УДК 517.925.44:519.62

Оценки коэффициентов асимптотических рядов для решений уравнения Штурма – Лиувилля с аналитическим потенциалом. II[1]

В. А. Садовничий, А. Ю. Попов

В настоящей работе доказываются утверждения, сформулированные в первой части, опубликованной в "Дифференц. уравнения". 1999. Т. 35, № 2. С. 280 — 284. Все обозначения сохраняются, а нумерация формул продолжается.

Основные трудности связаны с доказательством теоремы 1. Введем несколько полезных в дальнейшем обозначений и докажем две вспомогательные леммы.

В пространстве функций, аналитических в круге $|z| < R$ (обозначим его, как обычно, $\mathcal{A}_R$), определим операторы D_1, D_{-1}, J_q ($q \in \mathcal{A}_R$) по формулам

$$D_1\, f(z) = f'(z) + f'(0), \quad D_{-1}\, f(z) = f'(z) - f'(0),$$

$$J_q\, f(z) = \int\limits_0^z f(t)q(t)\, dt$$

(интегрирование ведется по отрезку в $\mathbb{C}$, соединяющему точки 0 и z). Эти обозначения позволяют вывести из (4) представление для функций $b_{n,j}$ в операторной форме:

$$b_{n,j}(q, z) = 2^{-n-1} \prod_{k=1}^{n} (D_{(-1)^{k+j+1}} + J_q)\mathbf{1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

[1]Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 3. С. 403–410

Символом **1** обозначена функция от z, тождественно равная единице.

В пространстве $\mathcal{A}_R$ введем отношение частичного порядка. Для функций $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ и $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$ будем считать, что $f \prec g$ тогда и только тогда, когда $|\alpha_k| \leqslant |\beta_k|$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Напомним, что через $\mathcal{K}_R$ обозначен конус в $\mathcal{A}_R$, состоящий из тех и только тех функций $f(z)$, тейлоровы коэффициенты которых α_k все неотрицательны. Линейный непрерывный оператор $T : \mathcal{A}_R \to \mathcal{A}_R$ назовем положительным, если $T\mathcal{K}_R \subset \mathcal{K}_R$. Через $\mathcal{P}$ обозначим отображение, действующее из $\mathcal{A}_R$ в $\mathcal{K}_R$, которое каждому ряду $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ ставит в соответствие ряд $\mathcal{P}f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| z^k$. Отображение $\mathcal{P}$ не линейно, но сохраняет радиус сходимости ряда, отношение $\prec$, норму (5), а также нормы

$$\|f\|_{1,r} = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| r^k \quad \forall r < R, \tag{26}$$

которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. *При любых $q \in \mathcal{A}_R$, $j = 0, 1$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем*

$$b_{n,j}(q, z) \in \mathcal{A}_R, \tag{27}$$

и справедливо соотношение

$$b_{n,j}(q, z) \prec b_{n,j}(\mathcal{P}(q), z). \tag{28}$$

Доказательство. Включение (27) вытекает из представления (25). Соотношение (28) докажем индукцией по n. Для упрощения записи в доказательстве этой леммы будем писать вместо $b_{n,j}(q, z)$ просто $b_n(q, z)$, поскольку случаи $j = 0$ и $j = 1$ разбираются аналогично. Пусть $q(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Так как, согласно (25), имеем $b_1(q, z) = \frac{1}{4}\int\limits_0^z q(t)\,dt$, то $b_1(q, z) = \frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^{k+1}}{k+1}$, $b_1(\mathcal{P}(q), z) = \frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|\, z^{k+1}}{k+1}$. Следовательно, соотношение (28) для $n = 1$ выполняется.

Теперь при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ из справедливости (28) для n выведем справедливость этого же соотношения для $(n + 1)$. Пусть

$$b_n(q, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} z^k, \quad b_n(\mathcal{P}(q), z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,n} z^k \tag{29}$$

и, согласно сделанному предположению,

$$|a_{k,n}| \leqslant A_{k,n} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{30}$$

В правой части (30) нет необходимости брать $A_{k,n}$ по модулю, так как из (25) заключаем, что $A_{k,n}$ вещественны и неотрицательны в силу положительности операторов $D_{\pm 1}$ и $J_{\mathcal{P}(q)}$. Из (4) и (29) находим

$$b_{n+1}(q,z) = \frac{1}{2}\left(D_{\pm 1} b_n(q,z) + \int\limits_0^z b_n(q,t)q(t)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta\, a_{1,n} + \sum_{m=2}^{\infty} m\, a_{m,n}\, z^{m-1} + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{l,n}\, a_\nu}{l+\nu+1}\, z^{l+\nu+1}\right) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n+1}\, z^k, \tag{31}$$

