УДК 517.925.44

Оценки коэффициентов асимптотических рядов для решений уравнения Штурма – Лиувилля с аналитическим потенциалом. I[1]

В. А. Садовничий, А. Ю. Попов

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + q(z)y = \lambda^2 y \tag{1}$$

с комплексным параметром λ и потенциалом $q(z)$, аналитическим в некотором круге $|z| < R$. Хорошо известно (см. [1 — 4]), что решения уравнения (1) $y_0(z,\lambda)$ и $y_1(z,\lambda)$, удовлетворяющие начальным условиям

$$y_0(0,\lambda) = 1, \quad y_0'(0,\lambda) = 0; \quad y_1(0,\lambda) = 0, \quad y_1'(0,\lambda) = \lambda, \tag{2}$$

являются аналитическими по z при $|z| < R$ и целыми по λ, а при фиксированном z и $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$, разлагаются в формальные асимптотические ряды

$$y_j(z,\lambda) = \exp(\lambda z) \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^{-n} b_{n,j}(z) +$$

$$+ (-1)^j \exp(-\lambda z) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} b_{n,j}(z), \quad j = 0, 1, \tag{3}$$

коэффициенты которых вычисляются по рекуррентным формулам

$$b_{0,0}(z) = b_{0,1}(z) \equiv \frac{1}{2},$$

[1]Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 2. С. 280–284

$$b_{n+1,j}(z)=\frac{1}{2}\left(b'_{n,j}(z)+(-1)^{n+j}b'_{n,j}(0)+\int\limits_0^z q(t)b_{n,j}(t)\,dt\right). \qquad (4)$$

Ряды (3) являются асимптотическими для решений $y_j(z,\lambda)$ при $\lambda\to\infty$ в том смысле, что при любом фиксированном $n\in\mathbb{N}$ и $j=0,1$ справедливо представление

$$y_j(z,\lambda)=\exp(\lambda z)\left(\sum_{n=0}^{N}(-\lambda)^{-n}b_{n,j}(z)+\lambda^{-N-1}B_{N,j,1}(z,\lambda)\right)+$$

$$+(-1)^j\exp(-\lambda z)\left(\sum_{n=0}^{N}\lambda^{-n}b_{n,j}(z)+\lambda^{-N-1}B_{N,j,2}(z,\lambda)\right),$$

причем функции $B_{N,j,l}(z,\lambda)$ ($j=0,1$, $l=1,2$) ограничены в кругах $|z|\leqslant r<R$ при $|\lambda|\geqslant 1$ некоторой постоянной, зависящей лишь от N, r и потенциала q (см. [4], где этот результат приводится в более общем случае — для некоторого класса линейных уравнений произвольного порядка). Для уравнений (1) остаточные члены $B_{N,j,l}$ оцениваются сверху через $(N+1)$-е коэффициенты рядов (3). Поэтому для решения задач, в которых фундаментальную систему решений (ФСР) уравнения (1), удовлетворяющую начальным условиям (2), приходится приближать частичной суммой ряда (3) с большим номером, важно дать оценки роста модулей коэффициентов $b_{n,j}(z)$ по n, а также сделать их равномерными на классах потенциалов в соответствующих функциональных пространствах. В связи со сказанным приходим к следующей экстремальной задаче.

Для заданных положительных чисел M и R через $\mathfrak{D}(M,R)$ обозначим класс всех функций $q(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$, аналитических в круге $|z|<R$, для которых следующая норма конечна и не превосходит M:

$$\|q\|_R=:\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|R^{k+1}}{k+1}\leqslant M. \qquad (5)$$

При всех $n\in\mathbb{N}$ и $r<R$ требуется найти (или возможно точнее оценить) величины

$$\mathfrak{B}_n(M,R,r)=\sup_{q\in\mathfrak{D}(M,R)}\max_{j=0,1}\max_{|z|\leqslant r}|b_{n,j}(q,z)|.$$

(Здесь мы пишем $b_{n,j}(q,z)$, а не как выше $b_{n,j}(z)$, для того, чтобы подчеркнуть зависимость коэффициентов асимптотических рядов (3) от потенциала q.) Выбранная в качестве конструктивной характеристики потенциала q норма (5), разумеется, приспособлена к нашему методу доказательств. Но она удобна еще и тем, что легко оценивается сверху через более простые нормы

$$\|q\|_R \leqslant \frac{R}{2}\int_0^{2\pi} |q(Re^{i\theta})|\,d\theta, \quad \|q\|_R \leqslant R \sup_{|z|<R} |q(z)|. \tag{6}$$

Первое неравенство в (6) – неравенство Харди для функций из пространства $H^1(|z| < R)$ [5, с. 98], а второе, очевидно, верно в $H^\infty(|z| < R)$.

