

УДК 517.5

## Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа<sup>1</sup>

В. А. Садовничий, В. А. Любишкин

Вопросам получения регуляризованных сумм корней класса  $K$  целых функций посвящен ряд работ (см., например, [1, 2]). Данная работа посвящена таким же вопросам для случая одного класса целых функций экспоненциального типа. Как частный случай, из данной работы следуют новые результаты даже для случая функций класса  $K$ .

### § 1. Асимптотическое распределение корней

Рассмотрим класс  $C$  целых функций экспоненциального типа  $\sigma$ , характеризуемый следующими свойствами:

- 1) все корни функции  $S(z)$ , принадлежащей классу  $C$ , лежат в некоторой горизонтальной полосе  $|y| < h$  ( $z = x + iy$ );
- 2) при некотором фиксированном  $y = y_1$  справедливы соотношения

$$0 < m \leq |S(x + iy)| \leq M \leq \infty; \quad (1)$$

- 3) типы функций  $S(z)$  в верхней и нижней полуплоскости совпадают.

Известны следующие свойства функций  $S(z)$ , принадлежащих классу  $C$ . Пусть  $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$  — последовательность корней функции  $S(z)$  (с учетом кратности), занумерованных в порядке возрастания вещественных частей.

---

<sup>1</sup>ДАН СССР, № 4, т. 256, 1981. с. 794–798.

а) Число корней  $\lambda_k$  в любом прямоугольнике  $\Pi_{t, N_1, H} = \{t \leq x \leq t + N_1, |y| \leq H\}$  не превосходит некоторой константы  $P_{N_1}$ , зависящей лишь от  $S(z)$  и  $N_1$ .

б) Вне кругов  $C_k(\eta) = \{z : |z - \lambda_k| < \eta\}$  функция  $S(z)$  допускает оценку снизу

$$|S(x + iy)| \geq m_\eta \exp(\sigma |y|), \quad (2)$$

где  $m_k$  не зависит от  $z$ .

Справедлива следующая

ЛЕММА 1. Существует число  $\delta_0$  и существует последовательность чисел  $|a_n|_{-\infty}^{+\infty}$ ,  $a_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $n \leq a_n \leq n + 1$  такие, что все корни функции  $S(z)$  удалены от прямых  $l_n = \{z : \operatorname{Re} z = a_n\}$  на величину, не меньшую, чем  $\delta_0$ .

Пусть  $f_0(z)$  — функция класса  $C$ , а целая функция  $f(z)$  имеет представление

$$f(z) = f_0(z) + \frac{\sum_{k=1}^N A_k(z) \gamma_k^{(1)}}{z} + \dots + \frac{\sum_{k=1}^N A_k(z) \gamma_k^{(m)}}{z^m} + O\left[\frac{\exp(\sigma |y|)}{z^{m+1}}\right] \quad (3)$$

при  $z \rightarrow \infty$ , где  $A_k(z)$  — целые функции, допускающие оценку

$$|A_k(z)| \leq M_1 \exp(\sigma |y|), \quad (4)$$

где  $\sigma$  — тип функции  $f_0(z)$ , а  $\gamma_k^{(j)}$  — некоторые постоянные. Пусть  $f_0(z)$  — функция класса  $C$ , корни которой  $|\lambda_k|_{-\infty}^{+\infty}$  просты и отделены (т. е. существует константа  $\delta > 0$  такая, что  $|\lambda_k - \lambda_j| \geq \delta$  при  $k \neq j$ ). Пусть целая функция  $f(z)$  имеет представление (3). Тогда так же, как и в (3), показывается, что между корнями  $\mu_k$  и  $\lambda_k$  функций  $f(z)$  и  $f_0(z)$  можно установить взаимно однозначное соответствие, при этом для достаточно больших по модулю  $k$  и для произвольного комплексного  $\rho$  имеет место разложение

$$\mu_k^\rho = \lambda_k^\rho + \rho \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \operatorname{Res}_{\lambda_k} \left\{ z^{\rho-1} \left[ \frac{\theta(z)}{f_0(z)} \right]^\nu \right\}, \quad (5)$$

где  $\theta(z) = f(z) - f_0(z)$ .

