УДК 517.5

О нулях целых функций одного класса[1]

В. А. Садовничий, В. А. Любишкин, Ю. Белаббаси

В работе [1] был введен класс K целых функций, допускающих представление вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} \exp(a_k z) P_k(z), \tag{1}$$

где a_k – комплексные постоянные, а

$$P_k(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu^k z^\nu \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{2}$$

В формуле (2) n_k – некоторые целые числа, а $\beta_0^{(k)} \neq 0$. Предполагается, что плоскость z можно покрыть конечным числом секторов, содержащих начало координат, в каждом из которых $P_k(x)$ являются аналитическими при больших по модулю z. Будем предполагать также, что формула (2) допускает почленное дифференцирование. Числа $a_k, n_k, \beta_\nu^{(k)}$ будем называть параметрами асимптотики функции $f(z)$.

Отметим на комплексной плоскости точки $\bar{a_1}, \dots < \bar{a_N}$, и их выпуклую оболочку обозначим через R. В общем случае R есть r-угольник ($r \leqslant N$). В работе [1] были получены явные выражения через параметры асимптотики $f(z)$ для регуляризованных сумм корней функции $f(z)$, т.е. сумм вида $\sum\limits_{(l)} [z_l^m - A_m(l)]$ (здесь z_l – корни функции $f(z)$ с учетом их кратности, а $A_m(l)$ – некоторые вполне определенные числа, обеспечивающие сходимость рядов, m – любое натуральное число) в случаях, когда на границе многоугольника R лежат лишь r чисел, попадающих в его вершины (остальные $N - r$ показателей попадают,

[1]Труды семинара им. И.Г. Петровского, вып. 8, 1982. с.211–217.

следовательно, внутрь многоугольника), либо в предположении, что показатели экспонент, лежащие на границе многоугольника R, делят стороны этого многоугольника на соизмеримые части.

Однако при решении спектральных задач на отрезке с граничными условиями во внутренних точках (так называемые многоточечные задачи) часто возникают функции класса K, для которых высказанные выше предположения о расположении показателей экспонент не выполняются. В работе [2] были анонсированы результаты, позволяющие вычислять регуляризованные суммы корней более широкого набора целых функций класса K. Данная работа будет посвящена этим вопросам. Назовем направления внешних нормалей к K критическими. Удалим из z-плоскости r секторов с вершинами в начале координат сколь угодно малого раствора с биссектрисами, параллельными критическим направлениям. Оставшуюся часть плоскости обозначим через Ω, она распадается на r открытых секторов $\Omega(s = 1, 2, \ldots, r)$.

Справедливы следующие утверждения (см.[1]).

Л е м м а 1. *При достаточно большом M в пересечении областей $|r| > M$ и Ω отсутствуют нули $f(z)$.*

Выберем в одном из секторов Ω_s (для определенности Ω_1) луч l и построим контур Γ, состоящий из дважды проходимого луча l и окружности γ с центром в 0. Не нарушая общности, можно считать, что $f(0) \neq 0$ (в противном случае $f(z)$ можно бы было разделить на целую степень z). Очевидно, что при этом луч l и окружность γ можно выбрать так, чтобы все нýли $f(z)$ оказались во внешности контура Γ. Замечая далее, что при $z \in \Gamma$, $z \to \infty$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = a_1 + \frac{p_1'(z)}{p_1(z)} + 0(\exp(-\delta|z|)) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_\nu}{z^\nu}, \tag{3}$$

введем в рассмотрение интеграл $z(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$, который сходится в полуплоскости $Re\sigma > 1$. В формуле для $Z(\sigma)$ $z^{-\sigma} = \exp(-\sigma \ln z)$, где $\ln z$ – фиксированная регулярная ветвь во внешности Γ. Функцию $Z(\sigma)$ назовем дзета-функцией, ассоциированной с функцией $f(z)$.

Л е м м а 2. *При $Re\sigma > 1$,*

$$Z(\sigma) = \sum_l z_l^{-\sigma},$$

где z_l – нули $f(z)$.

