

УДК 517.927.26

О следах с весом и об асимптотике спектральной функции¹

В. А. Садовничий

Настоящая работа посвящена решению следующей задачи: для корней целых функций класса K (см. [1, 2] получить формулы регуляризованных сумм с некоторым весом. А именно, если z_n — корни функции $f(z) \in K$, то необходимо вычислить суммы вида

$$\sum_{(n)} [z_n^m \beta_n - A_m(n, \beta_n)] = B_m \quad (0.1)$$

Здесь β_n — некоторые весовые числа, определяемые ниже, $A_m(n, \beta_n)$ — суть вполне определенные числа, обеспечивающие сходимость рядов, m — натуральное число, B_m — выражения, явно определяемые по функции $f(z)$.

Поскольку к функциям класса K приводят рассмотрения, связанные со спектральными задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений, то в работе тем самым вычислены регуляризованные следы с весом таких задач.

В качестве следствия из полученных результатов приведен следующий пример. Пусть заданы два самосопряженных оператора Штурма—Лиувилля

$$-y'' + q_i(x)y = \lambda y, \quad y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + H_i y(\pi) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$q_i(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции.

Пусть $\alpha_n^i = \alpha_n(q_i, H_i, h)$ $i = 1, 2$, — нормировочные числа соответствующей задачи: $\alpha_n^i = \int_0^\pi y_{n,i}^2(x) dx$, $y_{n,i}$ — собственные функции, $y_{n,i}(0) = 1$, $\lambda_{n,i}$, $i = 1, 2$, — соответствующие собственные числа.

¹ Дифф. уравнения, N 10, т. 10, 1974, с.1808–1818

Нетрудно убедиться, что в этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\alpha_n^1} - \frac{1}{\alpha_n^2})$ сходится. Возникает вопрос, чему равна его сумма? Из наших общих рассуждений получаем, что справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\alpha_n^1} - \frac{1}{\alpha_n^2}) = 0.$$

Если учесть, что $\rho_i(\lambda) = \sum_{\lambda_n, i < \lambda} \frac{1}{\alpha_n^i}$ — спектральные функции, то из полученной формулы, например, вытекает, что $\rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda) + o(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Заметим еще, что формулы регуляризованных сумм корней функций класса K были получены в [1]. Формулы типа (0.1) ранее, насколько нам известно, в литературе не встречались даже в простейшем случае оператора второго порядка.

§ 1. Дзета-функция, связанная с двумя функциями класса K

Мы рассматриваем класс K целых функций $f(z)$, которые при каждом целом $h \geq 0$ допускают представление вида

$$f(z) \sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z} P_{k,h}(z), \quad (1.1)$$

где α_k — комплексные постоянные, а

$$P_{k,h}(z) = z^{n_k} \sum_{\nu=0}^h \beta_{\nu}^{(k)} z^{-\nu} + o(z^{n_k-h})$$

при $z \rightarrow \infty$. Здесь n_k — некоторое целое число, а $\beta_0^{(k)} \neq 0$. Предполагается, что плоскость z можно покрыть конечным числом открытых секторов, содержащих начало координат, в каждом из которых функции $P_{k,h}(z)$ являются аналитическими при $|z| > R$. Мы будем также предполагать, что представление (1.1) допускает почленное дифференцирование. В дальнейшем индекс h у $P_{k,h}(z)$ будем опускать и будем писать $P_k \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu}^{(k)} z^{-\nu}$, $z \rightarrow \infty$.

Рассмотрим две функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, каждая из которых принадлежит классу K , причем

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z} P_{k,1}(z), \quad (1.2)$$

$$P_{k,1}(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu,1}^{(k)} z^{-\nu}, \quad z \rightarrow \infty,$$

$$f_2(z) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z} P_{k,2}(z), \quad (1.2')$$

$$P_{k,2}(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu,2}^{(k)} z^{-\nu}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Определим функцию

$$\Phi(z) = \frac{f_2(z)}{f_1(z)}. \quad (1.3)$$

Функция $\Phi(z)$ определена для тех z , где $f_1(z) \neq 0$ и может иметь особенности типа полюсов в нулях $z_{n,1}$ функции $f_1(z)$,

