быть заменено более слабым условием — условием совпадения лишь одного собственного значения.

Верна более общая

Теорема 3. Пусть $a_{12} \neq a_{22}$, $\tilde{a}_{12} \neq \tilde{a}_{22}$. Если собственные значения задач B_1 и \tilde{B}_1 , B_2 и \tilde{B}_2 совпадают с учетом их алгебраических кратностей и одно достаточно большое собственное значение λ_N задачи L является также и собственным значением задачи \tilde{L} , то коэффициенты уравнений и константы в граничных условиях задач L и \tilde{L} совпадают, то есть $q(x) = \tilde{q}(x)$, $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Доказательство. Применив теорему единственности Борга ([2], [4, с. 9]) к задачам B_1 и B_2 , получим (7). Отсюда и из (10) имеем

$$0 = \Delta(\lambda_N) - \tilde{\Delta}(\lambda_N) = -(1 + a_{12} y_2(\pi, \lambda_N)) \cdot (a_{21} - \tilde{a}_{21}) \quad (13)$$

Количество собственных значений λ_k задачи L бесконечно, причем при $k \rightarrow \infty$ собственные значения удовлетворяют следующей асимптотической формуле [17]

$$\sqrt{\lambda_k} = k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right). \quad (14)$$

Отсюда следует, что $y_2(\pi, \lambda_N) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} \sin \pi \sqrt{\lambda_N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$, а выражение $(1 + a_{12} y_2(\pi, \lambda_N))$ эквивалентно 1. Отсюда и из (13) получаем

$$a_{21} = \tilde{a}_{21}. \quad \square$$

Теорема 3 имеет практическую ценность. Она обосновывает однозначность нахождения переменного коэффициента упругости среды,

а также упругих нераспадающихся закреплений струны по собственным частотам ее колебаний с тремя различными видами закреплений.

При доказательстве теоремы 3 используются асимптотические формулы. Поэтому одним из условий теоремы является требование, заключающееся в том, чтобы в качестве одного из данных восстановления обратной задачи Штурма-Лиувилля было выбрано достаточно большое собственное значение задачи L . Существенно ли требование того, чтобы собственное значение было достаточно большим? Оказывается, да. Ниже приведен пример, который показывает, что если в качестве собственного значения λ_N в теореме выбрать небольшое собственное значение, утверждение теоремы окажется неверным.

Контрпример 2. Выберем в качестве задачи L задачу с коэффициентами $q(x) \equiv 0$, $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = -1/2$, $a_{21} \neq 0$:

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) - \frac{1}{2}y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) + a_{21}y(0) = 0. \quad (15)$$

Пусть задача \tilde{L} отличается от L только одним коэффициентом $\tilde{a}_{21} \neq a_{21}$ ($a_{21} \neq 0$).

Тогда соответствующие задачи B_1 и \tilde{B}_1 совпадают и имеют вид:

$$-y'' = \mu y, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

Собственные значения этой задачи суть $\mu_{k,1} = k^2$, $k \in \mathbb{Z}$. Причем собственное значение $\mu_{0,1} = 0$ двукратно, а остальные собственные значения — однократны.

Задачи B_2 и \tilde{B}_2 также совпадают

$$-y'' = \mu y, \quad y'(0) - \frac{1}{2}y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 0,$$

а собственные значения $\mu_{k,2}$ являются корнями уравнения

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\mu_{k,2}} \pi = \sqrt{\mu_{k,2}}.$$

Характеристический определитель задачи (15) выражается формулой

$$\Delta(\lambda) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi - a_{21} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \pi}{\sqrt{\lambda}} \right).$$

Отсюда следует, что $\lambda = 1/4$ является собственным значением задачи L ($\Delta(1/4) = 0$) при любом числовом значении коэффициента a_{21} .

Поэтому если в задаче (15) выбрать $a_{21} = -1/2$, а $\tilde{a}_{21} = 1$, то собственные значения соответствующих задач L и \tilde{L} , B_1 и \tilde{B}_1 , B_2 и \tilde{B}_2 совпадут, однако коэффициенты a_{21} и \tilde{a}_{21} будут различными.

Таким образом, в качестве собственного значения λ_N для однозначности восстановления задачи L надо выбирать достаточно большое собственное значение.

Так, если в качестве собственного значения λ_N задачи (15) выбрать $\lambda_N = 100$, а не $\lambda_N = 1/4$, то этого будет достаточно для однозначности восстановления коэффициента $a_{21} = -1/2$.

§ 5. Восстановление задачи по двум спектрам и одному собственному значению

В настоящем параграфе показано как восстановить задачу Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями по двум спектрам и одному собственному значению.

В книге Левитана Б.М. [4] (см. также Левитана Б.М. и Гасимова М.Г. [18]) приведена теорема разрешимости обратной задачи Штурма-Лиувилля ([4, Теорема 3.3.1]):

Пусть даны две последовательности действительных чисел $\mu_{k,1}$ и $\mu_{k,2}$, удовлетворяющих условиям:

- 1) *числа $\mu_{k,1}$ и $\mu_{k,2}$ перемежаются;*
- 2)

$$\sqrt{\mu_{k,1}} = k + \frac{b_0}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right) \text{ и } \sqrt{\mu_{k,2}} = k + \frac{b'_0}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right),$$

где

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \left(a_{11} + a_{22} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right),$$

$$b'_0 = \frac{1}{\pi} \left(a_{12} + a_{22} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right), \quad b_0 \neq b'_0.$$

При выполнении этих условий существует абсолютно непрерывная функция $q(x)$ и числа a_{11} , a_{12} и a_{22} такие, что $\mu_{k,1}$ — спектр задачи B_1 ; $\mu_{k,2}$ — спектр задачи B_2 .

