УДК 517.984.54

Обратная задача Штурма – Лиувилля с обобщенными периодическими краевыми условиями[1]

Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М.

Обозначим через L следующую спектральную задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} l\,y &= -y'' + q(x)y = \lambda y = s^2 y, && (1)\\ U_1(y) &= a_1\,y'(0) + a_2\,y'(\pi) + a_3\,y(0) + a_4\,y(\pi) = 0, && (2)\\ U_2(y) &= b_1\,y(0) + b_2\,y(\pi) = 0. && (3) \end{aligned}$$

Здесь $q(x)$ — суммируемая функция, λ — спектральный a_i, b_j ($i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2$) — комплексные постоянные, причем хотя бы один из коэффициентов a_i и хотя бы один из коэффициентов b_j отличны от нуля.

Обратная задача Штурма-Лиувилля для (1)–(3) в случае распадающихся граничных условий ($a_2 = 0$, $b_1 = 0$ или $a_1 = 0$, $b_2 = 0$) в настоящее время хорошо изучена (см. [1]). Первой работой, посвященной изучению обратной задачи (1)–(3) с нераспадающимися краевыми условиями, была статья И. В. Станкевича [2] (1970). В ней рассматривался вопрос о восстановлении функции $q(x)$ для задачи (1)–(3) с периодическими ($a_2 = -a_1$, $a_3 = a_4 = 0$, $b_2 = -b_1$) или антипериодическими ($a_2 = a_1$, $a_3 = a_4 = 0$, $b_2 = b_1$) краевыми условиями.

Впоследствии обратная задача Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями изучалась в работах В. А. Юрко [3], В. А. Марченко [4], работах авторов этой статьи и работах других ученых (подробнее см. [5, 6]). Однако абсолютное большинство публикаций касались не краевой задачи (1)–(3), а задачи другого вида,

[1] Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратная задача Штурма-Луивилля с обобщенными периодическими краевыми условиями // Доклады Академии наук. 2008. Т. 421. № 5. С. 599–601.

которая не сводится к (1)–(3). Из работ, посвященных обратной задаче для (1)–(3) с произвольными коэффициентами в краевых условиях, по-видимому, можно назвать только работу В. А. Юрко [7]. В настоящей статье предпринята попытка восполнить этот пробел.

Перед изложением этих результатов введем необходимые обозначения. Собственные значения задачи (1)–(3) обозначим через λ_k.

Наряду с задачей L мы рассмотрим еще две задачи:

L_1 :

$$\begin{aligned} ly &= -y'' + q(x)\,y = \mu\,y, \\ U_{1,1}(y) &= y'(0) - b_1\,y(0) = 0, \\ U_{2,1}(y) &= y'(\pi) + b_2\,y(\pi) = 0 \end{aligned}$$

и L_2 :

$$\begin{aligned} ly &= -y'' + q(x)\,y = \nu\,y, \\ U_{1,2}(y) &= y'(0) - b_1\,y(0) = 0, \\ U_{2,2}(y) &= y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Пусть μ_k, ν_k — собственные значения этих задач.

Теорема 1. *Если $b_1 \neq \pm b_2$, то собственные значения задач L, L_1 и L_2 однозначно определяют сами задачи L, L_1 и L_2, а именно коэффициент уравнения $q(x)$, коэффициенты b_1 и b_2 и краевое условие (3) задачи L.*

Схема доказательства теоремы 1. Применив теорему 1.3.4 из работы [1, с. 58–59] к задачам L_1 и L_2, получаем однозначность определения $q(x)$, b_1, b_2. Однозначность определения краевого условия (2) вытекает из линейной независимости соответствующих функций в разложении характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ задачи (1)–(3). □

Контрпример 1. Покажем, что условие $b_1 \neq \pm b_2$ теоремы 1 является существенным. Рассмотрим следующую краевую задачу L:

$$-y'' = \lambda\,y, \quad y'(0) + a_2\,y'(\pi) = 0, \quad y(0) + y(\pi) = 0,$$

у которой $b_1 = b_2 = 1$. Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ для этой задачи имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = -(1 + a_2)(1 + \cos\pi\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Поэтому при любом $a_2 \neq -1$ собственные значения соответствующих краевых задач совпадают. Таким образом, в случае $b_1 = b_2 = 1$ коэффициенты задачи L находятся по собственным значениям задач L, L_1, L_2 неоднозначно и условие $b_1 \neq \pm b_2$ из теоремы единственности является существенным.