Л е м м а 3. *Дзета-функция $Z(\sigma)$ аналитически продолжается на всю σ-плоскость как целая функция.*

Л е м м а 4. *При* $m = 2, 3, \ldots$

$$Z(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\nu} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{1}{z^m} dz,$$

при $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$Z(-m) = \omega_{m+1},$$

где ω_ν *- коэффициенты в разложении (3).*

Перейдем к изучению асимптотического расположения корней функции $f(z)$. Выберем для определенности какую-нибудь сторону многоугольника R и рассмотрим серии корней функции $f(z)$, соответствующих выбранному критическому направлению. Известно, что те члены в разложении (1), показатели экспонент которых не лежат на выбранной нами стороне многоугольника, не оказывают влияния на асимптотическое распределение изучаемых нами серий корней. По этой причине, и поскольку рассмотрение всех сторон многоугольника аналогично, нам достаточно изучить случай, когда многоугольник R является отрезком. Если этот отрезок расположен под углом ϕ к действительной оси z-плоскости, то нетрудно видеть, что, сделав замену $z_1 \exp(i\phi)z$, мы приходим к случаю, когда отрезок параллелен действительной оси. Таким образом, после сделанных замечаний нам достаточно изучить случай, когда все показатели a_k – действительные числа.

Отметим на плоскости в декартовой системе координат точки P_j с координатами $(a_j nj)$. Напомним, что n_J – целое число в формуле (2). Без ограничения общности можно считать, что все $n_j \geqslant 0$, поскольку в противном случае все выражение можно было бы умножить на целую степень z, что не отразится на формулах асимптотического распределения изучаемых нами серий корней. По точкам P_j построим ломаную линию L , обладающую следующими свойствами:

a) ломаная имеет вершины только в точках P_j;

b) она выпукла вверх или является отрезком;

c) ни одна точка P_j не лежит выше нее.

Будем для определенности считать, что в вершины ломаной попали точки $P_1 = (a1, n_1), \ldots, P_k = a_k n_k)$. Пусть $L_1, \ldots, L_k$ – последовательные звенья ломаной L . Тогда угловой коэффициент звена L_i равен $\mu_i = \frac{n_{i+1} - n_i}{a_{i+1'} - a_i}$. Заметим, что ломаная L выбрана так, что $\mu_1 > \mu_2 > \ldots m_k$. Может случиться, что ломаная L содержит звено L_{i_0}, параллельное действительной оси. В дальнейшем будем считать, что если звено L_{i_0} существует, то внутри L_{i_0} нет точек P_j либо эти точки делят его на сравнимые части. Известно (см.[3]), что каждому отрезку ломаной L отвечает одна или несколько серий корней $f(z)$, асимптотическое распределение которых в главном определяется теми членами разложения $f(z)$, у которых соответствующие им точки P_j лежат на данном звене. Остановимся на этом более подробно. Выделим для определенности некоторое звено L_r. Предположим сначала, что $\mu \neq 0$. Тогда серии корней, соответствующие звену L_r, асимптотически приближаются к корням уравнения

$$\sum_{(L_r)} \beta_0^j z^{(n_j - n_r)} \exp(a_j - a_r) z = 0, \tag{4}$$

которое называется уравнением сравнения для данной серии корней ($\sum\limits_{L_r}$ означает, что в сумму входят только те члены разложения $f(z)$, у которых соответствующие им точки P_j лежат на звене L_r).

Заметим, что для точек P_j, лежащих на звене L_r, справедливо соотношение $\frac{n_j - n_r}{a_j - a_r} = \mu_r$. Тогда уравнение сравнения (4) перепишется в виде

$$\sum_{L_r} \beta_0^j \exp\left[(n_j - n_r)(\frac{z}{\nu_r} + \ln z)\right] = 0.$$