Из этой теоремы можно получить соответствующий аналог для обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями.

Теорема 4. Пусть даны достаточно большое действительное число $\lambda_N \sim N^2$ и две последовательности действительных чисел $\mu_{k,1}$ и $\mu_{k,2}$, удовлетворяющих условиям:

- 1) числа $\mu_{k,1}$ и $\mu_{k,2}$ перемежаются;
- 2) $\sqrt{\mu_{k,1}} = k + \frac{b_0}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)$ и $\sqrt{\mu_{k,2}} = k + \frac{b'_0}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)$, где $b_0 = \frac{1}{\pi} \left(a_{11} + a_{22} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right)$, $b'_0 = \frac{1}{\pi} \left(a_{12} + a_{22} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right)$, $b_0 \neq b'_0$.

При выполнении этих условий существует абсолютно непрерывная функция $q(x)$ и числа a_{11} , a_{12} , a_{21} и a_{22} такие, что $\mu_{k,1}$ — спектр задачи B_1 ; $\mu_{k,2}$ — спектр задачи B_2 , а λ_N — собственное значение задачи L .

Доказательство. Существование абсолютно непрерывной функции $q(x)$ и чисел a_{11} , a_{12} и a_{22} таких, что $\mu_{k,1}$ — спектр задачи B_1 ; $\mu_{k,2}$ — спектр задачи B_2 следует из приведенной выше теоремы 3.3.1 [4]. Докажем теперь существование такого числа a_{21} , что λ_N — собственное значение задачи L . Пусть

$$a_{21} = (a_{11} + a_{12} y_1(\pi, \lambda_N)) \cdot (y'_2(\pi, \lambda_N) + a_{22} y_2(\pi, \lambda_N)) / \\ / (1 + a_{12} y_2(\pi, \lambda_N)) - (y'_1(\pi, \lambda_N) + a_{22} y_1(\pi, \lambda_N)). \quad (16)$$

Знаменатель $(1 + a_{12} y_2(\pi, \lambda_N))$ отличен от нуля ввиду того, что выполнены асимптотические формулы (14) и $y_2(\pi, \lambda_N) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} \sin \pi \sqrt{\lambda_N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$.

Из (10) следует, что если выбрать a_{21} как в (16), то мы получим равенство

$$\Delta(\lambda_N) = 0.$$

Это и означает, что λ_N является собственным значением задачи L . \square

Пример 1. Пусть

$$\mu_{k,1} = k^2, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ \mu_{k,2} \text{ являются корнями уравнения } \operatorname{ctg} \sqrt{\mu_{k,2}} \pi = \sqrt{\mu_{k,2}}; \\ \lambda_N = 100.$$

Восстановим соответствующие спектральные задачи.

Из процедуры, изложенной в теореме 3.3.1 [4] получаем $q(x) \equiv 0$, $a_{11} = 0$, $a_{12} = -1/2$ и $a_{22} = 0$.

Коэффициент a_{21} находим из формулы (16): $a_{21} = -1/2$. Задача L восстановлена:

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) - \frac{1}{2} y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) - \frac{1}{2} y(0) = 0.$$

§ 6. Аналог теоремы единственности Губреева-Пивоварчика

В настоящем параграфе показано, что если в качестве вспомогательной спектральной задачи выбрать задачу, рассмотренную Губреевым и Пивоварчиком, то для получения единственности решения обратной задачи достаточно использовать лишь два спектра, а не три как в параграфе 4.

Как и прежде задачу, определенную равенствами (4)–(6) будем называть задачей L .

Наряду с ней рассмотрим задачу R с спектральным параметром ω :

З а д а ч а R :

$$-y'' + q(x)y = \omega^2 y, \quad (17)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) + (i a_{21} \omega + a_{22})y(\pi) = 0, \quad (18)$$

где $q(x) \in L_2(0, \pi)$.

Это — так называемая задача Редже с параметрами.

В статье Г.М. Губреева и В.Н. Пивоварчика [19] доказана следующая теорема [19, Теорема 3])

Если $a_{21} > 0$ и спектры задач R и \tilde{R} совпадают, то $q(x) = \tilde{q}(x)$, $a_{21} = \tilde{a}_{21}$, $a_{22} = \tilde{a}_{22}$.

Воспользуемся этой теоремой для доказательства следующей теоремы:

Теорема 5. *Пусть $a_{21} > 0$. Если собственные значения задач L и \tilde{L} , R и \tilde{R} совпадают с учетом их алгебраических кратностей, то коэффициенты уравнений и константы в граничных условиях задач L и \tilde{L} совпадают, то есть $q(x) = \tilde{q}(x)$, $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}$, $i, j = 1, 2$.*

Доказательство. Из совпадения собственных значения задач L и \tilde{L} как и при доказательстве теоремы 2 получаем равенство (12):

$$(a_{12} - \tilde{a}_{12}) - (a_{21} - \tilde{a}_{21}) + \\ + (a_{11} - \tilde{a}_{11} - a_{22} + \tilde{a}_{22}) \cos \sqrt{\lambda} \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \equiv 0.$$

С другой стороны, из совпадения спектров задач R и \tilde{R} следует, что коэффициенты уравнений и константы в граничных условиях задач R и \tilde{R} совпадают, то есть $q(x) = \tilde{q}(x)$, $a_{21} = \tilde{a}_{21}$, $a_{22} = \tilde{a}_{22}$.

Отсюда вытекает тождество

$$(a_{12} - \tilde{a}_{12}) + (a_{11} - \tilde{a}_{11}) \cos \sqrt{\lambda} \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \equiv 0.$$

Следовательно, $a_{11} = \tilde{a}_{11}$, $a_{12} = \tilde{a}_{12}$. \square

Как видим, для однозначности восстановления задачи L достаточно и двух спектров (спектров задач L и R).