где $\delta = 0$, если применяется оператор D_{-1}, и $\delta = 2$, если применяется D_1. Аналогично (с тем же самым значением δ, что и в (31)) получаем

$$b_{n+1}(\mathcal{P}(q), z) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta\, A_{1,n} + \sum_{m=2}^{\infty} m A_{m,n} z^{m-1} + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_{l,n}|a_\nu|}{l+\nu+1} z^{l+\nu+1}\right) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,n+1} z^k. \tag{32}$$

Нам надо показать, что

$$|a_{k,n+1}| \leqslant A_{k,n+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{33}$$

Из (31) и (32) находим $a_{0,n+1} = \delta a_{1,n}/2$, $A_{0,n+1} = \delta A_{1,n}/2$, следовательно, в силу (30) неравенство (33) верно при $k = 0$. В случае $k \geqslant 1$ из (31) и (32) получаем

$$a_{k,n+1} = \frac{1}{2}\left((k+1)a_{k+1,n} + \frac{1}{k}\sum_{l+\nu=k-1} a_{l,n} a_\nu\right),$$

$$A_{k,n+1} = \frac{1}{2}\left((k+1)A_{k+1,n} + \frac{1}{k}\sum_{l+\nu=k-1} A_{l,n}|a_\nu|\right).$$

Отсюда и из предположения индукции (30), учитывая неотрицательность коэффициентов $A_{k,n}$, выводим

$$|a_{k,n+1}| \leqslant \frac{1}{2}\left((k+1)|a_{k+1,n}| + \frac{1}{k}\sum_{l+\nu=k-1} |a_{l,n}||a_\nu|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left((k+1)A_{k+1,n} + \frac{1}{k}\sum_{l+\nu=k-1} A_{l,n}|a_\nu|\right) = A_{k,n+1}.$$

Тем самым неравенство (33) получено при всех $k \in \mathbb{N}$. Индукционный переход обоснован и лемма 1 доказана.

На положительных операторах определим отношение частичного порядка $\prec_1$ следующим образом:

$$U \prec_1 V \Leftrightarrow \ \forall f \in \mathcal{K}_R \quad U f \prec V f. \tag{34}$$

Иначе говоря, $U \prec_1 V$ тогда и только тогда, когда разность $V - U$ является положительным оператором. Обозначим также $T_q = J_{\mathcal{P}(q)}$, $D = d/dz$.

Лемма 2. *Для любой функции $q \in \mathcal{A}_R$ справедливы отношения порядка между операторами: $T_q D_{-1} \prec_1 D_{-1} T_q$, $T_q D \prec_1 D T_q$. Соотношение $T_q D_1 \prec_1 D_1 T_q$ выполняется лишь при условии $q(0) = 0$.*

Доказательство. Из определения конуса $\mathcal{K}_R$ и (34) немедленно вытекает следующий критерий справедливости соотношения $U \prec_1 V$ для положительных операторов U и V :

$$(U \prec_1 V) \Leftrightarrow (U z^m \prec V z^m) \Leftrightarrow (V - U) z^m \in \mathcal{K}_R \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно проверить неотрицательность тейлоровых коэффициентов функций $\varphi_m(z) = (D_{-1}T_q - T_q D_{-1}) z^m$, $\psi_m(z) = (DT_q - T_q D) z^m$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$, а также при $q(0) = 0$ установить это же свойство для $\Phi_m(z) = (D_1 T_q - T_q D_1) z^m$.