Заметим, что $(n_j - n_r)$ – целые числа, и, обозначив $s = \exp[\frac{z}{\mu_r} + \ln z]$, получим, что уравнение сравнения имеет вид $Q_r(s) = 0$, где $Q_r(s)$ – многочлен, следующим образом выражающийся через параметры асимптотики функции $f(z)$:

$$Q_r(s) = \sum_{(L_r)} \beta_0^j s^{(n_j - n_r)}. \tag{5}$$

Для звена L_{i_0} уравнение сравнения имеет вид

$$\sum_{(L_{i_0})} \beta_0^{(j)} \exp[(a_j - a_{i_0}) z] = 0. \tag{6}$$

Так как в силу нашего предположения существует число a такое, что для всех точек P_j, принадлежащих звену L_{i_0}, справедливо соотношение $a_j - a_{i_0} = m_j a$, где m_j – целые числа, то, обозначив $s = \exp(az)$, получим, что и для звена L_{i_0} уравнение сравнения имеет вид $Q_{i_0}(s) = 0$, где $Q_{i_0}(s)$ многочлен, выражающийся через параметры асимптотики $f(z)$:

$$Q_{i_0}(s) = \sum_{(L_{i_0})} \beta_0^j s^{m_i}. \tag{7}$$

Следовательно справедлива следующая лемма.

Л е м м а 5. *Корни функции $f(z)$ разбиваются на конечное число серий, для которых справедлива асимптотическая формула*

$$z_{n,l,\nu} = s_{n,l,\nu} + 0(1)$$

при $n \to \infty$, где $n = 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots, k$ – номер звена, $\nu = 1, \ldots, k(l)$ – номер серии (для каждого звена своя нумерация серий), а $S_{n,l,\nu}$ – корни уравнений

$$s \exp\left(\frac{s}{\mu_l}\right) = u_{l,\nu} \quad \textit{при } \mu \neq 0 \textit{ и } \exp(as) = u_{i_0,\nu} \textit{ при } l = i_0,$$

где $u_{l,\nu}$ – отличные от нуля корни многочлена $Q_l(s)$, имеющего вид (5) или (7) соответственно.

Формулы асимптотического распределения корней уравнения $s \exp\left(\frac{s}{\mu_l}\right) = u_{l\nu}$ легко устанавливаются методом итераций, и мы не будем подробно останавливаться на их выводе, а сформулируем окончательный результат. Справедлива

Л е м м а 6. *Для корней уравнений сравнения справедливы следующие асимптотические разложения.*

При

$$\mu_l \neq 0 \ s_{n,l,\nu} \sim a_{l,\nu} n\{1 + b_{l,\nu}\frac{\ln n}{n} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_k^{(l,\nu)}(\ln n)}{n^{k+1}}\}, \tag{8}$$

где $R_k^{(l,\nu)(\ln n)}$ – полиномы степени $\leqslant k$ относительно $\ln n$, а все коэффициенты выражаются через параметры асимптотики функции $f(z)$. В частности, $a_{l,\nu} = 2\pi i \mu_l$, $b_{l,\nu} = \frac{1}{2\pi i}$. При $l = i_0$

$$S_{n,l,\nu} \frac{1}{a} \ln u_{i_0,\nu} + \frac{2\pi n}{a}. \tag{9}$$

Заметим, что формулу (9) можно считать частным случаем формулы (8), отметим только, что формула (9) не содержит логарифмических членов. Формулы асимптотического распределения корней функции

$f(z)$ получаются также с помощью метода последовательных приближений, при этом вполне естественно, что в качестве первого приближения берется величина $S_{n,l,\nu}$. Пусть $\mu \neq 0$. Умножим выражение (1) на $z^{-n_r} \exp(-a_r, z)$. Легко видеть, что получившееся выражение можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{z^{d_{k,r}}} \exp\left[\left(\frac{z}{\mu_r} + \ln z\right)\beta_{k,r}\right]\left(\beta_0^{(k)} + \frac{\beta_1^{(k)}}{z} + \dots + \frac{\beta_\nu^{(k)}}{z^\nu} + \dots\right), \tag{10}$$

где

$$d_{k,r} = (a_k - a_r)\mu_r - (n_k - n_r), \ \ \beta_{k,r} = (a_k - a_r)\mu_r. \tag{11}$$