Верна и более сильная теорема, которая утверждает, что для однозначности восстановления задачи L достаточно спектра задачи R и двух собственных значений задачи L . То есть вместо всего спектра L для однозначности восстановления задачи L можно использовать лишь два его собственных значения.

Теорема 6. Пусть λ_N , λ_{N+1} ($\tilde{\lambda}_N$, $\tilde{\lambda}_{N+1}$) — два соседних достаточно больших собственных значений задачи L (\tilde{L}); $a_{21} > 0$. Если собственные значения λ_N и $\tilde{\lambda}_N$, а также λ_{N+1} и $\tilde{\lambda}_{N+1}$ совпадают с учетом их кратностей, а также совпадают спектры задач R и \tilde{R} , то коэффициенты уравнений и константы в граничных условиях задач L и \tilde{L} , \tilde{R} совпадают, то есть $q(x) = \tilde{q}(x)$, $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Доказательство. Применив теорему Г.М. Губреева и В.Н. Пивоварчика [19, Теорема 3]) к задачам R , получим $q(x) = \tilde{q}(x)$, $a_{21} = \tilde{a}_{21}$, $a_{22} = \tilde{a}_{22}$. Отсюда, используя (10), асимптотические представления для $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$ при больших λ , а также равенства

$$\Delta(\lambda_N) - \tilde{\Delta}(\lambda_N) = 0, \quad \Delta(\lambda_{N+1}) - \tilde{\Delta}(\lambda_{N+1}) = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} (a_{12} - \tilde{a}_{12}) + (a_{11} - \tilde{a}_{11}) \cos(\pi\sqrt{\lambda_N}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda_N}\right) &= 0, \\ (a_{12} - \tilde{a}_{12}) + (a_{11} - \tilde{a}_{11}) \cos(\pi\sqrt{\lambda_{N+1}}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda_{N+1}}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (14) и (19) следует, что

$$\begin{aligned} (a_{12} - \tilde{a}_{12}) \pm (a_{11} - \tilde{a}_{11}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) &= 0, \\ (a_{12} - \tilde{a}_{12}) \mp (a_{11} - \tilde{a}_{11}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) &= 0 \end{aligned}$$

(знаки $+$ или $-$ выбираются в зависимости от четности или нечетности N).

Откуда $a_{11} = \tilde{a}_{11}$, $a_{12} = \tilde{a}_{12}$. \square

Покажем существенность условия теоремы, согласно которому соседние собственные значения λ_N и λ_{N+1} должны быть достаточно большими. Ниже приводится контрпример, который показывает, что при выборе не достаточно больших собственных значений утверждение теоремы не выполняется.

Контрпример 3. Выберем в качестве задачи L задачу с коэффициентами $q(x) \equiv 0$, $a_{11} = 1/2$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 1/2$, $a_{22} = 0$:

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) + \frac{1}{2}y(0) + y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) + \frac{1}{2}y(0) = 0. \quad (20)$$

Пусть задача \tilde{L} отличается от L только двумя коэффициентами $\tilde{a}_{11} = 0 \neq a_{11}$ и $\tilde{a}_{12} = 1/2 \neq a_{12}$.

Тогда соответствующие задачи R и \tilde{R} совпадают и имеют вид:

$$-y'' = \omega^2 y, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) + \frac{i\omega}{2}y(\pi) = 0.$$

Характеристический определитель задачи (20) выражается формулой

$$\Delta(\lambda) = a_{11} \cos \pi \sqrt{\lambda} + a_{12} + \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} - a_{12} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \sin \pi \sqrt{\lambda}.$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 = 1/4$ и $\lambda_2 = 1$ являются соседними собственными значениями как задачи L , так и задачи \tilde{L} (соседство собственных значений можно проверить по графикам функций $\Delta(\lambda)$).

Таким образом, в качестве соседних собственных значений λ_N и λ_{N+1} для однозначности восстановления задачи L надо выбирать достаточно большие собственные значения.

Покажем существенность условия теоремы, согласно которому совпадающие достаточно большие собственные значения задач L и \tilde{L} должны быть соседними. Ниже приводится контрпример, который показывает, что при выборе в качестве чисел λ_N и λ_{N+1} собственных значений задачи L не являющихся соседними, утверждение теоремы не выполняется.

Контрпример 4. Выберем в качестве задачи L задачу с коэффициентами $q(x) \equiv 0$, $a_{11} = 1/2$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 1/2$, $a_{22} = 0$:

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) + \frac{1}{2}y(0) = 0, \quad y'(\pi) + \frac{1}{2}y(0) = 0. \quad (21)$$

Пусть задача \tilde{L} отличается от L только двумя коэффициентами $\tilde{a}_{11} = 0 \neq a_{11}$ и $\tilde{a}_{12} = 1/2 \neq a_{12}$:

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) + \frac{1}{2}y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) + \frac{1}{2}y(0) = 0. \quad (22)$$

Тогда соответствующие задачи R и \tilde{R} совпадают и имеют вид:

$$-y'' = \omega^2 y, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) + \frac{i\omega}{2} y(\pi) = 0.$$

В этом случае характеристический определитель задачи L выражается формулой

$$\Delta(\lambda) = a_{11} \cos \pi \sqrt{\lambda} + a_{12} + \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} - a_{12} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \sin \pi \sqrt{\lambda}.$$

Отсюда следует, что $\lambda_N = 100^2$ и $\lambda_{N+2} = 102^2$ являются собственными значениями двух разных задач L и \tilde{L} .

Таким образом, в качестве достаточно больших собственных значений λ_N и λ_{N+1} для однозначности восстановления задачи L надо выбирать соседние собственные значения.