При $m = 0$ имеем $\varphi_0(z) = D_{-1} T_q \mathbf{1}$, $\psi_0(z) = D T_q \mathbf{1}$, $\Phi_0(z) = D_1 T_q \mathbf{1}$ и требуемые утверждения вытекают из положительности операторов D_{-1}, D_1, D, T_q. Из очевидных тождеств $D_{-1} z = 0$, $Dz = \mathbf{1}$, $D_1 z = 2 \cdot \mathbf{1}$ находим $\varphi_1(z) = D_{-1} T_q z$, $\psi_1(z) = D T_q z - T_q \mathbf{1}$, $\Phi_1(z) = D_1 T_q z - 2 T_q \mathbf{1}$. Включение $\varphi_1 \in \mathcal{K}_R$ снова следует из положительности операторов D_{-1} и T_q. По определению оператора T_q при любом $m \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$T_q z^m = \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| t^{k+m} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k| z^{k+m+1}}{k+m+1}. \tag{35}$$

Исходя из (35), получаем выражения для ψ_1 и Φ_1 :

$$\psi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k|a_k|}{k+1} z^k, \ \Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k+1} |a_k| z^k.$$

Отсюда сразу вытекает, что $\psi_1 \in \mathcal{K}_R$, а для Φ_1 такое включение имеет место лишь при $a_0 = 0$. Пусть теперь $m \geqslant 2$. Так как функции z^m и $T_q z^m$ при этих значениях m имеют в точке $z = 0$ нуль порядка, не меньшего двух, то $D_{-1}z^m = D_1 z^m = Dz^m$ и $D_1(T_q z^m) = D_{-1}(T_q(z^m)) = D(T_q z^m)$. Следовательно, $\varphi_m(z) \equiv \psi_m(z) \equiv \Phi_m(z) \quad \forall m \geqslant 2$ и требуемое утверждение достаточно проверить только для функций ψ_m. Из (35) находим

$$\psi_m(z) = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k| z^{k+m+1}}{k+m+1}\right) - T_q(mz^{m-1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| z^{k+m} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m|a_k| z^{k+m}}{k+m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k|a_k| z^{k+m}}{k+m} \in \mathcal{K}_R\,.$$

Лемма 2 полностью доказана.

Доказательство теоремы 1. С учетом введенных обозначений из леммы 1 и (25) находим

$$b_{n,j}(q,z) \prec b_{n,j}(\mathcal{P}(q), z) = 2^{-n-1} \prod_{k=1}^{n} (D_{(-1)^{k+j+1}} + T_q)\mathbf{1}. \tag{36}$$

Обозначим

$$F_{n,j}(q,z) = \prod_{k=1}^{n} (D_{(-1)^{k+j+1}} + T_q)\mathbf{1} = \prod_{k=2}^{n} (D_{(-1)^{k+j+1}} + T_q) Q_1(z), \tag{37}$$

где

$$Q_1(z) = (D_{\pm 1} + T_q)\mathbf{1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_m| z^{m+1}}{m+1}. \tag{38}$$

Так как отношение порядка $f \prec g$ между функциями из $\mathcal{A}_R$ влечет за собой неравенства $\|f\|_{1,r} \leqslant \|g\|_{1,r}\ \forall r < R$, и $\|g\|_{1,r} = g(r)$ для любой функции g из конуса $\mathcal{K}_R$, то, учитывая включение $F_{n,j}(q,z) \in \mathcal{K}_R$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1$, из (36), (37) находим

$$\max_{|z| \leqslant r} |b_{n,j}(q,z)| \leqslant \|b_{n,j}(q,z)\|_{1,r} \leqslant 2^{-n-1} \|F_{n,j}(q,z)\|_{1,r} =$$

$$= 2^{-n-1} F_{n,j}(q,r) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ j = 0, 1. \tag{39}$$

Таким образом, требуется оценить сверху значения функций (37) в точке $z = r$.

Обозначив для краткости

$$V_{n,j} = \prod_{k=2}^{n} (D_{(-1)^{k+j+1}} + T_q) \tag{40}$$

и раскрыв скобки в этом произведении, видим, что оператор $V_{n,j}$ представляет собой сумму 2^{n-1} произведений $n-1$ операторов вида $D_{\pm 1}$ и T_q. Сперва проведем оценки в предположении справедливости условия $q(0) = 0$. В этом случае, согласно лемме 2, если в упомянутом разложении $V_{n,j}$ в сумму произведений в каком-либо произведении заменить стоящую рядом пару $T_q D_{\pm 1}$ на $D_{\pm 1} T_q$ (т. е. переставить сомножители местами), то получится новый оператор, "превосходящий" предыдущий в смысле отношения порядка $\prec_1$. Продолжая этот процесс до тех пор, пока в произведениях не останется пар вида $T_q D_{\pm 1}$, придем к оценке

$$V_{n,j} \prec_1 \sum_{\nu=0}^{n-1} \Bigg(\sum_{1 \leqslant m \leqslant \binom{n-1}{\nu}} P_m \Bigg) T_q^{\nu}, \tag{41}$$