Отметим на комплексной плоскости точки $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{N-1}$ и их выпуклую оболочку обозначим через \mathcal{P} . Направления внешних нормалей к \mathcal{P} назовем критическим. Не нарушая общности, можно считать, что в вершины r -угольника \mathcal{P} попадают первые r показателей экспонент-числа $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{r-1}$. Удалим из плоскости z r секторов T_s сколь угодно малого раствора с биссектрисами, параллельными критическим направлениям, и с вершинами в начале координат. Не ограничивая общности, можно считать, что начало координат лежит внутри \mathcal{P} . Поэтому оставшаяся после удаления секторов T_s область распадается на r открытых секторов Ω_s ($s = 0, 1, \dots, r-1$). Выберем в одном из секторов Ω_s (для определенности Ω_0) луч l и построим контур Γ_0 , состоящий из дважды проходимого луча l и окружности γ с центром в нуле. Очевидно, контур Γ_0 можно выбрать так, чтобы все нули функции $f_1(z)$ оказались во внешности Γ_0 . (Нетрудно убедиться, что большие по модулю нули функций $f_1(z)$, $f_2(z)$ лежат внутри секторов T_s , $s = 0, 1, \dots, r-1$).

Заметим, что при $z \in \Gamma_0$, $z \rightarrow \infty$

$$\frac{f_2(z)}{f_1(z)} = \frac{e^{\alpha_0 z} P_{0,2}(z)}{e^{\alpha_0 z} P_{0,1}(z)} + O(e^{-\delta|z|}) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_{\nu}^{(0)}}{z^{\nu}}, \quad (1.4)$$

$$\omega_0^{(0)} = \frac{\beta_{0,2}^{(0)}}{\beta_{0,1}^{(0)}} \neq 0, \quad \beta_{0,i}^{(0)} \neq 0, \quad i = 1, 2, \quad \delta > 0$$

— некоторое число. Остальные числа $\omega_\nu^{(0)}$ явно выражаются через числа $\beta_{\nu,1}^{(0)}$, $\beta_{\nu,2}^{(0)}$, и мы будем предполагать их известными.

Введем в рассмотрение дзета-функцию $\hat{Z}_0(\sigma)$, связанную с двумя функциями $f_1(z)$, $f_2(z)$ класса K , задаваемыми формулами (1.2), (1.2'):

$$\hat{Z}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} Z^{-\sigma} \frac{f_2(z)}{f_1(z)} dz, \quad \operatorname{Re} \sigma > 1, \quad (1.5)$$

которая в силу (1.4) регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} \sigma > 1$; $z^{-\sigma} = e^{-\sigma \operatorname{Ln} z}$, где $\operatorname{Ln} z$ — фиксированная регулярная ветвь логарифма во внешности Γ_0 , контур Γ_0 проходится в положительном направлении: нули $f_1(z)$ лежат в области, находящейся слева при обходе контура.

Известными методами доказывается следующие утверждения

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Дзета-функция $\hat{Z}(\sigma)$, связанная с двумя функциями $f_1(z)$, $f_2(z) \in K$, аналитически продолжается во всю σ -плоскость как целая функция.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. При $m = 2, 3, \dots$ $\hat{Z}_0(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\nu} \frac{f_2(z)}{f_1(z)z^m} dz$. При $m = 0, 1, 2, \dots$ $\hat{Z}_0(-m) = \omega_{m+1}^{(0)}$, где $\omega_\nu^{(0)}$ — коэффициенты в разложении (1.4).

ТЕОРЕМА 1. При $\operatorname{Re} \sigma > 1$ ряд $\sum_{(n)} z_{n,1}^{-\sigma} \beta_n$ равномерно сходится и

$$\hat{Z}_0(\sigma) = \sum_{(n)} z_{n,1}^{-\sigma} \beta_n, \quad (1.6)$$

где $z_{n,1}$ — нули $f_1(z)$, а числа β_n — суть вычеты функции $\Phi(z)$ в полюсе $z_{n,1}$. Поскольку для больших номеров n нули функции $f_1(z)$ простые, существует такой номер M , что для всех $n > M$

$$\beta_n = \frac{f_2(z_{n,1})}{f_1'(z_{n,1})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Асимптотика для больших номеров n корней z_n , (s — номер сектора T_s) функции $f_1(z)$ известна. Если опустить

индекс s , $z_{n,1,s} = z_{n,1}$ допускают разложения в асимптотический ряд следующего вида ($n \rightarrow \infty$):

$$z_{n,1} = a_1 n \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_{k,1}(\ln n)}{n^k} \right\}, \quad a_1 \neq 0,$$

$$R_{k,1}(\ln n) = \sum_{l=0}^k r_{l,1}^k \ln^l n, \quad a_1 = \frac{2\pi i}{\alpha_{s+1} - \alpha_s}, \quad r_{1,1} = \frac{n_s - n_{s+1}}{2\pi i}, \quad (1.7)$$

$$r_{0,1}^1 = \frac{1}{2\pi i} \left[(n - n_{s+1}) \ln a_1 + \ln \left(\frac{\beta_{0,1}^{(s)}}{\beta_{0,1}^{(s+1)}} \right) \right],$$

причем в формуле для $r_{0,1}^1$ могут быть взяты произвольные значения логарифмов.