Отметим, что из доказательства теоремы 6 следует также, что в формулировке этой теоремы вместо соседних достаточно больших собственных значений задачи L могут быть использованы и произвольные достаточно большие собственные значения с номерами различной четности, например, тысячное и миллион первое.

§ 7. Восстановление задачи по одному спектру и двум собственным значениям

Обозначим через Q множество потенциалов $q(x)$, для которых оператор $(Ay)(x) = -y'' + q(x)y$ с областью определения $D(A) = \{y \in W_2^2(0, \pi), y(0) = y'(\pi) + a_{22}y(\pi) = 0\}$ строго положителен.

В статье Губреева Б.М. и Пивоварчика В.Н. доказана теорема разрешимости обратной задачи Штурма-Лиувилля ([19, Теорема 2]):

Для того чтобы последовательность $\Lambda = \{\omega_k\}_1^\infty \cup \{\omega_k\}_{-\infty}^{-1}$ была спектром задачи R с потенциалом $q(x) \in Q_{a_{22}}$ при некоторых $a_{21} \in \mathbb{R}$ и $a_{21} \in (0, 1)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. $\operatorname{Im} \omega_k > 0$, $\omega_k \in \Lambda$;
2. Число мнимых ω_k (с учетом кратностей) четно;
3. Λ симметрична относительно мнимой оси и кратности симметрично расположенных точек совпадают;

4. При соответствующей нумерации правая ветвь $\{\omega_k\}_1^\infty$ удовлетворяет асимптотическим формулам

$$\omega_k = n - \frac{1}{2} + iG + \frac{H}{n} + \frac{b_n}{n}, \quad G > 0, H \in \mathbb{R}, \{b_n\}_1^\infty \in l_2.$$

Получим на основе этой теоремы аналог для обратной задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями.

Теорема 7. Пусть даны два достаточно больших числа

$$\lambda_N \sim N^2 \text{ и } \lambda_{N+1} \sim (N+1)^2$$

и последовательность чисел ω_k , удовлетворяющих условиям:

1. $\text{Im } \omega_k > 0, \omega_k \in \Lambda$;
2. Число мнимых ω_k (с учетом кратностей) четно;
3. Λ симметрична относительно мнимой оси и кратности симметрично расположенных точек совпадают;
4. При соответствующей нумерации правая ветвь $\{\omega_k\}_1^\infty$ удовлетворяет асимптотическим формулам

$$\omega_k = n - \frac{1}{2} + iG + \frac{H}{n} + \frac{b_n}{n}, \quad G > 0, H \in \mathbb{R}, \{b_n\}_1^\infty \in l_2.$$

При выполнении этих условий существует функция $q(x) \in Q$ и числа a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} такие, что $\{\omega_k\}$ — спектр задачи R , а λ_N, λ_{N+1} — собственные значения задачи L .

Доказательство. Существование функции $q(x) \in Q$ и чисел a_{21} и a_{22} таких, что ω_k — спектр задачи R следует из сформулированной выше теоремы 2 [19]. Докажем теперь существование таких чисел a_{11} и a_{12} , что λ_N, λ_{N+1} — собственные значения задачи L .

Подставив асимптотические формулы решений $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)$ в (10), получим

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (a_{11} + a_{12} y_1(\pi, \lambda)) \cdot (y_2'(\pi, \lambda) + a_{21} y_2(\pi, \lambda)) - \\ &\quad - (1 + a_{12} y_2(\pi, \lambda)) \cdot (y_1'(\pi, \lambda) + a_{21} + a_{22} y_1(\pi, \lambda)) = (23) \\ &= a_{11} f_1(\lambda) + a_{12} f_2(\lambda) - g(\lambda), \end{aligned}$$

где

$$f_1(\lambda) = y_2'(\pi, \lambda) + a_{22} y_2(\pi, \lambda) = \cos \pi \sqrt{\lambda} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$f_2(\lambda) = y_1(\pi, \lambda) y_2'(\pi, \lambda) - y_2(\pi, \lambda) y_1'(\pi, \lambda) - a_{21} y_2(\pi, \lambda) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$g(\lambda) = y_1'(\pi, \lambda) + a_{21} + a_{22} y_1(\pi, \lambda).$$

Если λ_N и λ_{N+1} — два соседних собственных значения задачи L, то согласно (23) они удовлетворяют системе двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_{11} f_1(\lambda_N) + a_{12} f_2(\lambda_N) &= g(\lambda_N), \\ a_{11} f_1(\lambda_{N+1}) + a_{12} f_2(\lambda_{N+1}) &= g(\lambda_{N+1}) \end{aligned} \quad (24)$$

относительно неизвестных коэффициентов a_{11} и a_{12} .

Покажем, что определитель этой системы

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} f_1(\lambda_N) & f_2(\lambda_N) \\ f_1(\lambda_{N+1}) & f_2(\lambda_{N+1}) \end{vmatrix} = \\ &= \cos \pi \sqrt{\lambda_N} - \cos \pi \sqrt{\lambda_{N+1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_N}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{N+1}}}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

отличен от нуля при достаточно больших λ_N и λ_{N+1} .