где P_m — операторы вида $\prod\limits_{s=1}^{n-1-\nu} D_{\pm 1}$, причем очевидно, что таких операторных мономов длины $n-1-\nu$ при раскрытии скобок в (37) имеется ровно $\dbinom{n-1}{\nu}$ (некоторые из этих мономов могут и совпадать). Нетрудно заметить, что справедливы равенства $D_u D_v = D_u D$ (где $u, v \in \{-1, 1\}$), так как для любой $f \in \mathcal{A}_R$ значение оператора $D_{\pm 1} f$ отличается от Df лишь на постоянную $f'(0)$. Ввиду сказанного получаем тождества $\prod\limits_{s=1}^{S} D_{\pm 1} = D_{\pm 1} D^{S-1}$ $\forall S \in \mathbb{N}$, из которых и из (41) находим

$$V_{n,j} \prec_1 T_q^{n-1} + \sum_{\nu=0}^{n-2} (A_{\nu,n} D_1 + B_{\nu,n} D_{-1}) D^{n-\nu-2} T_q^{\nu}, \tag{42}$$

где $A_{\nu,n}$, $B_{\nu,n} \in \mathbb{N}_0$, $A_{\nu,n} + B_{\nu,n} = \dbinom{n-1}{\nu}$. Из (42) и очевидных отношений порядка $D_{-1} \prec_1 D$, $D_1 \prec_1 2D$ находим

$$V_{n,j} \prec_1 2 \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} D^{n-\nu-1} T_q^{\nu}, \quad j = 0, 1. \tag{43}$$

Соотношение (43) вместе с определением символов $\prec_1$, $\prec$ равенством (37) и включением $Q_1 \in \mathcal{K}_R$ приводит к неравенствам

$$F_{n,j}(q,r) \leqslant 2\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu} D^{n-\nu-1}T_q^{\nu}Q_1(z)\Big|_{z=r}, \quad j=0,1, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Значения степеней оператора $T_q = J_{\mathcal{P}(q)}$ на функции $Q_1(z) = \int\limits_0^z \mathcal{P}(q)(t)dt$ легко вычисляются:

$$T_q^{\nu}Q_1(z) = (Q_1(z))^{\nu+1}/(\nu+1)! \quad \forall\nu\in\mathbb{N}_0.$$

Поэтому получаем оценку

$$F_{n,j}(q,r) \leqslant 2\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu} D^{n-\nu-1}\frac{(Q_1(z))^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\Bigg|_{z=r}, \quad n\in\mathbb{N}, \quad j=0,1. \tag{44}$$

Так как норма $\|\ \|_{1,R}$ от произведения функций равна произведению их $\|\ \|_{1,R}$-норм, а по определению нормы (5) имеем $\|Q_1\|_{1,R} = \|q\|_R \leqslant M$, то

$$\|(Q_1(z))^{\nu+1}\|_{1,R} \leqslant M^{\nu+1}. \tag{45}$$

Воспользовавшись известным неравенством Коши для коэффициентов степенного ряда, которое можно записать в виде

$$|f^{(m)}(z)|/m! \leqslant \rho^{-m}\sup_{|\zeta-z|<\rho}|f(\zeta)|, \ f(\zeta)\in H^{\infty}(|\zeta-z|<\rho),$$

и положив $f(\zeta) = (Q_1(\zeta))^{\nu+1}$, $\rho = R-r$, $z=r$, с учетом (45) получим (очевидно, круг $|\zeta - r| < \rho$ лежит в круге $|\zeta| < R$)

$$D^{n-\nu-1}(Q_1(z))^{\nu+1}/(n-\nu-1)! \leqslant (R-r)^{\nu+1-n}\sup_{|z|<R}|Q_1(z)|^{\nu+1} \leqslant$$
$$\leqslant (R-r)^{\nu+1-n}\|Q_1^{\nu+1}(z)\|_{1,R} \leqslant (R-r)^{\nu+1-n}M^{\nu+1}. \tag{46}$$

Из (44) и (46) находим

$$F_{n,j}(q,r) \leqslant \frac{2(n-1)!}{(R-r)^n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(M(R-r))^{\nu+1}}{\nu!(\nu+1)!} <$$
$$< \frac{2(n-1)!}{(R-r)^n}u\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u^{2\nu+1}}{\nu!(\nu+1)!} = \frac{2(n-1)!}{(R-r)^n}uI_1(2u), \tag{47}$$

где $u = \sqrt{M(R-r)}$. Из (47), (39) и определения величин $\mathfrak{B}_n^0(M,R,r)$ следует неравенство (9).