Отметим, что d_{kr} и $\beta_{k,r}$ отличаются на целое число. Как видно из формулы (11), если точка P_j лежит на выделенном нами звене L_r, то

$$d_{j,r} = 0 \quad \text{и} \quad \beta_{j,r} = n_j - n_r, \tag{12}$$

в то время как при $P_j \in L$ из свойств ломаной следует, что соответствующие d_{jr} являются строго положительными числами, причем не обязательно целыми. Напомним, что согласно лемме 5

$$\frac{s_{n,l,\nu}}{\mu_l} + \ln s_{n,l,\nu} = \ln u_{l,\nu} + 2\pi i n. \tag{13}$$

Положим $z_{n,r,\nu} = s_{n,r,\nu} + \delta$ и подставим в (10). Раскладывая получившиеся выражения в ряды Тейлора, непосредственным подсчетом убеждаемся, что (10) перепишется в виде

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{s_{n,r,\nu}^{d_{k,r}}} \exp\left[\left(\frac{s_{n,r,\nu}}{\mu_r} + \ln s_{n,r,\nu}\right)\beta_{k,r}\right] \times \\ \times \left[\beta_0^{(k)} + \delta(\alpha_k - \alpha_r)\mu_r + \frac{\beta_1^{(k)}}{s_{n,r,\nu}} \sum_{n_1+n_2=2}^{\infty} \gamma_{n_1,n_2}^{(k)} \frac{\delta^{n_1}}{s_{n,r,\nu}^{n_2}}\right], \end{gathered} \tag{14}$$

где коэффициенты $\gamma_{n_1 n_2}^{k}$ явно вычисляются через параметры асимптотики функции $f(z)$. Выделив в сумме слагаемые, соответствующие точкам P_j, лежащим на звене L_r, учитывая соотношения (11, (12) и (13) и приравняв получившееся выражение нулю, получим уравнение

$$\begin{gathered} Q_r(u_{r,\nu}) + \delta u_{r,\nu} Q_r'(u_{r,\nu}) + \\ + \sum_{p_k \in L_r} \left[\frac{\beta_1^{(k)} u_{r,\nu}^{(n_k - n_r)}}{s_{n,r,\nu}} + \sum_{n_1+n_2=2}^{\infty} \gamma_{n_1 n_2}^{(k)} \frac{\delta^{n_1}}{s_{n,r,\nu}^{n_2}}\right] + \end{gathered}$$

$$+\sum_{P_k\notin L_r}\frac{\exp(2\pi i n\beta_{k,r})}{s_{n,r,\nu}^{d_{k,r}}}\left(\beta_0^{(k)}+\sum_{n_1+n_2=1}^{\infty}\bar{\gamma}_{n_1,n_2}^{(k)}\frac{\delta^{n_1}}{s_{n,r,\nu}^{n_2}}\right)=0. \qquad (15)$$

Заметим, что в формуле (15), учитывая сделанное выше замечание, можно β_{kr} заменить на d_{kr}; кроме того, можно считать, что слагаемые в сумме, отвечающие точкам P_j, лежащим на звене L_r, также содержат экспоненциальные множители, которые равны в данном случае 1, поскольку β_{jr} являются целыми числами.

Предположим, что $u_{r,\nu}$ является простым корнем многочлена$Q_r(s)$ (если $u_{r,\nu}$ имеет кратность m, то в формуле (16) член максимального порядка по δ будет иметь вид $A\delta^m$, $A\neq 0$, что приведет к очевидным изменениям дальнейших рассмотрений), тогда применение итерационного процесса приведет нас к следующему результату. Пусть $p_1\dots,p_{q(r)}$ – базис чисел 1, $d_{k,r}k=1,\dots,N$ (т.е. каждое из этих чисел есть линейная комбинация p_i с целыми положительными коэффициентами).

Л е м м а 7. *Корни функции $f(z)$ имеют следующее асимптотическое распределение:*

$$z_{n,r,\nu}\sim s_{n,r,\nu}+$$
$$+\sum_{i_1+\dots+i_{q(r)}=1}^{\infty}A_{i_1\dots,i_{q(r)}}^{r,\nu}\frac{\exp[2\pi n(i_1p_1+\dots+i_{q(r)}p_{q(r)})]}{s_{n,r,\nu}^{i_1p_1+\dots+i_{q(r)}p_{q(r)}}} \qquad (16)$$

при $n\to\infty$, где коэффициенты $A_{i_1,\dots,i_{q(r)}}^{(r,\nu)}$ выражаются через параметры асимптотики функции $f(z)$.