Количество собственных значений λ_k задачи L бесконечно, причем при $k \rightarrow \infty$ собственные значения удовлетворяют следующей асимптотической формуле (14)

$$\sqrt{\lambda_k} = k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \quad (26)$$

При $N = 2m - 1$ и $N + 1 = 2m$ имеем

$$\sqrt{\lambda_{2m-1}} = 2m - 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right), \quad \sqrt{\lambda_{2m}} = 2m + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right).$$

Подставив эти значения в (25), получаем

$$\begin{aligned} D &= 2 \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{2m-1}} + \sqrt{\lambda_{2m}}}{2} \pi\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{2m}} - \sqrt{\lambda_{2m-1}}}{2} \pi\right) + \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{2m-1}}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{2m}}}\right) = \\ &= 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right), \end{aligned}$$

что означает, что $D \approx -2$, а, значит, отделено от нуля для достаточно больших m . Если же вместо $\sqrt{\lambda_N}$ и $\sqrt{\lambda_{N+1}}$ подставить в (25) значения

$\sqrt{\lambda_{2m}}$ и $\sqrt{\lambda_{2m+1}}$ соответственно, то получим, что $D \approx 2$. Таким образом, в любом случае определитель D отличен от нуля для соседних достаточно больших λ_N и λ_{N+1} . Поэтому решение задачи отыскания a_{11} и a_{12} по двум соседним достаточно большим собственным значениям λ_N и λ_{N+1} задачи L дается формулами Крамера

$$a_{11} = D_1/D, \quad a_{12} = D_2/D, \quad (27)$$

где
$$D_1 = \begin{vmatrix} g(\lambda_N) & f_2(\lambda_N) \\ g(\lambda_{N+1}) & f_2(\lambda_{N+1}) \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_N) & g(\lambda_N) \\ f_1(\lambda_{N+1}) & g(\lambda_{N+1}) \end{vmatrix}.$$

Разрешимость обратной задачи доказана. \square

Заметим, что в [19] доказаны не только теоремы единственности и разрешимости, но и приведена сама процедура восстановления задачи R по ее собственным значениям ω_k . Это позволяет получить алгоритм восстановления задачи L . Действительно, по значениям ω_k мы можем восстановить R , а затем, используя формулу (27), по найденным $q(x)$, a_{21} , a_{22} , а также собственным значениям λ_N и λ_{N+1} задачи L , восстанавливаем a_{11} , a_{12} . Ниже приведен пример применения этого алгоритма.

Пример 2. Пусть

$$\lambda_N = 100^2, \quad \lambda_{N+1} = 101^2$$

ω_k являются корнями уравнения $\cos \omega_k \pi + \frac{\omega_k i}{2} \sin \omega_k \pi$.

Восстановим соответствующие спектральные задачи.

Из процедуры, изложенной в [19], получаем $q(x) \equiv 0$, $a_{21} = 1/2$, $a_{22} = 0$.

Коэффициенты a_{11} и a_{12} находим из системы уравнений (24):

$$a_{11} + a_{12} = \frac{1}{2}, \quad -a_{11} + a_{12} = \frac{1}{2}$$

по формулам Крамера (16): $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1/2$.

Задача L восстановлена. Это задача (22):

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) + \frac{1}{2} y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) + \frac{1}{2} y(0) = 0.$$

§ 8. Устойчивость решения обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями

В настоящем параграфе рассмотрена устойчивость решения обратной задачи Штурма-Лиувилля для L в случае нераспадающихся граничных условий.

Наряду с задачей L мы рассматриваем две задачи с распадающимися граничными условиями.

З а д а ч а M_1 :

$$\begin{aligned} ly &= -y'' + q(x)y = \lambda y, \\ U_{1,1}(y) &= y'(0) - a_{21}y(0) = 0, \\ U_{2,1}(y) &= y'(\pi) + a_{22}y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

З а д а ч а M_2 :

$$\begin{aligned} ly &= -y'' + q(x)y = \lambda y, \\ U_{1,2}(y) &= y'(0) - a_{21}y(0) = 0, \\ U_{2,2}(y) &= y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Пусть λ_k, μ_k, ν_k — собственные значения задач L, M_1 и M_2 соответственно.

Сформулируем для L обратную задачу.

Обратная задача: Требуется найти потенциальную функцию $q(x)$ и константы $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ граничных условий задачи L , если известны два собственных значения λ_k задачи L , и все собственные значения μ_k, ν_k связанных с L задач M_1 и M_2 .

Докажем сначала теорему единственности.

Теорема 8. Два соседних достаточно далеких собственных значения задачи L и все собственные значения задач M_1 и M_2 однозначно определяют коэффициент уравнения $q(x)$ и константы $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ граничных условий задачи L .

Доказательство. В книге В. А. Юрко «Обратные спектральные задачи и их приложения» доказывается теорема 1.5.4 [5, с. 66]: Для того, чтобы вещественные числа $\{\mu_k, \nu_k\}_{n \geq 0}$ были спектрами задач M_1 и M_2 с $q(x) \in L_2(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись

$$\sqrt{\mu_k} = k + \frac{\omega}{\pi k} + \frac{\tau_k}{k}, \quad \omega = a_{21} + a_{22} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt, \quad \{\tau_k\} \in l_2,$$

$$\sqrt{\nu_k} = k + \frac{1}{2} + \frac{\omega_1}{\pi k} + \frac{\tau_k}{k}, \quad \omega_1 = a_{21} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt, \quad \{\tau_k\} \in l_2,$$

$$\mu_k < \nu_k < \mu_{k+1}, \quad k \geq 0.$$

Функция $q(x)$ и числа a_{21} и a_{22} строятся последующему алгоритму:

1) по заданным числам $\{\mu_k, \nu_k\}_{k \geq 0}$ находим числа α_k по формуле

$$\alpha_k = -d(\mu_k) \frac{d}{d\lambda} \Delta(\mu_k),$$

где $d(\mu)$ и $\Delta(\mu)$ строятся по формулам

$$\Delta(\mu) = \pi(\mu_0 - \mu) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k - \mu}{k^2}, \quad d(\mu) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k - \mu}{(k + 1/2)^2};$$

2) по числам $\{\mu_k, \alpha_k\}_{k \geq 0}$ строим $q(x)$, b_1 и b_2 по формулам

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} G(x, x), \quad a_{21} = G(0, 0), \quad a_{22} = \omega - a_{21} - \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt,$$

где функция $G(x, t)$ находится из интегрального уравнения Гельфанда-Левитана

$$G(x, t) + F(x, t) + \int_0^x G(x, s) F(s, t) ds = 0, \quad 0 < t < x,$$

в котором

$$F(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\cos \mu_k x \cos \mu_k t}{\alpha_k} - \frac{\cos k x \cos k t}{\alpha_k^0} \right),$$

где

$$\alpha_k^0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k > 0 \\ \pi, & k = 0. \end{cases}$$

Из этой теоремы следует, что коэффициенты $q(x)$, a_{21} , a_{22} находятся однозначно по собственным значениям μ_k , ν_k задач M_1 и M_2 . Соответствующий алгоритм построения неизвестных в этой теореме также приведен. Для доказательства теоремы 3 осталось показать однозначность нахождения коэффициентов a_{11} , a_{12} . Это делается так при доказательстве теоремы 7.