В случае, когда корни  $f_0(z)$  не являются простыми и отделены, связь между корнями  $f(z)$  и  $f_0(z)$  выглядит несколько сложнее.

Пусть  $f_0(z)$  — произвольная функция класса  $C$ . Используя свойство а) последовательности нулей функции  $f_0(z)$ , выберем  $k$  таким,

что  $2\eta p_1 < 1/2$ . Рассмотрим открытое множество  $G(k) = \bigcup_k C_k(\eta)$ . Это множество — объединение связанных компонент  $G_j(\eta)$ , проекции которых на вещественную ось меньше 1.

Пусть функция  $f_0(z)$  — функция класса  $C$ , а целая функция  $f(z)$  имеет представление (3). Тогда между корнями функций  $f(z)$  и  $f_0(z)$  можно установить взаимнооднозначное соответствие, при этом для достаточно больших по модулю  $j$  и для любого комплексного  $\rho$  имеет место разложение

$$\sum_{\mu_k \in G_j} \mu_k^\rho = \sum_{\lambda_k \in G_j} \lambda_k^\rho + \rho \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \sum_{\lambda_k \in G_j} \text{Res}_{\lambda_k} \left\{ z^{\rho-1} \left[ \frac{\theta(z)}{f_0(z)} \right]^\nu \right\}. \quad (6)$$

Подставив (3) в (6) и меняя порядок суммирования, получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_k \in G_j} \mu_k^\rho &= \sum_{\lambda_k \in G_j} \lambda_k^\rho + \rho \sum_{\lambda_k \in G_j} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\nu} \frac{(-1)^n}{n} \times \\ &\times \sum_{k_1+\dots+k_N=n} B_{k_1,\dots,k_N} \text{Res}_{\lambda_k} \left\{ z^{\rho-1-\nu} \frac{A_1^{k_1}(z) \cdots A_N^{k_N}(z)}{f_0^{k_1+\dots+k_N}(z)} \right\} \text{ при } z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $B_{k_1,\dots,k_N}$  выражаются через ростоянные  $\gamma_k^{(j)}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку наша цель состоит в том, чтобы предложить методику вычисления регуляризованных сумм корней функции  $f(z)$  всех порядков, мы предполагаем, что разложение (3) справедливо для любого натурального  $m$ . Однако для вычисления первых регуляризованных сумм достаточно знать только несколько первых членов этого ряда.

## § 2. Дзета-функции и обобщенные дзета-функции, ассоциированные с функциями $f(z)$ и $f_0(z)$

В дальнейшем будем предполагать, что существует луч  $l$ , выходящий из начала координат, на котором справедливы следующие асимп-

тогические разложения:

$$\begin{aligned}\frac{f'_0(z)}{f_0(z)} &\sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_{f_0}^{(\nu)}}{z^\nu}, \\ \frac{A_i(z)}{f_0(z)} &\sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_{f_0,i}^{(\nu)}}{z^\nu}, \quad i = 1, 2, \dots, N,\end{aligned}\tag{8}$$

при  $z \rightarrow \infty$ ,  $z \in l$ .

Поскольку для функции  $f(z)$  справедливо разложение (3), то на луче  $l$  также справедливо соотношение

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_f^{(\nu)}}{z^\nu} \quad \text{при } z \rightarrow \infty$$

Пусть контур  $\Gamma$ , состоящей из дважды проходимого луча  $l$  и окружности  $\gamma$  с центром в 0, обладает тем свойством, что все нули функций  $f(z)$  и  $f_0(z)$  лежат во внешности  $\Gamma$ . Введем в рассмотрение функцию

$$Z_f(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \text{при } \operatorname{Re} \sigma > 1.$$

Согласно терминологии работы [1] эта функция называется *дзета-функцией, ассоциированной с функцией  $f(z)$* . Известно (см. [1]), что при  $\operatorname{Re} \sigma > 1$   $Z_j(\sigma) = \sum_k \mu_k^{-\sigma}$  и эта функция аналитически продолжается на всю комплексную плоскость и ее значения в целых отрицательных точках явно вычисляются через  $\omega_f^{(\nu)}$ . Аналогичными свойствами обладает  $Z_{f_0}(\sigma)$  — дзета-функция, ассоциированная с  $f_0(\sigma)$ . Замечая, что при  $z \in \Gamma$ ,  $z \rightarrow \infty$

$$\frac{A_1^{k_1}(z) \cdot \dots \cdot A_N^{k_N}(z)}{f_0^{k_1+\dots+k_N}(z)} \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_{k_1, \dots, k_N}^{(\nu)}}{z^\nu},\tag{9}$$