В множествах $\mathfrak{D}(M,R)$ выделим еще более узкие подклассы, обозначим их через $\mathfrak{D}^0(M,R)$, которые содержат лишь потенциалы со значением

$$a_0 = q(0) = 0. \tag{7}$$

Положим $\mathfrak{B}_n^0(M,R,r) = \sup\limits_{q\in\mathfrak{D}^0(M,R)} \max\limits_{j=0,1} \max\limits_{|z|\leqslant r} |b_{n,j}(q,z)|$.

Нам удалось получить практически неулучшаемые при растущих параметрах двусторонние оценки экстремальной функции $\mathfrak{B}_n^0(M,R,r)$ и в достаточной степени точные для $\mathfrak{B}_n(M,R,r)$. Основным результатом нашей работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *При любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$\mathfrak{B}_n(M,R,r) < (n-1)!\,uI_1(2u)/(2^{(n+1)/2}(R-r)^n), \tag{8}$$

$$\mathfrak{B}_n^0(M,R,r) < (n-1)!\,uI_1(2u)/(2^n(R-r)^n), \tag{9}$$

где $u = \sqrt{M(R-r)}$, $I_1(2u) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u^{2\nu+1}/(\nu!(\nu+1)!)$ — модифицированная функция Бесселя с индексом 1.

Замечание. Для модифицированной функции Бесселя с индексом 1 верны оценки

$$I_1(v) < (1/2)\operatorname{sh}(v), \quad I_1(v) < (2\pi v)^{-1/2}e^v \quad \forall v > 0. \tag{10}$$

При малых v лучше использовать первое неравенство, а при больших v — второе.

Оценки (8) — (9) показывают, что коэффициенты асимптотических рядов (3) растут тем медленнее, чем больше радиус голоморфности потенциала q. Например, справедливо

Следствие 1. *Если $q(z)$ — целая функция, $r > 0$, то*

$$\max_{j=0,1} \max_{|z|\leqslant r} |b_{n,j}(q,z)| = o(n!\,\varepsilon^n) \quad (n\to\infty), \tag{11}$$

где ε — произвольно малое положительное число.

Соотношение (11) немедленно вытекает из (8) при $R = r + 1/\varepsilon$.

Через K_R обозначим конус в пространстве функций, аналитических в круге $|z| < R$, состоящий по определению из тех функций, все производные которых в точке 0 неотрицательны.

Теорема 2. *Если $q \in K_R$, то при любых $r \in (0, R)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, справедливы неравенства*

$$\min_{j=0,1} b_{n,j}(q, r) \geqslant \frac{(q^{(n-2)}(r) - q^{(n-2)}(0))}{2^{n+1}},$$

$$\max_{j=0,1} b_{n,j}(q, r) \geqslant \frac{(q^{(n-2)}(r) + q^{(n-2)}(0))}{2^{n+1}}. \tag{12}$$

В частности, при любых $n \geqslant 3$ имеем

$$\mathfrak{B}_n^0(M, R, r) > (n-3)!\, MR^{-1}/(2^{n+1}(R-r)^{n-2}) \quad \forall n \geqslant 3. \tag{13}$$

Неравенства (12), (13) демонстрируют точность оценок (8) и (9). Если зафиксировать R, r и M, то оценки сверху и снизу для экстремальной функции $\mathfrak{B}_n^0$ отличаются лишь на множитель cn^2, где $c = c(M, R, r)$ — постоянная. Вряд ли также можно в (8), (9) сколько-нибудь существенно снизить множитель $I_1(2u)$, растущий примерно как $\exp(2\sqrt{M(R-r)})$ при больших M и R. Этот вопрос обсудим в конце работы.

Из результатов работы [4] вытекает расходимость рядов (3) для любых $q \in K_R$, $x > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Неравенства (9) и (12) позволяют добавить к этому точную оценку скорости роста $b_n(q, x)$ для любого потенциала $q \in K_R$, не являющегося целой функцией.