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 7 получим, что если λ_N и λ_{N+1} — два соседних собственных значения задачи L , то

согласно (23) они удовлетворяют системе двух линейных алгебраических уравнений (24). Поэтому решение задачи отыскания a_{11} и a_{12} по двум соседним достаточно большим собственным значениям λ_N и λ_{N+1} задачи L дается формулами Крамера (27):

$$a_{11} = D_1/D, \quad a_{12} = D_2/D, \quad \text{где} \quad D = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_N) & f_2(\lambda_N) \\ f_1(\lambda_{N+1}) & f_2(\lambda_{N+1}) \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} g(\lambda_N) & f_2(\lambda_N) \\ g(\lambda_{N+1}) & f_2(\lambda_{N+1}) \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_N) & g(\lambda_N) \\ f_1(\lambda_{N+1}) & g(\lambda_{N+1}) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, получена не только единственность, но и метод восстановления по двум собственным значениям задачи L и спектрам задач M_1, M_2 . Как следует из теоремы 1.5.4 [5, с. 66] попутно найден и метод восстановления задачи L по ее двум собственным значениям, а также по спектру и весовым числам задачи M_1 . \square

Теорема 9. Пусть дана задача L. Существует такое $\varepsilon > 0$ (зависящее от L), что если числа $|\tilde{\lambda}_1| > \varepsilon$, $|\tilde{\lambda}_2| > \varepsilon$, $\{\tilde{\mu}_k\}_{k \geq 0}$, $\{\tilde{\nu}_k\}_{k \geq 0}$ удовлетворяют условию

$$\Lambda = \left(|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1|^2 + |\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (|\mu_k - \tilde{\mu}_k|^2 + |\nu_k - \tilde{\nu}_k|^2) \right)^{1/2} < \varepsilon, \quad (28)$$

то существует единственная краевая задача \tilde{L} с $\tilde{q}(x) \in C[0, \pi]$, для которой числа $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \{\tilde{\mu}_k\}_{k \geq 0}, \{\tilde{\nu}_k\}_{k \geq 0}$ являются двумя собственными значениями L^0 и спектрами задач \tilde{M}_1 и \tilde{M}_2 соответственно, причем

$$\|q - \tilde{q}\|_{L_2(0, \pi)} < C \Lambda, \quad |a_1 - \tilde{a}_1| < C \Lambda, \quad |a_2 - \tilde{a}_2| < C \Lambda,$$

$$|b_1 - \tilde{b}_1| < C \Lambda, \quad |b_2 - \tilde{b}_2| < C \Lambda,$$

где C зависит только от L.

Доказательство. В. А. Юрко доказана следующая теорема [11, теорема 2.1, с. 270–271]: Обозначим через M следующую самосопряженную задачу:

Задача M:

$$\begin{aligned} ly &= -y'' + q(x)y = \lambda y, \\ U_{1,1}(y) &= y'(0) - a_{21}y(0) + by(\pi) = 0, \\ U_{2,1}(y) &= y'(\pi) + a_{22}y(\pi) - by(0) = 0, \end{aligned}$$

где $q(x) \in C[0, \pi]$, a_{21} , a_{22} , $b \in \mathbb{R}$, $b = a_{12} = -a_{21}$.

Пусть $\{z_k\}_{k \geq 0}$ и $\{\nu_k\}_{k \geq 0}$ — собственные значения задач M и M_1 соответственно. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ (зависящее от M) такое что если $\{\tilde{z}_k\}_{k \geq 0}$ и $\{\tilde{\nu}_k\}_{k \geq 0}$ удовлетворяют условию

$$\Lambda_1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (|z_k - \tilde{z}_k|^2 + |\lambda_k - \tilde{\nu}_k|^2) \right)^{1/2} < \varepsilon, \quad (29)$$

то существует единственная краевая задача \widetilde{M} с действительно-значной функцией $\tilde{q}(x) \in L_2(0, \pi)$, для которой числа $\{\tilde{z}_k\}_{k \geq 0}$, $\{\tilde{\nu}_k\}_{k \geq 0}$ являются спектрами задач \widetilde{M} и \widetilde{M}_2 соответственно, причем

$$\|q - \tilde{q}\|_{L_2(0, \pi)} < C \Lambda, \quad |a_{21} - \tilde{a}_{21}| < C \Lambda, \quad |a_{22} - \tilde{a}_{22}| < C \Lambda, \quad b = \tilde{b},$$

где C зависит только от M .