введем в рассмотрение интеграл

$$Z_{k_1, \dots, k_N}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^{-\sigma} \frac{A_1^{k_1}(z) \cdot \dots \cdot A_N^{k_N}(z)}{f_0^{k_1+\dots+k_N}(z)} dz.\tag{10}$$

Который сходится при  $\operatorname{Re} \sigma > 1$  (в формуле (10) так же, как и в формулах (5) и (6),  $z^{-\sigma} = \exp(-\sigma \ln z)$ , где  $\ln z$  — фиксированная регулярная по внешности  $\Gamma$  ветвь логарифма). Оказывается справедливой следующая

ЛЕММА 2. При  $\operatorname{Re} \sigma > 1$  выполняется соотношение

$$Z_{k_1, \dots, k_N}(\sigma) = \sum_j \sum_{\lambda_k \in G_j} \operatorname{Res}_{\lambda_k} \left\{ z^{-\sigma} \frac{A_1^{k_1}(z) \cdot \dots \cdot A_N^{k_N}(z)}{f_0^{k_1 + \dots + k_N}(z)} \right\}. \quad (11)$$

Функции  $Z_{k_1, \dots, k_N}(z)$  назовем обобщенными дзета-функциями, ассоциированными с функцией  $f_0(z)$ . Можно показать, что эти функции аналитически продолжаются на всю комплексную  $\sigma$ -плоскость, причем значения в целых точках вычисляются по формулам

$$Z_{k_1, \dots, k_N}(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{A_1^{k_1}(z) \cdot \dots \cdot A_N^{k_N}(z)}{f_0^{k_1 + \dots + k_N}(z)} \cdot \frac{1}{z^m} dz, \quad m = 2, 3, \dots, \quad (12)$$

$$Z_{k_1, \dots, k_N}(-m) = \omega_{k_1, \dots, k_N}^{(m+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

### § 3. Регуляризованные суммы корней функции $f(z)$

Поскольку на границе  $G_j(\eta)$  величина  $\frac{A_1^{k_1}(z) \cdot \dots \cdot A_N^{k_N}(z)}{f_0^{k_1 + \dots + k_N}(z)}$  и число корней  $f_0(z)$ , лежащих в  $G_j(\eta)$ , ограничены равномерно по  $j$ , то

$$\operatorname{Res}_{\lambda_k} \left\{ z^{-\sigma} \frac{A_1^{k_1}(z) \cdot \dots \cdot A_N^{k_N}(z)}{f_0^{k_1 + \dots + k_N}(z)} \right\} = O(\lambda_k^{-\sigma}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Далее, так как  $f_0(z)$  — целая функция первого порядка роста, то ряд  $\sum_k \lambda_k^{-\sigma}$  сходится при  $\operatorname{Re} \sigma > 1$ . Зафиксируем некоторое целое достаточно большое  $\tau$ . Из формулы (6) и сделанных нами замечаний следует, что функция

$$\Psi_{\tau}(\sigma) = \sum_j \left\{ \sum_{\mu_k \in G_j} \mu_k^{-\sigma} - \sum_{\lambda_k \in G_j} \lambda_k^{-\sigma} - \sigma \sum_{\lambda_k \in G_j} \sum_{\nu=1}^{\tau} \sum_{n=1}^{\nu} \frac{(-1)^n}{n} \times \right. \\ \left. \times \sum_{k_1 + \dots + k_N = n} B_{k_1, \dots, k_N} \operatorname{Res}_{\lambda_k} \left[ z^{-\sigma-1-\nu} \frac{A_1^{k_1}(z) \cdot \dots \cdot A_N^{k_N}(z)}{f_0^{k_1 + \dots + k_N}(z)} \right] \right\} \quad (13)$$

допускает аналитическое продолжение в полуплоскость  $\operatorname{Re} \sigma > -\tau$ .