Метод восстановления задач L, L_1 и L_2 состоит в следующем. На первом этапе с помощью теоремы 1.3.4 из [1, с. 58–59] восстанавливается дифференциальное уравнение (коэффициент $q(x)$) и второе краевое условие (3). На втором этапе на основе полученных данных и сопряженно биортогональной системы функций $\{g_j\}$ к функциям-слагаемым $\{f_j(\lambda)\}$ в разложении

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) = -a_1\, b_1\, f_1(\lambda) - a_2\, b_2\, f_2(\lambda) + (a_3\, b_2 - a_4\, b_1)\, f_3(\lambda) + \\ + a_2\, b_1\, f_4(\lambda) + a_1\, b_2\, f_5(\lambda),\end{aligned} \tag{4}$$

восстанавливается краевое условие (2). При восстановлении краевого условия (2) используется и то, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ восстанавливается по своим нулям с точностью до множителя $C \neq 0$:

$$\Delta(\lambda) \equiv C\, \lambda_0^r \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right),$$

(это в свою очередь следует из теоремы Адамара и того, что $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$ является целой функции порядка 1/2). Применение метода поясним на примерах:

Пример 1. Пусть собственные значения μ_k задачи L_1 есть корни уравнения $\operatorname{tg} \sqrt{\mu_k}\, \pi = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}}$, собственные значения ν_k задачи L_2 есть $\sqrt{\nu_k} = \frac{1}{2} + k$. а собственные значения λ_k задачи (1)–(3) выражаются формулой $\sqrt{\lambda_k} = s_k = \pm 1/3 + 2\,k$.

Согласно методу, изложенному в теореме 1.3.4 из [1, с. 58–59], по собственным значениям μ_k и ν_k находим $q(x) = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$.

Далее, функция $f(\lambda) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)$, где $\sqrt{\lambda_k} = s_k = \pm 1/3 + 2\,k$, равна $f(\lambda) = 1/2 - \cos \sqrt{\lambda}\, \pi$. Отсюда

$$\Delta(\lambda) \equiv C\,(1/2 - \cos \sqrt{\lambda}\, \pi) \equiv -a_2\, f_2(\lambda) + a_3\, f_3(\lambda) + a_1\, f_5(\lambda),$$

где $f_2(\lambda) = 1$, $f_3(\lambda) = \frac{1}{s} \sin s\, \pi$, $f_5(\lambda) = -\cos s\, \pi$.

Пусть $\overline{g_2(\lambda)} = 1/4$, $\overline{g_3(\lambda)} = \frac{1}{2}\sin s\pi + \left(\frac{\pi}{24} + \frac{1}{2\pi}\right) - \frac{\pi}{8}s + \frac{\pi}{16}s^2$, $\overline{g_5(\lambda)} = -\frac{1}{2}\cos s\pi$. Тогда функции $g_2(\lambda)$, $g_3(\lambda)$, $g_5(\lambda)$ образуют биортогональную систему к системе функций $f_2(\lambda)$, $f_3(\lambda)$, $f_5(\lambda)$ в пространстве $L_2(0,4)$. Поэтому имеем:

$$a_1 = C\int_0^2 (1/2 - \cos s\pi)\, g_5 \cdot 2s\, ds = C,$$

$$-a_2 = C\int_0^2 (1/2 - \cos s\pi)\, g_2 \cdot 2s\, ds = C/2,$$

$$a_3 = C\int_0^2 (1/2 - \cos s\pi)\, g_3 \cdot 2s\, ds = 0.$$

Таким образом, задача L восстановлена. Это задача

$$-y'' = \lambda y, \quad 2y'(0) - y'(\pi) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

П р и м е р 2. Пусть собственные значения μ_k задачи L_1 есть корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\mu_k}\,\pi = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}}$, собственные значения ν_k задачи L_2 есть $\sqrt{\nu_k} = \frac{1}{2} + k$, а задача (1)–(3) ($L$) не имеет собственных значений.

Согласно методу, изложенному в теореме 1.3.4 из [1, с. 58–59], по собственным значениям μ_k и ν_k находим $q(x) = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$.