З а м е ч а н и е 1. *Выше мы рассматривали случай $\mu_r=0$. При $\mu_r=0$ ситуация будет несколько упрощаться, поскольку, как видно из формул (11), в этом случае все d_{kr}, являются целыми числами, и формула асимптотического распределения этой серии корней будет содержать только целые степени $s_{n,r,\nu}$ без экспоненциальных множителей, что можно считать частным случаем формулы (16).*

З а м е ч а н и е 2. *Первые приближения $s_{n,r,\nu}$ определяются только теми членами разложения функции $f(z)$ (1), у которых соответствующие им точки P_j лежат на звене L_r. Однако, как следует из доказательства леммы 8, на следующие члены асимптотики корней $f(z)$ существенное влияние оказывают все слагаемые суммы (1).*

Для вычисления регуляризованных сумм корней функции $f(z)$ нам понадобится асимптотическое распределение степеней корней$f(z)$. Возводя (16) в степень – σ и учитывая, что формула Тейлора для функции $(1+x)^a$ справедлива и при комплексных x и a, приходим к следующему результату:

$$z_{n,r,\nu}^{\sigma} \sim \sum_{i_1+\cdots+i_{q(r)}=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{i_1+\cdots+i_{q(r)}} Q_{t,i_1,\ldots,i_{q(r)}}^{r,\nu}(\sigma)\times \\ \times \frac{\exp[2\pi i n(i_1 p_1+\cdots+i_{q(r)}p_{q(r)})]}{s_{n,r,\nu}^{i_1 p_1+\cdots+i_{q(r)}p_{q(r)}+t+\sigma}} \tag{17}$$

при $n\to\infty$, где $Q_{t,i_1,\ldots,i_{q(r)}}^{(r,\nu)}(\sigma)$ – полиномы от σ степени не больше t, которые выписываются через параметры асимптотики функции $f(x)$. В частности,

$$Q_{0,0,\ldots,0}^{(r,\nu)}(\sigma)=1,\ Q_{1,1,0,\ldots,0}^{(r,\nu)}(\sigma)=$$

$$=-A_{1,0,\ldots,0}^{(r,\nu)}\cdot\sigma,\ldots,Q_{1,0,\ldots,1}^{(r,\nu)}(\sigma)=-A_{0,0}^{r,\nu)\ldots,1}\cdot\sigma.$$

Подставляя в (17) выражения (8), (9), получим

$$z_{n,r,\nu}^{-\sigma} \sim \sum_{i_0+i_1+\cdots+i_{q(r)}=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{i_1+\cdots+i_{q(r)}} Q_{t,i_1,\ldots,i_{q(r)}}^{(r,\nu)}(\sigma)\times \\ \times\sum_{\mu=0}^{i_0} a_{r,\nu}^{-(\sigma+t+p} d_{i_0,\mu}^{(r,\nu)}(\sigma+t+p)\ln^{\mu} n\frac{\exp(2\pi i n p)}{nt+\sigma+i_0+p} \\ \text{при } n\to\infty, \tag{18}$$

где $p=p_1 i_1+\cdots+p_{q(r)}i_{q(r)}$, $d_{i_0,\mu}^{(r,\nu)}$ – некоторые полиномы от $\sigma+t+p$, коэффициенты которых выражаются через параметры асимптотики функции $f(z)$. В частности,

$$d_{0,0}^{(r,\nu)}(z)=1,\ d_{1,0}^{(r,\nu)}(z)=-zR_0^{(r,\nu)},\ d_{1,1}^{(r,\nu)}(z)=-zb_{r,\nu},$$

где $R_0^{r,\nu}$ и b_r из формулы (8). Перейдем к вычислению регуляризованных сумм корней. Пусть τ – достаточно большое целое число. Введем функцию

$$\Psi_\tau(\sigma)=\sum_{r=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k(r)}\sum_{n=1'}^{\infty} z_{n,r,\nu}^{-\sigma}-\Phi_\tau(\sigma), \tag{19}$$