Теперь получим оценки сверху (10) для $I_1(v)$. Первая из них совсем проста:

$$I_1(v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(v/2)^{2\nu+1}}{\nu!(\nu+1)!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(v/2)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \binom{2\nu+1}{\nu} <$$

$$< \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(v)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(v).$$

Вторая получается из интегрального представления модифицированной функции Бесселя с индексом 1 [10, с. 65]

$$I_1(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(v\cos\theta)\cos\theta\, d\theta < \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(v\cos\theta)\cos\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{e^v}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\left(-2v\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta\, d\theta.$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $\sqrt{2}\sin(\theta/2) = t$, приходим к неравенству

$$I_1(v) < \frac{e^v}{\pi\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \frac{\exp(-vt^2)(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2/2}}\, dt < \frac{e^v}{\pi\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \exp(-vt^2)\, dt <$$

$$< \frac{e^v}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-vt^2)\, dt = \frac{e^v}{\sqrt{2\pi v}}.$$

Доказательство оценки (8) для коэффициентов асимптотических рядов (3) на более широком классе потенциалов $\mathfrak{D}(M,R)$ следует в принципе по тому же пути, однако есть технические различия. (Прежнее доказательство не проходит, так как в случае $q(0) \neq 0$ мы не можем утверждать, что $T_q D_1 \prec_1 D_1 T_q$.) После разложения оператора $V_{n,j}$ в сумму произведений пользуемся соотношениями $D_{-1} \prec_1 D$ и $D_1 \prec_1 2D$ и заменяем в этих произведениях операторы D_{-1} на D, а D_1 на $2D$, делая тем самым для $V_{n,j}$ оценку сверху. Так как число операторов D_1 в произведении (40) не больше $(n+1)/2$, то от такой замены в каждом слагаемом появятся множители, не превосходящие $2^{(n+1)/2}$, а вместо $D_{\pm 1}$ будут стоять только операторы D. После этого, как и ранее, переставляем (там где это требуется) операторы D и T_q так, чтобы T_q применялся сначала, и в результате каждой перестановки получаем оператор, бо́льший предыдущего в смысле отношения порядка $\prec_1$. Проделав эти операции, придем к оценке

$$V_{n,j} \prec_1 2^{(n+1)/2} \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} D^{n-\nu-1} T_q^{\nu}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j = 0, 1. \tag{48}$$

Далее выводим (8) из (48) в точности так же, как выше из (42) было получено (9). Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 3. Положим

$$V = \left(\frac{n}{(d+2)\sqrt{H}}\right)^{2/(d+2)}, \quad R = r + V. \tag{49}$$

Поскольку $R > r \geqslant 1$, то

$$\|q\|_R \leqslant R^{d+1} H = (r+V)^{d+1} H = V^{d+1} H \Big(1 + r/V\Big)^{d+1}. \tag{50}$$

В силу условия $n \geqslant (d+2)\sqrt{H}(r(d+1)/(2\ln(1+d/2)))^{1+d/2}$ и (49) имеем $V \geqslant r(d+1)/(2\ln(1+d/2))$, откуда, учитывая (50) и известное неравенство $(1+a/x)^x < e^a$ $(a > 0,\ x > 0)$, получаем

$$\|q\|_R \leqslant V^{d+1} H \left(1 + \frac{2\ln(1+d/2)}{d+1}\right)^{d+1} < V^{d+2} H \Big(1 + d/2\Big)^2 \stackrel{\text{def}}{=} M. \tag{51}$$

Согласно (8), (49) и (10), имеем

$$\max_{j=0,1} \max_{|z| \leqslant r} |b_{n,j}(q,z)| < (n-1)! \sqrt{MV} \operatorname{sh}(\sqrt{4MV}) / (2^{(n+3)/2} V^n). \tag{52}$$