Применим эту теорему к задачам M_1 и M_2 , положив $b = \tilde{b} = 0$. Имеем $M = M_1$, $z_k = \mu_k$. Значит, по теореме В. А. Юрко

$$\|q - \tilde{q}\|_{L_2(0, \pi)} < C_1 \Lambda, \quad |a_{21} - \tilde{a}_{21}| < C_1 \Lambda, \quad |a_{22} - \tilde{a}_{22}| < C_1 \Lambda.$$

Докажем, теперь, что

$$|a_{11} - \tilde{a}_{11}| < C_2 \Lambda, \quad |a_{12} - \tilde{a}_{12}| < C_2 \Lambda.$$

Решение уравнения (4) является также решением интегрального уравнения

$$y(x, \lambda) = A_1 \cos s x + A_2 \sin s x - \frac{1}{s} \int_0^x q(\xi) y(\xi, \lambda) \sin[(x - \xi)s] d\xi, \quad s = \sqrt{\lambda}.$$

Отсюда получаем, что линейно независимые решения уравнения (4), удовлетворяющие условиям (8), являются решениями интегральных уравнений

$$y_1(x, \lambda) = \cos s x - \frac{1}{s} \int_0^x q(\xi) y_1(\xi, \lambda) \sin[(x - \xi)s] d\xi, \quad (30)$$

$$y_2(x, \lambda) = \frac{1}{s} \sin s x - \frac{1}{s} \int_0^x q(\xi) y_2(\xi, \lambda) \sin[(x - \xi)s] d\xi. \quad (31)$$

Используя (30), получаем

$$\begin{aligned} |y_1(x, \lambda_1) - \tilde{y}_1(x, \tilde{\lambda}_1)| &\leq |\cos s_1 x - \cos \tilde{s}_1 x| + \\ &+ \left| \frac{1}{s_1} \int_0^x q(\xi) y_1(\xi, \lambda_1) \sin[(x - \xi)s_1] d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\tilde{s}_1} \int_0^x \tilde{q}(\xi) \tilde{y}_1(\xi, \tilde{\lambda}_1) \sin[(x - \xi)\tilde{s}_1] d\xi \right|. \end{aligned} \quad (32)$$

Понятно, что

$$|\cos s_1 x - \cos \tilde{s}_1 x| \leq C_3 \Lambda.$$

Оценим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{s_1} \int_0^x q(\xi) y_1(\xi, \lambda_1) \sin[(x - \xi)s_1] d\xi - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\tilde{s}_1} \int_0^x \tilde{q}(\xi) \tilde{y}_1(\xi, \tilde{\lambda}_1) \sin[(x - \xi)\tilde{s}_1] d\xi \right| = \\ & = \left| \frac{1}{s_1} \int_0^x q(\xi) y_1(\xi, \lambda_1) \sin[(x - \xi)s_1] d\xi - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\tilde{s}_1} \int_0^x q(\xi) y_1(\xi, \lambda_1) \sin[(x - \xi)\tilde{s}_1] d\xi + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\tilde{s}_1} \int_0^x q(\xi) y_1(\xi, \lambda_1) \sin[(x - \xi)\tilde{s}_1] d\xi - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\tilde{s}_1} \int_0^x \tilde{q}(\xi) \tilde{y}_1(\xi, \tilde{\lambda}_1) \sin[(x - \xi)\tilde{s}_1] d\xi \right| \leq \\ & \leq \int_0^x |q(\xi) y_1(\xi, \lambda_1)| \cdot \left| \frac{\sin[(x - \xi)s_1]}{s_1} - \frac{\sin[(x - \xi)\tilde{s}_1]}{\tilde{s}_1} \right| d\xi + \\ & + \int_0^x \left| q(\xi) y_1(\xi, \lambda_1) - \tilde{q}(\xi) \tilde{y}_1(\xi, \tilde{\lambda}_1) \right| \cdot \left| \frac{\sin[(x - \xi)\tilde{s}_1]}{\tilde{s}_1} \right| d\xi \leq \\ & \leq C_4 \max_{x, \xi \in [0, \pi]} \left| \frac{\sin[(x - \xi)s_1]}{s_1} - \frac{\sin[(x - \xi)\tilde{s}_1]}{\tilde{s}_1} \right| + \\ & + C_5 \max_{x \in [0, \pi]} \left| q(\xi) y_1(\xi, \lambda_1) - \tilde{q}(\xi) \tilde{y}_1(\xi, \tilde{\lambda}_1) \right|. \end{aligned}$$

Так как функция $\frac{\sin[(x - \xi)s]}{s}$ дифференцируема по s при больших $|s|$, то

$$\left| \frac{\sin[(x - \xi)s_1]}{s_1} - \frac{\sin[(x - \xi)\tilde{s}_1]}{\tilde{s}_1} \right| < C_6 |s_1 - \tilde{s}_1| < C_7 \Lambda.$$

$$\begin{aligned} & \text{Кроме того, имеем } \left| \left(q(\xi) y_1(\xi, \lambda) - \tilde{q}(\xi) \tilde{y}_1(\xi, \tilde{\lambda}_1) \right) \right| = \\ & = \left| \left(q(\xi) y_1(\xi, \lambda_1) - \tilde{q}(\xi) y_1(\xi, \lambda) + \tilde{q}(\xi) y_1(\xi, \lambda) - \tilde{q}(\xi) \tilde{y}_1(\xi, \tilde{\lambda}_1) \right) \right| \leq \\ & \leq |q(\xi) - \tilde{q}(\xi)| |y_1(\xi, \lambda_1)| + |\tilde{q}(\xi)| |y_1(\xi, \lambda_1) - \tilde{y}_1(\xi, \tilde{\lambda}_1)|. \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$|y_1(x, \lambda_1) - \tilde{y}_1(x, \tilde{\lambda}_1)| \leq C_4 \Lambda + C_7 \Lambda + C_8 \max_{[0, \pi]} |q(\xi) - \tilde{q}(\xi)| + \\ + C_9 \max_{[0, \pi]} |y_1(\xi, \lambda_1) - \tilde{y}_1(\xi, \tilde{\lambda}_1)|. \quad (33)$$