Следствие 2. *Если радиус сходимости степенного ряда для $q(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in K_R$ в точности равен R, то при любом $r \in (0, R)$ и $j = 0, 1$ имеем*

$$\limsup_{n\to\infty} (b_{n,j}(q, r)/n!)^{1/n} = 1/(2(R-r)). \tag{14}$$

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = 1/R$ (именно $\lim$, *а не* $\limsup$*!), то и в соотношении (14) верхний предел заменяется обычным пределом:*

$$\lim_{n\to\infty} (b_{n,j}(q, r)/n!)^{1/n} = 1/(2(R-r)). \tag{15}$$

Соотношение (15) верно и при более слабом ограничении на регулярность тейлоровых коэффициентов $q(z)$:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{n\leqslant k\leqslant n(1+\varepsilon)} (a_k)^{1/k} = 1/R \quad (\forall\varepsilon > 0).$$

Зазор в оценках сверху и снизу для $\mathfrak{B}_n$ оказался больше, чем для $\mathfrak{B}_n^0$, на показательную функцию. Однако такое отсутствие точности вызвано, скорее всего, не недостатком наших методов, а природой самой задачи. Класс $\mathfrak{D}(M,R)$ оказывается слишком широким для того, чтобы ставить на нем задачу о разложении решений (1) в асимптотические ряды (3). В самом деле, уравнение (1) можно переписать в виде $y'' + q_0(z)y = (\lambda^2 - q(0))y$, где $q_0(z) = q(z) - q(0)$. Ясно, что если значение $|q(0)|$ — "достаточно велико", то решения разумнее разлагать в ряды не по параметру λ, а по параметру $\mu = \sqrt{\lambda^2 - q(0)}$ (можно брать любое значение корня). Новый потенциал $q_0(z)$ удовлетворяет условию (7), так как $q_0(0) = 0$. Таким образом, для потенциала, не лежащего в $\mathfrak{D}^0(M,R,r)$, иногда целесообразнее изменить параметр разложения и снова вернуться в класс $\mathfrak{D}^0$.

Отметим, что оценки снизу вида (12) — (15) получаются лишь для потенциалов q с неотрицательными коэффициентами ряда Тейлора в нуле. "Индивидуальная" задача о поведении $|b_{n,j}(q,z)|$ при растущем n для произвольных потенциалов очень сложна. Если $q \notin K_R$, то операторы $b_n(q,z)$ теряют свойство положительности и вследствие этого может возникнуть явление интерференции, заметно снижающее рост коэффициентов асимптотических рядов (3). Например, существуют потенциалы, аналитические в окрестности нуля, для которых ряды (3) обрываются, т. е. $b_{n,j}(q,z) \equiv 0$ при $n > n_0$. Так, уравнение $y'' + (1/2)(\operatorname{ch}(x/2))^{-2}y = \lambda^2 y$ имеет два линейно независимых решения $\exp(\pm\lambda x)(1 \mp \operatorname{th}(x/2)/(2\lambda))$, а уравнение $y'' - 2(x-x_0)^{-2}y = \lambda^2 y$ имеет ФСР $\exp(\pm\lambda x)(1 \mp (\lambda(x-x_0))^{-1})$. В обоих случаях $b_{n,j}(q,z) \equiv 0$ при $\forall n \geqslant 2$.

В работе [6] дано весьма нетривиальное необходимое условие на потенциал q, при выполнении которого ряды (3) обрываются: $q(z)$ в этом случае является производной от логарифмической производной некоторого квазиполинома. Однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Было бы интересно отыскать критерий на потенциал q, при выполнении которого ряды (3) являются конечными суммами, а также найти какое-либо нетривиальное условие, достаточное для того, чтобы ряды (3) равномерно сходились при $|\lambda| > \lambda_0$ в круге $|z| \leqslant r$, т. е. выполнялись бы оценки

$$\max_{j=0,1}\max_{|z|\leqslant r}|b_{n,j}(q,z)|=O((\lambda_0+\varepsilon)^n)\quad\forall\varepsilon>0. \tag{16}$$

Нами была высказана следующая гипотеза. Если для каких-либо r и $\lambda_0>0$ справедливо соотношение (16), то $q(z)$ является производной от логарифмической производной некоторой целой функции, удовлетворяющей некоторому линейному однородному дифференциальному уравнению бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, и характеристической функцией конечного экспоненциального типа. О решениях таких уравнений (уравнений свертки) см. [7, 8].