Ввиду (51) и (49) справедливо равенство $\sqrt{MV} = n/2$, которое вместе с (52) приводит к оценке $\max\limits_{j=0,1} \max\limits_{|z| \leqslant r} |b_{n,j}(q,z)| < 2^{-(n+5)/2} V^{-n} n! \operatorname{sh} n$, из которой с учетом (49), поскольку при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $n! \operatorname{sh} n < 2n^{n+1/2}$, находим

$$\max_{j=0,1} \max_{|z| \leqslant r} |b_{n,j}(q,z)| < n^{n+1/2} V^{-n} \cdot 2^{-(n+3)/2} =$$

$$= n^{1/2+dn/(d+2)} H^{n/(d+2)} (d+2)^{2n/(d+2)} \cdot 2^{-(n+3)/2}. \tag{53}$$

Вспоминая обозначение $\gamma_1 = d/(d+2)$ и применяя неравенство $x^{2/x} \leqslant \leqslant \sqrt{2}$ $(\forall x \geqslant 16)$ для $x = d+2$, заключаем, что коэффициенты асимптотических рядов (3) для решений уравнения (1) с начальными условиями (2) и потенциалом $q(z)$, являющимся полиномом степени $d \geqslant 14$, удовлетворяют неравенствам

$$\max_{j=0,1} \max_{|z| \leqslant r} |b_{n,j}(q,z)| < (1/2) n^{1/2+\gamma_1 n} H^{n/(d+2)}. \tag{54}$$

При $2 \leqslant d \leqslant 13$ с учетом неравенства $(d+2)^{2/(d+2)} \leqslant 2$ из (53) получаем $\max\limits_{j=0,1} \max\limits_{|z| \leqslant r} |b_{n,j}(q,z)| \leqslant 2^{(n-3)/2} n^{1/2+\gamma_1 n} H^{n/(d+2)}$, а при $d = 1$ находим

$$\max_{j=0,1} \max_{|z| \leqslant r} |b_{n,j}(q,z)| \leqslant 2^{-3/2} n^{1/2+n/3} \times H^{n/3} (3^{2/3} \cdot 2^{-1/2})^n <$$

$$< (1/\sqrt{8}) n^{1/2+n/3} H^{n/3} \exp(2n/5).$$

Следствие 3 доказано.

Из доказательства следствия 3 видно, что при больших M и R оценки (8) и (9) нельзя существенно улучшить по этим параметрам. Если в правых частях (8) и (9) множители $\mathrm{sh}(2\sqrt{M(R-r)})$ заменить на $\exp(K(MR)^\alpha)$ с какой-либо абсолютной постоянной K и показателем $\alpha < 1/2$, то такие оценки будут уже неверны, поскольку из них можно было бы, действуя так же, как и в доказательстве следствия 3, вывести $\max\limits_{j=0,1} \max\limits_{|z| \leqslant r} |b_{n,j}(q,z)| = O(n^{\gamma_2 n})$ с некоторой постоянной $\gamma_2 < \gamma_1$, а это уже противоречит оценкам снизу (19), установленным еще А. О. Кравицким и В. Б. Лидским.

Доказательство следствия 4. Положим $V = \sigma^{-1} \ln n$, $R = = r + V$. Тогда в качестве M можно взять $RAe^{\sigma R} = O(n \ln n)$ и, согласно (8), с некоторой постоянной A_1, зависящей от A и σ, получим оценку

$$\max_{j=0,1} \max_{|z| \leqslant r} |b_{n,j}(q,z)| = O((n-1)! \cdot 2^{-n/2} \sqrt{MV} V^{-n} \exp(A_1 \sqrt{n} \ln n)) =$$

$$= O(n! \sigma^n \exp(-n \ln \ln n)),$$

а это и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. Если $q \in \mathcal{K}_R$, то $J_q = T_q$, следовательно,

$$b_{n,j}(q,z) = 2^{-n-1} \prod_{k=1}^{n} (D_{(-1)^{k+j+1}} + T_q)\mathbf{1} =$$

$$= 2^{-n-1}\prod_{k=2}^{n}(D_{(-1)^{k+j+1}} + T_q)\Big(\int_0^z q(t)\,dt\Big). \tag{55}$$