где

$$\Phi_\tau = (\sigma)\sum_{r=0}^{k}\sum_{\nu=1}^{k(r)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_0+p<\tau+1}\sum_{t=0}^{i_1+\dots+i_{q(r)}} Q_{t,i_1,\dots,i_{q(r)}}^{(r,\nu)}(\sigma)\times$$
$$\times\sum_{\mu=0}^{i_0} a_{r,\nu}^{-(\sigma+t+p)} d_{i_0,\mu}^{(r,\nu)}(\sigma+t+p)\ln^\mu n\frac{\exp(2\pi inp)}{nt+\sigma+i_0+p}. \tag{20}$$

Штрих в (19) связан с дефектом регуляризации (см. [1]).

Из асимптотического представления для $z_{n,r,\nu}^{-\sigma}$ следует, что функция $\Psi_\tau(\sigma)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $Re\sigma >$ $> -\tau$. Наша цель – отыскание чисел $\Psi_\tau(-m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, которые мы назовем регуляризованными m-суммами корней $f(z)$. Имеем, $\Psi_\tau(\sigma) = Z(\sigma) - \Phi_\tau(\sigma)$, где $Z(\sigma)$ – дзета-функция, ассоциированная с $f(x)$. Так как $Z(\sigma)$ – целая функция, то вместе с $\Psi_\tau(\sigma)$ функция $\Phi_\tau(\sigma)$ также продолжается в полуплоскость $Re\sigma > -\tau$. Введем функцию $F(z,\lambda)$, которая при $|z| \leqslant 1$ и $Re\lambda > 1$ допускает представление $F(z,\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\lambda}$ и при фиксированном z аналитически продолжается на всю λ плоскость как мероморфная функция (см. [4]). Заметим, что $F(1,\lambda)$ есть дзета-функция Римана. Тогда функция $\Phi_\tau(\sigma)$ выражается через функцию $F(z,\lambda)$:

$$\Phi_\tau = \sum_{r=0}^{k}\sum_{\nu=1}^{k(r)}\sum_{i_0+p<\tau+1}\sum_{t=0}^{i_1+\dots+i_{q(r)}}\sum_{\mu=0}^{i_0} Q_{t,i_1,\dots,i_{q(r)}}^{(r,\nu)}(\sigma)\times$$
$$\times a_{r,\nu}^{-(\sigma+t+p)} d_{i_0,\mu}^{(r,\nu)}(\sigma+t+p)(-1)^\mu\times$$
$$\times\frac{\partial F(z,\lambda)}{\partial\lambda}\Big|_{z=\exp(2\pi ip),\ \lambda=t+\sigma+i_0+p}. \tag{21}$$

Учитывая формулы леммы 4 для $Z(-m)$, приходим к следующей теореме.

Т е о р е м а. *При любом целом $m < \tau$ справедливы равенства*

$$\Psi_{tau}(-m) = \omega_{m+1} - \Phi_\tau(-m), \tag{22}$$

где $\Psi_\tau(-m)$ – регуляризованная m-сумма корней функции $f(z)$, ω_{m+1} – коэффициенты разложения $\frac{f'(z)}{f(z}$, а числа $\Phi_\tau(-m)$ определяются формулой (21).

З а м е ч а н и е 3. *Оба слагаемых в правой части (22) зависят от выбора контура Γ, в то время как их разность не зависит от Γ, поскольку этим свойством обладает левая часть равенства.*

З а м е ч а н и е 4. *Легко видеть, что если показатели a_k соизмеримы, то все $d_{i,r}i$, $r = 1, 2, \dots N$ будут целыми числами, и формулы для регуляризованных сумм корней будут выражаться через дзета-функцию Римана.*

Литература

1. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций. Функц. анализ и его прил., 1967, т.1, N 2, с. 52-59.
2. *Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белаббаси Ю.* О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса. ДАН СССР, 1980, т. 254, N 6.
3. *Белламан Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. т. 1. М.: Наука, 1973.