Насколько нам известно, оценок сверху вида (8), (9) коэффициентов асимптотических рядов (3) ранее не было. Исследовалось поведение коэффициентов асимптотических рядов при растущем n в существенно более общей ситуации — для уравнений произвольного порядка, но зато для весьма узкого класса коэффициентов этих уравнений. Вопрос о точности даваемых оценок оставался открытым. А именно изучались асимптотические ряды решений задачи Коши для уравнений

$$y^{(m)}+\sum_{k=1}^{m}p_k(x,\lambda)y^{(m-k)}=0, \tag{17}$$

где $p_k(x,\lambda)=\sum\limits_{\alpha=0}^{k}\lambda^\alpha p_{\alpha,k}(x)$, причем $p_{k,k}(x)\equiv p_{k,k}$ — константы и характеристический многочлен $t^m+\sum\limits_{k=1}^{m}t^{m-k}p_{k,k}$ не имеет кратных корней. Уравнение (1) входит в класс уравнений (17): оно получается при $m=2$, $p_1(x,\lambda)\equiv 0$, $p_0(x,\lambda)=\sum\limits_{\alpha=0}^{2}\lambda^\alpha p_{\alpha,0}(x)$, где $p_{0,0}(x)=q(x)$, $p_{1,0}(x)=0$, $p_{2,0}(x)=-1$. Его характеристический многочлен равен t^2-1.

В работе [4] показано, что если функции $p_{\alpha,k}(x)$ при $0\leqslant k\leqslant m-1$, $0\leqslant\alpha\leqslant k-1$ являются многочленами, то максимумы модулей на $[0,1]$ коэффициентов при λ^{-n} асимптотических рядов решений задачи Коши для уравнения (17) суть $O(n^{m+n\gamma}B^n)$, где $\gamma=(d+1)/(d+2)$, d — наибольшая из степеней полиномов $p_{\alpha,k}$, h — наибольший из модулей их коэффициентов, $B=6(d+1)^{\gamma+1}m(m+1)h$. Для уравнения (1) приведенный результат из [4] означает в точности следующее. Если $q(z)$ — полином степени d, то

$$\max_{j=0,1}\max_{x\in[0,1]}|b_{n,j}(q,x)|=O(n^{2+n\gamma}(36h(d+1)^{\gamma+1})^n). \tag{18}$$

В этой же работе установлено, что для $q(x) = x^d$, $d \in \mathbb{N}$, при любых $n \in \mathbb{N}$, справедливы неравенства

$$|b_{n,0}(q,0)| \geqslant (n^{n\gamma_1}/2^n)((d+1)/((d+2)e))^{n\gamma_1}, \quad \gamma_1 = d/(d+2). \quad (19)$$

Таким образом, из результатов работы [4] для $|b_{n,j}(q,z)|$ получаются оценки сверху только в случае, когда q — полином, да и то не точные. В работе [9] показано, что если $p_{\alpha,k}(x)$ — целые функции конечного экспоненциального типа, то максимумы модулей на $[0,1]$ коэффициентов при λ^{-n} асимптотических рядов решений задачи Коши для уравнения (17) суть $O(c^n n^{n+m})$, где c — некоторая эффективная постоянная. Тем самым для уравнения (1) был разобран случай, когда $q(z)$ является целой функцией конечного экспоненциального типа. Насколько нам известно, для целых потенциалов бесконечного экспоненциального типа и тем более не целых $q(z)$ оценок сверху $|b_{n,j}(q,z)|$ в общей ситуации при растущих n ранее не было. Доказанная нами теорема 1 не только решила эту общую задачу, но и позволила значительно уточнить упомянутые оценки сверху для коэффициентов асимптотических рядов решений уравнения (1) с потенциалами, допускавшимися в [4] и [9]. При этом наши оценки сверху близки к даваемым в этих работах оценкам снизу. Укажем несколько следствий из наших результатов.