Поскольку все операторы в (55) положительны, то, отбрасывая все слагаемые, кроме одного, в разложении произведения $\prod\limits_{k=2}^{n}(D_{(-1)^{k+j+1}} + T_q)$ в сумму, получаем при $n \geqslant 2$ оценку снизу

$$\max_{|z|\leqslant r}|b_{n,j}(q,z)| = b_{n,j}(q,r) \geqslant 2^{-n-1}\prod_{k=2}^{n} D_{(-1)^{k+j+1}}\Big(\int_0^z q(t)dt\Big)\Big|_{z=r} =$$

$$= 2^{-n-1}(q^{(n-2)}(r) \pm q^{(n-2)}(0)),$$

в которой при одном значении j стоит знак плюс, а при другом — минус (при каком именно, зависит от четности n). В частности, имеем

$$\max_{j=0,1}\max_{|z|\leqslant r}|b_{n,j}(q,z)| \geqslant 2^{-n-1}(q^{(n-2)}(r) + q^{(n-2)}(0)) \quad \forall q \in \mathcal{K}_R, \quad \forall n \geqslant 2. \tag{56}$$

Теперь положим $q_0(z) = -(M/R)\ln(1-z/R) = (M/R)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n)(z/R)^n$, $|z| < 1$. Очевидно, что $q_0(0) = 0$ и $q_0 \in \mathcal{K}_R$. Имеем также

$$\|q_0\|_R = (M/R)\sum_{n=1}^{\infty} R^{n+1}/(n(n+1)R^n) = M\sum_{n=1}^{\infty}(n(n+1))^{-1} = M.$$

Следовательно, $q_0 \in \mathfrak{D}^0(M,R) \cap \mathcal{K}_R$. Поэтому, согласно определению экстремальной функции $\mathfrak{B}_n^0(M,R,r)$ и (56), при $n \geqslant 3$ находим

$$\mathfrak{B}_n^0(M,R,r) \geqslant 2^{-n-1}(q_0^{(n-2)}(r) + q_0^{(n-2)}(0)) > 2^{-n-1}q_0^{(n-2)}(r) =$$

$$= 2^{-n-1}\frac{M}{R}\left(\frac{1}{R-z}\right)^{(n-3)}\Bigg|_{z=r} = \frac{MR^{-1}(n-3)!}{2^{n+1}(R-r)^{n-2}},$$

что и требовалось установить. Теорема 2 полностью доказана.

Доказательство следствия 2. Если $q \in \mathcal{K}_R$ и $q(0) = 0$, то при любом $\varepsilon \in (0, R-r)$ справедливо включение $q \in \mathfrak{D}^0(M, R-\varepsilon)$ с некоторой постоянной $M = M(\varepsilon)$ и круг $|z| \leqslant r$ лежит в круге $|z| \leqslant R-\varepsilon$. Поэтому по теореме 1 выполняются неравенства $b_{n,j}(q,r)/n! \leqslant 2^{-n}(R-\varepsilon-r)^{-n}C(\varepsilon,R,r,q)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $j = 0,1$, с некоторой положительной постоянной $C(\varepsilon,R,r,q)$, из которых получаем

$$\limsup_{n\to\infty}(b_{n,j}(q,r)/n!)^{1/n} \leqslant (2(R-\varepsilon-r))^{-1} \ \forall \varepsilon > 0.$$

Отсюда в силу произвольности ε следует, что

$$\limsup_{n\to\infty}(b_{n,j}(q,r)/n!)^{1/n} \leqslant (2(R-r))^{-1}. \tag{57}$$

С другой стороны, из (12) при $j = 0, 1$ находим

$$\limsup_{n\to\infty}(b_{n,j}(q,r)/n!)^{1/n} \geqslant 2^{-1}\limsup_{n\to\infty}((q^{(n-2)}(r) - q^{(n-2)}(0))/n!)^{1/n}. \tag{58}$$

Так как коэффициенты степенного ряда для $q(z)$ в точке 0 неотрицательны, а радиус сходимости ряда в точности равен R, то точка $z = R$ является особой для $q(z)$ [11, с. 342]. Ясно также, что в круге $|z-r| \leqslant R - r$ других особых точек у $q(z)$ нет; следовательно, по формуле Коши — Адамара

$$\limsup_{k\to+\infty}(q^{(k)}(r)/k!)^{1/k} = 1/(R-r), \quad \limsup_{k\to+\infty}(q^{(k)}(0)/k!)^{1/k} = 1/R,$$

а значит, и

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{q^{(n-2)}(r)}{(n-2)!}\right)^{1/(n-2)} = \frac{1}{R-r} = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{q^{(n-2)}(r)}{n!}\right)^{1/n},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{q^{(n-2)}(0)}{n!}\right)^{1/n} = \frac{1}{R}. \tag{59}$$

Тем самым $q^{(n-2)}(0)$ имеет существенно ме́ньший порядок роста, чем $q^{(n-2)}(r)$, поэтому из (59) заключаем, что

$$\limsup_{n\to\infty}((q^{(n-2)}(r) - q^{(n-2)}(0))/n!)^{1/n} = 1/(R-r),$$

а также из (58) имеем

$$\limsup_{n\to\infty}(b_{n,j}(q,r)/n!)^{1/n} \geqslant 1/(2(R-r)). \tag{60}$$

Из (57) и (60) следует (14).