Поскольку $\operatorname{Re} \alpha_s z = (\bar{\alpha}_s, z)$, $s = 0, 1, \dots, r-1$, где справа в скобках стоит скалярное произведение векторов $\bar{\alpha}_s$ и z , то очевидно, что для $z \in T_s$ $z \notin \mathcal{P}$ (при достаточно малом растворе секторов T_s) будут выполнены неравенства

$$\operatorname{Re} \alpha_s z - \operatorname{Re} \alpha_k z > \delta |z|, \quad \operatorname{Re} \alpha_{s+1} z - \operatorname{Re} \alpha_k z > \delta |z|, \quad (1.8)$$

$$k = 0, 1, \dots, \quad s-1, \quad s+2, \dots, r-1,$$

с некоторым $\delta > 0$. Величину угла секторов T_s будем выбирать одинаковой для всех s .

Введем следующие обозначения ($z \in T_s$, $|z| > R$, R — некоторое положительное число):

$$u_i = u_i(z) - \frac{1}{2} [(\alpha_s - \alpha_{s+1})z + \operatorname{Ln} P_{s,i}(z) - \operatorname{Ln} P_{s+1,i}(z)], \quad (1.9)$$

$$v_i = v_i(z) - \frac{1}{2} [(\alpha_s - \alpha_{s+1})z + \operatorname{Ln} P_{s,i}(z) + \operatorname{Ln} P_{s+1,i}(z)], \quad (1.9')$$

$$i = 1, 2.$$

Здесь Ln — фиксированная, регулярная в T_s ветвь логарифма, $|z| > R$.

Тогда, учитывая формулы (1.8), функции $f_i(z)$ можно записать так ($z \in T_s$, $|z| > R$):

$$f_1(z) = e^{v_i} [(e^{u_i} + e^{-u_i} + g_i(z))], \quad (1.8')$$

где функции $g_i(z)$ в секторе T_s вместе со своими производными есть функции типа $O(e^{-\sigma|z|})$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in T_s$, т. е. существует такое число \tilde{R} , что при $z \in T_s$ $|z| > \tilde{R} > R$

$$|g_i(z)| \leq \operatorname{const} e^{-\delta|z|}, \quad |g'_i(z)| \leq \operatorname{const} e^{-\delta|z|}$$

с некоторыми $\delta > 0$, $i = 1, 2$.

Заметим далее, что можно указать такую область $Q_s(R_1)$, состоящую из тех точек $z \in T_s^0$,² для которых $|z| > R_1 > R$, что в области $Q_s(R_1)$ функция $u_1(z)$, определенная по формуле (1.9), будет однолистной аналитической функцией, отображающей взаимно-однозначно область $Q_s(R_1)$ на область $D_{s,1}$.

Для этого воспользуемся следующим известным критерием однолистности.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в выпуклой области D ; если существует такая действительная постоянная φ , что величина $\operatorname{Re}(e^{i\varphi} f'(z))$ отлична от нуля в области D , то функция $f(z)$ однолистка в области D .

По определению класса K при $|z| > R_0$, где R_0 — некоторое достаточно большое число, функции $P_{k,1}(z)$ допускают разложение (1.2') и являются аналитическими при $|z| > R$ в некоторых открытых секторах, содержащих начало. Мы будем предполагать, что каждый сектор T_s целиком содержится в одном из этих секторов. Мы можем считать, что $R_0 > R$.