Из неравенства $\|q - \tilde{q}\|_{L_2(0, \pi)} < C_1 \Lambda$ следует, что

$$\|q - \tilde{q}\|_{C[0, \pi]} < C_{10} \Lambda.$$

Отсюда и из (33) вытекает неравенство

$$\max_{[0, \pi]} |y_1(\xi, \lambda_1) - \tilde{y}_1(\xi, \tilde{\lambda}_1)| < C_{11} \Lambda.$$

Следовательно,

$$|y_1(\pi, \lambda_1) - \tilde{y}_1(\pi, \tilde{\lambda}_1)| < C_{12} \Lambda.$$

Аналогичные оценки справедливы для значений функций $y_2(\pi, \lambda)$, $y'_1(\pi, \lambda)$, $y'_2(\pi, \lambda)$ при $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$. Поэтому для функций D , D_1 , D_2 из (27) имеем:

$$|D - \tilde{D}| < C_{13} \Lambda, \quad |D_1 - \tilde{D}_1| < C_{13} \Lambda, \quad |D_2 - \tilde{D}_2| < C_{13} \Lambda.$$

Оценим, теперь,

$$|a_1 - \tilde{a}_1| = \left| \frac{D_1}{D} - \frac{D_1^0}{D^0} \right| = \frac{|D_1 \tilde{D} - \tilde{D}_1 D|}{|D \tilde{D}|}. \quad (34)$$

Поскольку $D \neq 0$ и $\tilde{D} \neq 0$, то найдется число r , такое что $|D \tilde{D}| > r$. Следовательно,

$$\frac{1}{|D \tilde{D}|} < \frac{1}{r}.$$

Кроме того, имеем:

$$|D_1 \tilde{D} - \tilde{D}_1 D| \leq |\tilde{D}| |D_1 - \tilde{D}_1| + |\tilde{D}_1| |\tilde{D} - D| < C_{14} \Lambda.$$

Откуда,

$$|a_1 - \tilde{a}_1| < C_2 \Lambda.$$

Аналогично показывается неравенство

$$|a_2 - \tilde{a}_2| < C_2 \Lambda,$$

которые и завершают доказательство теоремы. \square

Пример 3. Пусть известны собственные значения вспомогательных задач M_1 и M_2

$$\sqrt{\mu_k} = 0, 0, 1, 2, 3, \dots, k, \dots, \quad \sqrt{\nu_k} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{2} + 2, \dots, \frac{1}{2} + k, \dots$$

и два собственных значения задачи L

$$\sqrt{\lambda_1} = 1001,000318, \quad \sqrt{\lambda_2} = 1001,999047.$$

Тогда по формулам из теоремы 1.5.4 [5, с. 66] получаем

$$q(x) \equiv 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0.$$

Подставляя полученные значения в (27), получаем

$$a_{11} = 0,9995634690, \quad a_{12} = 2.000319193 \quad (D = -1,999994870).$$

Неизвестные значения найдены верно, они приближенно совпадают с коэффициентами $q(x) \equiv 0$, $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 0$ задачи L , по которой были взяты собственные значения вспомогательных задач. (Значения $\{\mu_k\}$, $\{\nu_k\}$ были взяты соответствующими задаче L точно, а λ_1, λ_2 — лишь с точностью до шестого знака после запятой.)

В заключении отметим, что из доказательств теорем 8 и 9 следует также, что в формулировках этих теорем вместо соседних достаточно больших собственных значений задачи L могут быть использованы и произвольные достаточно большие собственные значения с номерами различной четности, например, тысячное и миллион первое.

Литература

1. Ambarzumijan V. A. Über eine Frage der Eigenwerttheorie // Zeitschrift für Physik. 1929. N 53. S. 690–695
2. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm Liouvilleschen Eigenwertanfrage. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte // Acta Math. 1946. V. 78. №1. S. 1–96.
3. Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения Киев: Наукова думка. 1977.
4. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука. 1984. 240 с.

5. Юрко В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Саратов. педагогич. ин-та, 2001. 499 с.
6. Станкевич И. В. Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // ДАН СССР. 1970. Т. 192, № 1. С. 34–37.
7. Садовничий В. А. Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя // ДАН СССР. 1972. Т. 206, № 2. С. 293–296.
8. Садовничий В. А. Единственность решения обратной задачи для уравнения второго порядка с нераспадающимися краевыми условиями // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. механика. 1974. № 1. С. 143–151.
9. Юрко В. А. Обратная задача для обыкновенных линейных дифференциальных операторов второго порядка на конечном интервале с нераспадающимися краевыми условиями. // Исследования по дифференциальным уравнениям и теории функций. Вып. 4. Саратов. Саратовский университет. 1974. С. 84–103.
10. Плаксына О. А. Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями // Матем. сб. 1986. Т. 131. № 1. С. 3–26.
11. Yurko V. A. The Inverse Spectral Problems for Differential Operators with Nonseparated Boundary Conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2000. V. 250. P. 266–289.
12. Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М. О корректности обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями // Доклады Академии наук. 2004. Т. 395. № 5. С. 592–595.
13. Лейбензон З. Л. Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Тр. Моск. матем. о-ва. 1966. 15. С. 70–145.
14. Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М. Аналоги теоремы единственности Борга в случае нераспадающихся краевых условий // Доклады Академии наук. 1999. Т. 367. № 6. С. 739–741.
15. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. № 5. С. 195–198.
16. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
17. Юрко В. А. Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями. // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 4, 569–576.
18. Левитан Б. М., Гасымов М. Г. Определение дифференциального оператора по двум спектрам // УМН. 1964. Т. 19. № 2 (116). С. 3–63.
19. Губреев Г. М., Пивоварчик В. Н. Спектральный анализ задачи Редже с параметрами // Функц. анализ и его приложения. 1997. № 1. С. 70–74.