Далее, поскольку задача L не имеет собственных значений, то характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ не имеет нулей. А так как она является еще и целой функцией порядка 1/2, то $\Delta(\lambda) \equiv C$, а $f(\lambda) \equiv 1$. Тогда, поступая также как и в предыдущем примере, имеем

$$a_1 = 0, \quad -a_2 = C, \quad a_3 = 0.$$

Таким образом, задача L восстановлена. Это задача Коши:

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(\pi) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть два собственных значения λ_{k_1} и λ_{k_2} задачи (1)–(3) таковы, что ранг матрицы*

$$F = \left\| \begin{matrix} b_2 f_5(\lambda_{k_1}) - b_1 f_1(\lambda_{k_1}) & b_1 f_4(\lambda_{k_1}) - b_2 f_2(\lambda_{k_1}) & f_3(\lambda_{k_1}) \\ b_2 f_5(\lambda_{k_2}) - b_1 f_1(\lambda_{k_2}) & b_1 f_4(\lambda_{k_2}) - b_2 f_2(\lambda_{k_2}) & f_3(\lambda_{k_2}) \end{matrix} \right\|$$

равен двум, $b_1 \neq \pm b_2$. Тогда собственные значения задач L_1 и L_2 и два собственных значения λ_{k_1} и λ_{k_2} однозначно определяют сами задачи

L, L_1 и L_2, а именно коэффициент уравнения $q(x)$, коэффициенты b_1 и b_2 и краевое условие (2) задачи L.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы 2. Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 с той лишь разницей, что краевое условие (2) восстанавливается из (4) не с помощью сопряженно биортогональной системы функций, а с помощью решения системы двух алгебраических уравнений. □

П р и м е р 3. Пусть собственные значения μ_k, ν_k задач L_1 и L_2 такие же как в примере 1, а из всех собственных значений λ_k задачи (1)–(3) известны только два собственных значения $\lambda_{k_1} = s_{k_1}^2$ и $\lambda_{k_2} = s_{k_2}^2$:

$$s_{k_1} = 1/3, \qquad s_{k_2} = 1/3 + 2.$$

Требуется восстановить задачу L. Подставив эти значения в (4), получим систему алгебраических уравнений

$$a_1 f_5(\lambda_k) - a_2 f_2(\lambda_k) + a_3 f_3(\lambda_k) = 0, \qquad k = k_1, k_2 \tag{5}$$

Ранг матрицы F этой системы уравнений равен двум. Решая систему уравнений методом Гаусса, получаем $a_3 = 0$, $a_2 = C$, $a_1 = 2C$, где C — некоторая константа. Следовательно, искомая задача L такова:

$$-y'' = \lambda y, \quad 2y'(0) + y'(\pi) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

К о н т р п р и м е р 2. Если взять в примере 3 в качестве $\lambda_{k_1} = s_{k_1}^2$ и $\lambda_{k_2} = s_{k_2}^2$ два других собственных значения $s_{k_1} = -1/3$, $s_{k_2} = 1/3$, то ранг матрицы F окажется равным единице, а из (5) будет следовать, что любые числа a_1, a_2 и a_3, которые удовлетворяют уравнению

$$-a_1 \cdot \frac{1}{2} - a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0,$$

могут быть коэффициентами краевого условия (2).

Таким образом, нельзя однозначно восстановить задачу L по всем собственным значениям задач L_1 и L_2 и произвольным двум значениям задачи L. Для однозначности восстановления задачи L надо, чтобы два собственных значения задачи L удовлетворяли условию $\operatorname{rank} F = 2$.

К о н т р п р и м е р 3. Если задача L является задачей Коши

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(\pi) = 0, \quad y(\pi) = 0,$$

то она не имеет собственных значений. Поэтому теорема 2 не может быть применена (нет двух собственных значений задачи L, которые необходимы для теоремы 2). В то время с помощью теоремы 1 она восстанавливается (см. пример 2) и поэтому нельзя утверждать, что теорема 2 сильнее теоремы 1.

Литература

1. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М: Физматлит, 2007. 384 с.
2. *Станкевич И. В.* // ДАН СССР. — 1970. Т. 192, № 1. — С. 34–37.
3. *Юрко В. А.* // Исследования по дифференциальным уравнениям и теории функций. Вып. 4. Саратов. Саратовский университет. 1974. С. 84–103.
4. *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка. 1977.
5. *Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М.* // Евразийский математический журнал. — 2005. — № 2. — С. 100–118.
6. *Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М.* // Евразийский математический журнал. — 2005. — № 3. — С. 99–117.
7. *Юрко В. А.* // Матем. заметки. 1975. Т. 18. N 4, 569–576.