Поэтому при $|z| > R_0 > R$, $z \in T_s$ (см. (1.9))

$$u_1(z) \sim \frac{(\alpha_s - \alpha_{s+1})z}{2} + \frac{(n_s - n_{s+1}) \operatorname{Ln} z}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{\tilde{P}_{s,1}(z)}{\tilde{P}_{s+1,1}(z)}.$$

Здесь $\operatorname{Ln} z$ — та же ветвь логарифма, что и формулах (1.9), (1.9'),

$$\tilde{P}_{s,1}(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu}^{(s)} \cdot z^{-\nu}, \quad \tilde{P}_{s+1,1}(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu,1}^{(s+1)} z^{-\nu}.$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}(e^{i\varphi} u_1'(z)) = \operatorname{Re} \left(e^{i\varphi} \frac{(\alpha_s - \alpha_{s+1})}{2} + O\left(\frac{1}{z}\right) \right),$$

где через $O(\frac{1}{z})$ обозначена некоторая регулярная в области $|z| > R_0$, $z \in T_s$ функция такая, что $|O(\frac{1}{z})| \leq \frac{C}{|z|}$, C — некоторая постоянная. Поэтому очевидно, мы можем выбрать такое число φ , чтобы при $z \in T_s^0$, $|z| > R_0 \geq R$ выполнялось неравенство

$$\operatorname{Re}(e^{i\varphi} u_1'(z)) \neq 0.$$

²Через T_s^0 мы обозначаем множество точек, принадлежащих T_s и не принадлежащих границе T_s .

Полученная область не является выпуклой, однако если мы проведем в точке пересечения окружности $|z| = R'_0$ с биссектрисой сектора T_s^0 отрезок, касательный к этой окружности и лежащий внутри сектора, то подчиненная бесконечная область будет выпуклой. Поэтому однолиственность функции $u_1(z)$ в этой области доказана. Ясно теперь, что мы можем выбрать такое положительное число $R_1 > R'_0$, что в области $Q_s(R_1)$, $|z| > R_1$ $s \in T_s$ функция $u_1(z)$ будет также однолистной.

Поэтому в области $D_{s,1}$ (на u_1 -плоскости) существует однозначная аналитическая обратная к u_1 функция: $z = z(u_1)$. Нетрудно убедиться, что образ сектора при таком отображении асимптотически является сектором. Так ясно, что при $|z| \rightarrow \infty$ внутри области $Q_s(R_1)$ мы имеем $|u_1| \rightarrow \infty$ внутри $D_{s,1}$ и обратно. Следовательно, аналитической функции типа $o(1)$ в области $Q_s(R_1)$ соответствует аналитическая функция типа $o(1)$ в области $D_{s,1}$.

Заметим, далее, что сектор T_s и число R_1 мы можем выбрать так, чтобы функция $u_1(z)$ была однолистной аналитической в замкнутой области $\bar{Q}_s(\bar{R}_1)$. В дальнейшем будем считать, что T_s и R_1 выбраны именно такими. Поэтому функция $u_1(z)$ будет отображать $\bar{Q}_s(\bar{R}_1)$ на $\bar{D}_{s,1}$ взаимно однозначно.

Далее, существуют взаимно однозначное соответствие между нулями большими модулями функции $f_1(z)$ в области $Q_s(R_1)$ и нулями с большими модулями функции

$$\varphi_1(u_1) = f_1(z(u_1)) = e^{v_1}[e^{u_1} + e^{-u_1} + g_1(z(u_1))]. \quad (1.10)$$

Здесь $\varphi_1(u_1)$ — функция, в которую перешла при отображении (1.9) функция $f_1(z)$ в области $Q_s(R_1)$ ($R_1 > \tilde{R}$, см. (1.8')).

Функция φ_1 обращается в нуль, если

$$u_1 \sim \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi i, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Поэтому, как легко видеть, существует номер M , что для $n > M$, $s = 0, 1, \dots, r-1$,

$$\begin{aligned} \beta_{n,s} &= \frac{f_2(z)}{f'_1(z)} \Big|_{z=z_{n,1}} = \frac{e^{v_2-v_1}[e^{u_2} + e^{-u_2} + g_2(z)]}{[e^{u_1} + e^{-u_1} + g_1(z)]'_z} \Big|_{z=z_{n,1}} = \\ &= \frac{\left[\frac{P_{s,2}P_{s+1,2}}{P_{s,1}P_{s+1,1}}\right]^{1/2} \{e^{u_1} \left[\frac{P_{s,2}P_{s+1,1}}{P_{s,1}P_{s+1,2}}\right]^{1/2} + e^{-u_1} \left[\frac{P_{s,1}P_{s+1,2}}{P_{s,2}P_{s+1,1}}\right]^{1/2}\}}{(e^{u_1} + e^{-u_1})'_{u_1} u'_{1z} + g'_1(z)} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{g_2(z) \left[\frac{P_{s,2} P_{s+1,2}}{P_{s,1} P_{s+1,1}} \right]^{1/2}}{(e^{u_1} + e^{-u_1})'_{u_1} u'_{1z} + g'_1(z)} \Big|_{z=z_{n,1}}.$$