Следствие 3. *Пусть $q(z)$ — многочлен степени $d \geqslant 1$, а именно $q(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k$, $H = \sum_{k=0}^{d} |a_k|/(k+1)$. Тогда при любых $r \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant (d+2)\sqrt{H}(r(d+1)/(2\ln(1+d/2)))^{1+d/2}$, справедливы оценки*

$$\max_{j=0,1}\max_{|z|\leqslant r}|b_{n,j}(q,z)| \leqslant (1/2)n^{1/2+n\gamma_1}H^{n/(d+2)}, \quad d \geqslant 14,$$

$$\max_{j=0,1}\max_{|z|\leqslant r}|b_{n,j}(q,z)| \leqslant 2^{(n-3)/2}n^{1/2+n\gamma_1}H^{n/(d+2)}, \quad 2 \leqslant d \leqslant 13, \quad (20)$$

$$\max_{j=0,1}\max_{|z|\leqslant r}|b_{n,j}(q,z)| \leqslant (1/\sqrt{8})n^{1/2+n/3}H^{n/3}\exp(2n/5), \quad d = 1,$$

где $\gamma_1 = d/(d+2)$.

Оценки сверху (20) усиливают (18) и почти смыкаются с оценкой снизу (19).

Следствие 4. *Если для целой функции $q(z)$ выполнено ограничение на рост*

$$|q(z)| \leqslant A\exp(\sigma|z|) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (21)$$

где A и σ — некоторые положительные постоянные, то при любых $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, справедливо соотношение

$$\max_{j=0,1} \max_{|z|\leqslant r} |b_{n,j}(q,z)| = O(n!\,\sigma^n \exp(-n \ln\ln n)), \tag{22}$$

в котором постоянная в символе O эффективно зависит от A, r и σ.

Следствие 5. *При условии (21) и любом $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\max_{j=0,1} \max_{|z|\leqslant 1} |b_{n,j}(q,z)| \leqslant (n-1)!\, 2^{-2-n/2}\sqrt{A}\, \exp(\sigma + \sqrt{8A}e^{\sigma}). \tag{23}$$

Следствие 5 немедленно получается из (8) при $r = 1$, $R = 2$. В качестве M, согласно второму неравенству (6), можно взять $2A\exp(2\sigma)$. Неравенство (23) при больших n слабее (22), зато все постоянные в нем явно указаны. Оценка сверху (22) "почти смыкается" с оценкой снизу для $b_{n,0}(e^x,1)$ (здесь $A = \sigma = 1$), фактически полученной в [9] (правда, не выписанной там в должном виде): $|b_{n,0}(e^x,1)| \geqslant$ $\geqslant 16^{-n} n^n \exp(-n\ln\ln n)$, $n \geqslant 3$. (Мы немного огрубили соответствующее неравенство из [9, § 3], где в итоге произведено еще бо́льшее огрубление: $|b_{n,0}(e^x,1)| \geqslant n^{n(1+o(1))}$ $(n \to \infty)$.)

Аналогично можно получать оценки коэффициентов асимптотических рядов (3) для решений уравнений (1) с целыми потенциалами любого роста. Основная идея состоит в том, что коль скоро R можно брать любым, то неравенство (8) переписывается так:

$$\max_{j=0,1} \max_{|z|\leqslant r} |b_{n,j}(q,z)| \leqslant (n-1)!\, 2^{-(n+3)/2} \min_{R>r} u(R) I_1(2u(R))/(R-r)^n, \tag{24}$$

где $u(R) = \sqrt{M(R)(R-r)}$, $M(R) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| R^{k+1}/(k+1)$. Потом используем неравенства (10) для $I_1(u)$ и, решая возникающую задачу на экстремум, выбираем оптимальное R, минимизируя выражение в оценке (24).

Доказательства теорем 1, 2 и следствий 2 — 4 будут опубликованы во второй части нашей статьи.

Литература

1. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.

2. *Birkgoff G. D.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. Vol. 9. P. 219 — 231.
3. *Леонтьев А. Ф.* // Мат. сб. 1963. Т. 62 (104), № 1. С. 31 — 38.
4. *Кравицкий А. О., Лидский В. Б.* // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 4. С. 748 — 759.
5. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М., 1984.
6. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 1. С. 133 — 148.
7. *Гельфонд А. О.* // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1951. Т. 32. С. 42 — 67.
8. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. М., 1982.
9. *Печенцов А. С.* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1981. Вып. 7. С. 190 — 198.