С помощью аналогичных рассуждений убеждаемся в том, что для доказательства справедливости соотношения (15) достаточно установить, что в предположении "регулярности" поведения $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, которое состоит в том, что

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\max_{n\leqslant m\leqslant n(1+\varepsilon)}(a_m)^{1/m}\Big) = 1/R \quad (\forall\varepsilon > 0), \tag{61}$$

выполняется неравенство

$$\liminf_{k\to\infty}(q^{(k)}(r)/k!)^{1/k} \geqslant 1/(R-r). \tag{62}$$

Имеем $\dfrac{q^{(k)}(r)}{k!} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{k+\nu}\dbinom{k+\nu}{\nu} r^{\nu}$. Обозначим $\tau = r/(R-r)$. Возьмем теперь произвольное $\varepsilon \in (0,\tau)$ и зафиксируем его. Очевидно, что

$$\frac{q^{(k)}(r)}{k!} > \sum_{k(\tau-\varepsilon)<\nu<k(\tau+\varepsilon)} a_{k+\nu}\binom{k+\nu}{\nu} r^{\nu}.$$

Согласно (61) при $k > k_0(\varepsilon)$ на отрезке $[k(1+\tau), k(1+\tau+\varepsilon)]$ найдется номер $m = m(k) = k + \nu(k)$, для которого $(a_m)^{1/m} > 1/(R(1+\varepsilon))$. По формуле Стирлинга справедлива асимптотика

$$\binom{k+\nu}{\nu} = \frac{(k+\nu)^{k+\nu}}{k^k\nu^\nu}\sqrt{\frac{k+\nu}{2\pi k\nu}}(1+o(1)), \quad \min(k,\nu)\to+\infty.$$

Так как в силу выбора $m(k)$ имеем $\nu(k)\to+\infty$, то при $k > k_1 > k_0(\varepsilon)$ получаем оценку снизу

$$\frac{q^{(k)}(r)}{k!} > a_{k+\nu}\binom{k+\nu}{\nu} r^{\nu} > \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\frac{r^\nu}{(R(1+\varepsilon))^{k+\nu}}\frac{(k+\nu)^{k+\nu}}{k^k\nu^\nu}.$$

(Здесь и ниже мы для краткости пишем ν вместо $\nu(k)$.)

Следовательно, при $k > k_2 > k_1$

$$\left(\frac{q^{(k)}(r)}{k!}\right)^{1/k} > \frac{1}{\sqrt[k]{k}}\frac{1}{R(1+\varepsilon)}\left(\frac{r(k+\nu)}{R\nu}\right)^{\nu/k}\frac{k+\nu}{k}. \tag{63}$$

Так как

$$\frac{r(k+\nu)}{R\nu} = \frac{r(1+\nu/k)}{R(\nu/k)} \geqslant \frac{r(1+\tau)}{R(\tau+\varepsilon)} = \frac{r}{R-r}\frac{1}{r/(R-r)+r\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{(R-r)(1/(R-r)+\varepsilon)}, (k+\nu)/k \geqslant 1+\tau = R/(R-r),$$

то из (63) находим, что

$$\left(\frac{q^{(k)}(r)}{k!}\right)^{1/k} > \frac{1}{(R-r)(1+\varepsilon)}\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\left(\frac{1}{1+\varepsilon(R-r)}\right)^{\tau+\varepsilon}. \tag{64}$$

Переходя в (64) к нижнему пределу, получим неравенство

$$\liminf_{k\to\infty}(q^{(k)}(r)/k!)^{1/k} \geqslant C_1(\varepsilon)/(R-r),$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} C_1(\varepsilon) = 1$, из которого в силу произвольности ε получаем (62). Соотношения (14) и (62) приводят к равенству (15). Следствие 2 полностью доказано.

Литература

1. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М., 1990.
2. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. М., 1978.