Поскольку при $z = z_{n,1}$, $u_1 \sim (n + \frac{1}{2})\pi i$, а также поскольку $|g_2(z_{n,1})| < \text{const } e^{-\delta|z_{n,1}|}$, $|g'_1(z_{n,1})| < \text{const } e^{-\delta|z_{n,1}|}$, $\delta > 0$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\beta_{n,s} \sim \left[\frac{P_{s,2}(z_{n,1})}{P_{s,1}(z_{n,1})} - \frac{P_{s+1,2}(z_{n,1})}{P_{s+1,1}(z_{n,1})} \right] \times \\ \times \left[\alpha_s - \alpha_{s+1} + \frac{P'_{s,1}(z_{n,1})}{P_{s,1}(z_{n,1})} - \frac{P'_{s+1,1}(z_{n,1})}{P_{s+1,1}(z_{n,1})} \right]^{-1}. \quad (1.11)$$

Формулой (1.11) мы ниже воспользуемся для нахождения асимптотики $\beta_{n,s}$ при $n \rightarrow \infty$, а сейчас нам достаточно заключить, что существует такое число A , что для всех номеров n и s $|\beta_{n,s}| < A$. Но это непосредственно следует из вида функций $P_{s,i}$, $P_{s+1,i}$ $i = 1, 2$. Таким образом, при $\text{Re } \sigma > 1$ ряд $\sum_{(n)} z_n^{-\sigma} \beta_n$ равномерно сходится (индекс

s , $s = 0, 1, \dots, r-1$, у $z_{n,s}$ и $\beta_{n,s}$ для простоты опускаем).

Заметим, что существует целое положительное число m_0 и последовательность контуров C_m , $m = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots$, на z -плоскости таких, что

а) Контур C_m выходит из некоторых точек $a_m \in l$, $|a_m| = \frac{2\alpha m}{\cos \varepsilon}$, $m > m_0$; обходят начало координат и возвращаются в точку a_m , лежащую на другом берегу луча l контура Γ_0 . Обход совершается против часовой стрелки, $C_m \subset C_{m+1}$, $m > m_0$, α — некоторое число, 2ε — величина угла секторов T_s .

б) Для $m > m_0$ контур C_m в областях Ω_s , $s = 0, 1, \dots, r-1$, совпадает с участками окружности $|z| = \frac{2\alpha m}{\cos \varepsilon}$, если $z \in T_s$, то контур C_m проходит по некоторым линиям, расположенным в областях, имеющих вид равнобоковых трапеций, боковые стороны которых лежат на сторонах T_s , средние линии эти трапеций пересекают биссектрисы секторов T_s на расстоянии $2\alpha m$ от начала координат, высоты этих трапеций равны 2α .

в) Общая длина контура C_m не превосходит величины $B \cdot m$, причем число B не зависит от m .

г) На контурах C_m с некоторой константой C (не зависящей от m) выполнена оценка

$$|\Phi(z)| < C, \quad z \in C_m, \quad \forall m > m_0.$$

Действительно, построим сначала те части контура C_m , которые

лежат в секторах T_s . Очевидно, достаточно рассмотреть один из секторов T_{s_0} . Запишем функцию $\Phi(z)$, $z \in T_{s_0}$, $|z| > R$ в виде

$$\Phi(z) = \frac{e^{v_{2,s_0}}[e^{u_{2,s_0}} + e^{-u_{2,s_0}} + g_2(z)]}{e^{v_{1,s_0}}[e^{u_{1,s_0}} + e^{-u_{1,s_0}} + g_1(z)]},$$

где v_{i,s_0} , u_{i,s_0} — те же функции, что и в формулах (1.9), (1.9'), но с $s = s_0$.

Очевидно, при $|\operatorname{Im} u_{1,s_0}| = m\pi$, если m — достаточно большое целое число, можно записать

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| &= \left| \frac{P_{s_0,2} P_{s_0+1,2}}{P_{s_0,1} P_{s_0+1,1}} \right|^{1/2} \times \\ &\times \frac{e^{u_{s_1,s_0}} \left[\frac{P_{s_0,2} P_{s_0+1,1}}{P_{s_0+1,2} P_{s_0,1}} \right]^{1/2} + e^{-u_{1,s_0}} \left[\frac{P_{s_0+1,2} P_{s_0,1}}{P_{s_0,2} P_{s_0+1,1}} \right]^{1/2} + g_2}{|e^{u_1} + e^{-u_1} + g_1|} \leq \\ &\leq \frac{\operatorname{const} e^{|\operatorname{Re} u_{1,s_0}|}}{\operatorname{const} e^{|\operatorname{Re} u_{1,s_0}|}} = \operatorname{const}. \end{aligned}$$

Как мы уже говорили, отображение, осуществляемое функцией u_1 переводит точки $z \in T_{s_0}$, $|z| > R_1$ в точки u_{1,s_0} , образующие множество u_{1,s_0} -плоскости, причем при достаточно больших $|u_{1,s_0}|$ это множество будет асимптотически стремиться совпасть с точками сектора \hat{T}_{s_0} , биссектрисой которого является полуось мнимой оси.