Назовем числа  $\Psi_{\tau}(-m)$ ,  $m < \tau$ , *регуляризованными  $m$ -суммами корней функции  $f(z)$* . Ниже будет предложена методика вычисления регуляризованных  $m$ -сумм. Используя введенные в п. 2 функции,

формулу (13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Psi_\tau(\sigma) &= Z_j(\sigma) - Z_{f_0}(\sigma) - \sigma \sum_{\nu=1}^{\tau} \sum_{n=1}^{\nu} \frac{(-1)^n}{n} \times \\ &\times \sum_{k_1+\dots+k_N=n} B_{k_1,\dots,k_N} Z_{k_1,\dots,k_N}(\nu + \sigma + 1). \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая, что аналитическое продолжение функций  $Z_f(\sigma)$ ,  $Z_{f_0}(\sigma)$ ,  $Z_{k_1,\dots,k_N}(\sigma)$  известно, мы можем найти выражения для  $\Psi_\tau(-m)$ .

Справедлива следующая основная

ТЕОРЕМА 1. При любом  $m$ ,  $m < \tau$ , выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &\sum_j \left\{ \sum_{\mu_k \in G_j} \mu_k^m - \sum_{\lambda_k \in G_j} \lambda_k^m + m \sum_{\lambda \in G_j} \sum_{\nu=1}^{\tau} \sum_{n=1}^{\nu} \frac{(-1)^n}{n} \times \right. \\ &\times \sum_{k_1+\dots+k_N=n} B_{k_1,\dots,k_N} \operatorname{Res}_{\lambda_k} \left[ z^{m-\nu+1} \frac{A_1^{k_1}(z) \cdot \dots \cdot A_N^{k_N}(z)}{f_0^{k_1+\dots+k_N}(z)} \right] \Big\} = \\ &= \omega_f^{(m+1)} - \omega_{f_0}^{(m+1)} + m \sum_{\nu=1}^{\tau} \sum_{n=1}^{\nu} \frac{(-1)^n}{n} \times \\ &\times \sum_{k_1+\dots+k_N=n} B_{k_1,\dots,k_N} Z_{k_1,\dots,k_N}(\nu - m + 1). \end{aligned} \quad (15)$$

4. ПРИМЕР. Рассмотрим целую функцию  $f(z)$ , допускающую представление

$$f(z) = \sum_{k=1}^N \exp(i\alpha_k z) \left[ \beta_k^{(0)} + \frac{\beta_k^{(1)}}{z} + \dots + \frac{\beta_k^{(m)}}{z^m} + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right) \right] \quad (16)$$

при  $z \rightarrow \infty$ , где  $\alpha_k$  — действительные числа,

Функция  $f(z)$  является функцией класса  $K$ , введенного в работе [1]. Формулам регуляризованных сумм корней такого вида функций посвящены работы [1, 2]. Результаты нашей работы позволяют вычислять формулы регуляризованных  $m$ -сумм в случае несоизмеримых показателей  $\alpha_k$ . Заметим, что предыдущие результаты (см. [1, 2]) не применимы для данного случая. Действительно, целая функция  $f(z)$ , имеющая представление (16), является функцией класса  $C$ . Тогда

$$f_0 = \sum_{k=1}^N \beta_k^{(0)} \exp(i\alpha_k z), \quad A_k(z) = \exp(i\alpha_k z).$$

Будем считать для определенности, что луч  $l$  лежит в верхней полуплоскости. При  $z \rightarrow \infty$  справедливы соотношения

$$\frac{f'_0(z)}{f_0(z)} \sim i\alpha_N, \quad \frac{A_N(z)}{f_0(z)} \sim \frac{1}{\beta_N^{(0)}}, \quad \frac{A_k(z)}{f_0(z)} \sim 0$$

при  $k \neq N$ , что и позволяет применять утверждение теоремы.

## Литература

1. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Функц. анализ и его прилож., т. 1, 2, 52 (1967).
2. Садовничий В. А., В. А. Любишкин, Белабасси Ю. Дан, т. 254, № 6 (1980).
3. Лидский В. Б., Островский И. В. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 43, № 1 (1979).