Рассмотрим участки прямых $|\operatorname{Im} u_{1,s_0}| = m\pi$, при m достаточно большом, лежащие в образе множества: $z \in T_{s_0}$, $|z| > R_1$, и опишем вид тех, которые лежат в секторе T_{s_0} и которые являются прообразами при отображении u_{1,s_0} указанных участков.

Можно убедиться используя (1.9), что максимум расстояния между линиями в секторе T_{s_0} не будет превосходить при достаточно большом $|z|$ некоторой константы b_{s_0} . Пусть $\alpha = \max_{0 \leq s \leq r-1} b_s$. Более того, b_{s_0} можно выбрать так, что две соседние линии будут целиком попадать в секторе T_{s_0} в полосу ширины b_{s_0} , перпендикулярную биссектрисе сектора.

В секторах Ω_s , $s = 0, 1, \dots, r-1$, проведем участки окружностей $|z| = \frac{2\alpha m}{\cos \varepsilon}$, m — достаточно большие целые числа. Точки пересечения выбранных участков окружностей с сектором T_{s_0} соединим отрезками и примем их за средние линии указанных выше трапеций высоты 2α . Если m достаточно точно большое, то в каждой из таких трапеций целиком будет содержаться линия, являющаяся прообразом одного из отрезков $|\operatorname{Im} u_{1,s_0}| = m\pi$. Эту линию мы и примем за искомый

участок контура C_m , лежащий внутри сектора T_{s_0} . Если m достаточно большое, то аналогичные построения мы можем провести для любого сектора T_s .

Участки указанных окружностей в секторах Ω_s и линий в секторах T_s соединим по сторонам секторов T_s .

Поскольку при $z \in \bar{\Omega}_s$, $s = 0, 1, 2, \dots, r-1$, $\operatorname{Re} \alpha_s z - \operatorname{Re} \alpha_k z > \delta|z|$, $k \neq s$, то всюду на построенных так контурах выполнена оценка $|\Phi(z)| < \operatorname{const}$, если $m \geq m_0$. Число m_0 можно выбрать столь большим, что для всех чисел $m > m_0$ прообразы указанных участков линий $|\operatorname{Im} u_1| = m\pi$ будут спрямляемые жордановы кривые, длины которых легко оцениваются.

Утверждение в) о контурах легко следует из построения, вида функции (1.9), а также из сказанного выше.

Закончим теперь доказательство теоремы 1.

Рассмотрим замкнутый контур, состоящий из контура C_m и участка Γ_{0,a_m} контура Γ_0 от нуля до точки a_m . Полученный контур является замкнутым и при $\operatorname{Re} \sigma > 1$ к интегралу $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_m + \Gamma_{0,a_m}}^* z^{-\sigma} \Phi(z) dz$ применим теорему Коши о вычетах. Устремим теперь m к бесконечности. Интеграл по C_m при $\operatorname{Re} \sigma > 1$ стремится к нулю. Поэтому при $\operatorname{Re} \sigma > 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} z^{-\sigma} \Phi(z) dz = \sum_{(n)} z_{n,1}^{-\sigma} \beta_n,$$

где β_n — суть вычеты $\Phi(z)$ в точках $z_{n,1}$ — нулях функции $f_1(z)$. Теорема 1 доказана. \square

Заметим теперь, что из формулы (1.11) для чисел $\beta_{n,s}$ следует асимптотическое предсказание

$$\beta_{n,s} \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\gamma_{l,s}}{z_{n,1,s}^l} \quad (1.12)$$

Числа $\gamma_{l,s}$ выражаются в явном виде через числа α_s , α_{s+1} , n_s , n_{s+1} , $\beta_{k,1}^{(s)}$, $\beta_{k,2}^{(s)}$, $\beta_{k,1}^{(s+1)}$, $\beta_{k,2}^{(s+1)}$, $l, k = 0, 1, 2, \dots$, и мы будем считать их известными. Далее,

$$\begin{aligned} z_{n,1,s}^{-\sigma} \beta_{n,s} &\sim \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_{l,s} z_{n,1,s}^{-l-\sigma} \sim \\ &\sim \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_{l,s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_k^{(s)}(\sigma + l, \ln n)}{n^{k+\sigma+l}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{n^{p+\sigma}} \sum_{l=0}^p \gamma_{l,s} Q_{p-l}^{(s)}(\sigma + l, \ln n) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{R_p^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{p+\sigma}},$$

где

$$Q_k^{(s)}(\sigma + l, \ln n) = a_s^{-\sigma-l} \sum_{\nu=0}^k d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma + l) \ln^{\nu} n,$$

а $d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma + l)$ — полиномы относительно $\sigma + l$,

$$d_{0,0}^{(s)}(\sigma + l) = 1, d_{1,0}^{(s)}(\sigma + l) = -(\sigma + l)c_s, d_{1,1}^{(s)} = -(\sigma + l)b_s, \dots,$$

$$R_p^{(s)}(\sigma, \ln n) = \sum_{l=0}^p \gamma_{l,s} Q_{p-l}^{(s)}(\sigma + l, \ln n) = \sum_{\nu=0}^p f_{p,\nu}^{(s)}(\sigma + l) \ln^{\nu} n,$$

$$f_{p,\nu}^{(s)}(\sigma + l) = \sum_{l=0}^{p-\nu} \gamma_{l,s} a_s^{-\sigma-l} d_{p-l}^{(s)}(\sigma + l).$$

Фиксируем некоторое целое достаточно большое число τ . Функция

$$\Psi_{\tau}^{(0)}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{r-1} \left[z_{n,1,s}^{-\sigma} \beta_{n,s} - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{R_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}} \right]$$

допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} \sigma > -\tau$. Штрих над знаком суммы выше связан с дефектом регуляризации (см. [1]).

Из выше сказанного следует

ТЕОРЕМА 2. При любом целом $m < \tau$ справедливы равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{r-1} \left[z_{n,1,s}^m \beta_{n,s} - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{R_k^{(s)}(-m, \ln n)}{n^{k-m}} \right] = \omega_{m+1}^{(0)} - \Phi_{\tau}^{(0)}(-m),$$

где $\omega_{m+1}^{(0)}$ — коэффициенты разложения (1.4), а

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau}^{(0)}(\sigma) &= \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^k \sum_{l=0}^{k-\nu} \sum_{s=0}^{r-1} \gamma_{l,s} a_{s,1}^{-\sigma-l} d_{k-1}^{(s)}(\sigma + l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\nu} n}{n^{k+\sigma}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^k \sum_{l=0}^{k-\nu} D_{l,k}(\sigma) (-1)^{\nu} \zeta^{(\nu)}(k + \sigma). \end{aligned}$$

Положим в полученных формулах $m = 0$. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{r-1} \left[\beta_{n,s} - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{R_k^{(s)}(0, \ln n)}{n^k} \right] = \omega_1^{(0)} - \Phi_{\tau}^{(0)}(0).$$

§ 2. Пример оператора Штурма–Лиувилля. Асимптотика спектральной функции

Рассмотрим две самосопряженные задачи Штурма–Лиувилля – задачи L_1 и L_2

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, & y'(0) - h_1 y(0) &= 0, \\ y'(\pi) + H y(\pi) &= 0, & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi_i(0, \lambda)$ – решения уравнения такие, что

$$\varphi_i(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'_i(0, \lambda) = h_i, \quad i = 1, 2.$$

Пусть

$$\Phi_i(\lambda) = \varphi'_i(\pi, \lambda) + H \varphi_i(\pi, \lambda), \quad i = 1, 2.$$

Если $\rho(\lambda)$ – спектральная функция задачи L_1 :

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}, \quad \alpha_n = \int_0^{\pi} y_n^2(x) dx, \quad y_n(0) = 1,$$

$y_n(x)$ – собственные функции задачи L_1 , то нетрудно заключить, что $\frac{1}{\alpha_n}$ суть вычеты функции $F(\lambda) = \frac{1}{h_1 - h_2} \frac{\Phi_2(\lambda)}{\Phi_1(\lambda)}$ при $\lambda = \lambda_n$, т. е.

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{h_1 - h_2} \frac{\Phi_2(\lambda_n)}{\Phi'_1(\lambda_n)}.$$

Известно, что при достаточной дифференцируемости функции $q(x)$ для α_n , λ_n справедливы асимптотические равенства

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_4}{n^4} + \dots, \quad \lambda_n = n^2 + c_0 + \frac{c_2}{n^2} + \dots.$$

Для функций $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ справедливы следующие асимптотические разложения

$$\Phi_1(\lambda) \sim e^{i\sqrt{\lambda}\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{n_{\nu}(\pi)}{(\sqrt{\lambda})^{\nu-1}} + e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{m_{\nu}(\pi)}{(\sqrt{\lambda})^{\nu-1}},$$

$$\Phi_2(\lambda) \sim e^{i\sqrt{\lambda}\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{p_{\nu}(\pi)}{(\sqrt{\lambda})^{\nu-1}} + e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} \sum_{n_{\nu}=0}^{\infty} \frac{q_{\nu}(\pi)}{(\sqrt{\lambda})^{\nu-1}}.$$

Здесь $\sqrt{\lambda}$ — фиксированная ветвь корня, принимающая положительные значения для положительных чисел λ , а для чисел $n_{\nu}(\pi)$, $m_{\nu}(\pi)$, $p_{\nu}(\pi)$, $q_{\nu}(\pi)$ можно получить рекуррентные соотношения, и мы будем считать их известными. Так,

$$n_0(\pi) = -\frac{1}{2i}, \quad n_1(\pi) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} q(t) dt + \frac{h_1}{2} + \frac{H}{2},$$

$$\begin{aligned} n_2(\pi) &= \frac{i}{8}(q(\pi) - q(0)) - \frac{i}{16} \left(\int_0^{\pi} q(t) dt \right)^2 - \\ &- \frac{ih_1}{4} \int_0^{\pi} q(t) dt + \frac{q(\pi)}{4i} + H \left(\frac{1}{4i} \int_0^{\pi} q(t) dt + \frac{h_1}{2i}, \dots \right. \\ m_0(\pi) &= -n_0(\pi), \quad m_1(\pi) = n_1(\pi), \end{aligned}$$

$m_2(\pi) = -n_2(\pi) + \frac{q(\pi)}{2i}$, числа $p_0(\pi)$, $p_1(\pi)$, \dots , $q_0(\pi)$, $q_1(\pi)$, \dots те же, что и соответствующие числа n_i , m_i , $i = 0, 1, \dots$, но с h_2 вместо h_1 . Функции $f_i(z) = \Phi_i(z^2) = \Phi_i(\lambda)$, $z^2 = \lambda$, $i = 1, 2$, класса K .

Пусть $\beta_n = \frac{1}{h_1 - h_2} \operatorname{res}_{z=z_n} \frac{f_2(z)}{f_1(z)} \operatorname{res}_{z=z_n} \Phi(z)$, где $\Phi(z) = \frac{1}{h_1 - h_2} \frac{f_2(z)}{f_1(z)}$, а z_n — нули $f_1(z)$. Очевидно, что $\alpha_n^{-1} = 2\beta_n z_n$, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому из формул теоремы 2 мы очевидно имеем ($m = 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{2}{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} - h_1, \quad (2.1)$$

причем ряд абсолютно сходится.

Значит, если учесть, что $\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$, то из (2.1) получаем, что

$$\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 + \frac{1}{\pi} - h_1 + o(1) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

т. е.

$$\rho(\lambda) = \rho_0(\lambda) + \frac{1}{\pi} - h_1 + o(1) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad \text{где } \rho_0(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sum_{\lambda_n < \lambda} 1.$$

Если теперь рассмотреть две самосопряженные задачи:

$$\begin{aligned} -y'' + q_i(x) &= \lambda y, & y'(0) &= hy(0) = 0, \\ y'(\pi) + H_i y(\pi) &= 0, & i &= 1, 2, \end{aligned}$$

и обозначить через $(\alpha_n^i)^{-1}$ скачки соответствующих спектральных функций этих задач: $\rho_i(\lambda) = \sum_{\lambda_n, i < \lambda} \frac{1}{\alpha_n^i}$, $i = 1, 2$, то из формулы (2.1) следует также

ТЕОРЕМА 3. Для чисел α_n^i , $i = 1, 2$, справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n^1} - \frac{1}{\alpha_n^2} \right) = 0,$$

т. е. при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda) + o(1).$$

Литература

1. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Функциональный анализ. 1, № 2. 1967.
2. Садовничий В. А. Аналитические методы в спектральной теории дифференциальных операторов (Курс лекций) Изд-во МГУ, 1973.