

УДК 517.928

Оценка наилучшего приближения решений уравнения Штурма – Лиувилля с аналитическим потенциалом частичными суммами асимптотических рядов¹

В. А. Садовничий, А. Ю. Попов

На отрезке $-a \leq x \leq a$, $a > 0$, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' - q(x)y = \lambda^2 y, \quad \lambda > 0, \quad (1)$$

с потенциалом q , аналитическим в некоторой выпуклой области $G \subset \mathbb{C}$, содержащей отрезок $[-a, a]$.

Уравнения (1), как правило, не решаются в квадратурах. Только в редких случаях их фундаментальная система решений (ФСР) записывается через элементарные или “стандартные” специальные функции. Поэтому является актуальной задача отыскания приближенных решений. Этому вопросу посвящено большое число исследований и имеется обширная литература (см., например, [1 – 3]). Среди приближенных методов отметим разностные схемы, итерационный метод, поиск решений в виде начальных отрезков степенных рядов и многие другие.

В нашей работе устанавливается оценка погрешности при аппроксимации ФСР уравнения (1), удовлетворяющая начальным условиям

$$y_0(0, \lambda) = 1, \quad y'_0(0, \lambda) = 0, \quad y_1(0, \lambda) = 0, \quad y'_1(0, \lambda) = \lambda i, \quad (2)$$

частичными суммами асимптотических рядов (АР). Этот метод приближения лучше остальных приспособлен к ситуации, когда решения сильно осциллируют. Перейдем к постановке задачи.

Из классических работ Биркгофа и Тамаркина [4, 5] известно, что функции, образующие ФСР уравнения (1) с начальными условиями

¹ Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 4. С. 498–506

(2), разлагаются в формальные ряды, которые являются асимптотическими при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$y_j(x, \lambda) \sim \exp(i\lambda x) \sum_{k=0}^{\infty} (-i\lambda)^{-k} b_{k,j}(x) + \\ + (-1)^j \exp(-i\lambda x) \sum_{k=0}^{\infty} (i\lambda)^k b_{k,j}(x), \quad j = 0, 1, \quad (3)$$

где коэффициенты $b_{k,j}(x) = b_{k,j}(q, x)$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$b_{0,0}(x) = b_{0,1}(x) \equiv 1/2, \\ b_{n+1,j}(x) = \frac{1}{2} \left(b'_{n,j}(x) + (-1)^{n+j} b'_{n,j}(0) + \int_0^x b_{n,j}(t) q(t) dt \right). \quad (4)$$

Ряды (3) являются асимптотическими для функций $y_j(q, x, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ даже в случае $q \in C^\infty([-a, a])$ в том смысле, что при любых $n \in \mathbb{N}$ справедлива равномерная по $x \in [-a, a]$ асимптотика

$$y_j(q, x, \lambda) = S_{n,j}(q, x, \lambda) + O_{q,n}(\lambda^{-n-1}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

с постоянной в символе O , зависящей только от потенциала q и номера n , через $S_{n,j}(q, x, \lambda)$ обозначена n -я частичная сумма АР (3):

$$S_{n,j}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \sum_{k=0}^n (-i\lambda)^{-k} b_{k,j}(x) + (-1)^j e^{-i\lambda x} \sum_{k=0}^n (i\lambda)^{-k} b_{k,j}(x). \quad (6)$$

Возникает естественный вопрос. Если потенциал q аналитичен в какой-либо окрестности отрезка $[-a, a]$, то можно ли пользоваться рядами (3) для приближенного вычисления значений $y_j(q, x, \lambda)$ при $\lambda \geq 1$, $x \in [-a, a]$? Другими словами, для заданного $\varepsilon > 0$ требуется приблизить ФСР (2) в равномерной метрике на $[-a, a]$ частичной суммой АР (3) с каким-либо номером $N = N(\lambda, \varepsilon)$ с точностью выше ε . Но осуществимо ли это, и если да, то как найти номер частичной суммы, гарантирующей требуемое приближение? Если окажется, что ряды (3) сходятся, то, взяв частичную сумму из должного количества слагаемых, мы получили бы приближенное решение с любой наперед заданной степенью точности. Но задача о сходимости рядов (3) остается открытой. Описание класса потенциалов $q(x)$, для которых АР (3) сходятся, до сих пор не получено. А. О. Кравицким и В. Б. Лидским

в [6] доказано, что для уравнений (1) АР расходятся для потенциалов $q(x) = x^d$ ($\forall d \in \mathbb{N}$) при всех $x > 0$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как, согласно (4), $b_{n,j}(q, x)$ — положительные (но не линейные, а полиномиальные по q) операторы в пространствах функций, аналитических в круге $|z| < R$ (конус — ряды с неотрицательными коэффициентами Тейлора в нуле), то АР (3) расходятся при всех $x > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ для любого q из указанного конуса.

В то же время для некоторых потенциалов ряды (3) могут и обрываться. Приведем два примера:

1) уравнение $-y'' - (1/2)(\operatorname{ch}(x/2))^{-2}y = \lambda^2 y$ имеет

ФСР $\exp(\pm i\lambda x)(1 \pm (i/(2\lambda)) \operatorname{th}(x/2))$;

2) уравнение $-y'' + 2(x - x_0)^{-2}y = \lambda^2 y$ имеет

ФСР $\exp(\pm i\lambda x)(1 \pm i/(\lambda(x - x_0)))$.

Но в общем случае на сходимость АР (3) мало надежды. Условия на потенциал q , обеспечивающие сходимость АР (3) при $x \in [-a, a]$, $\lambda > \lambda_0$, по-видимому, какие-то очень сложные. Даже класс потенциалов, для которых ряды (3) обрываются, до настоящего времени не описан. Последний результат в этом направлении получен в работе [7]. Если существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > n_0$ имеем $b_n(q, x) \equiv 0$, то $q(x) = (P'(x)/P(x))'$, где $P(x)$ — квазимногочлен. (Обратное, вообще говоря, неверно!)

Расходящиеся асимптотические ряды — не редкость в математическом анализе. Они довольно часто используются для приближенного вычисления значений “своих” функций. Характерен следующий эффект: частичные суммы АР сначала приближаются к своей функции, а уже потом удаляются от нее. Метод приближения функций частичными суммами АР основан именно на этом факте. Наша задача — найти номер $N = N(\lambda, q)$ такой, чтобы частичная сумма АР с этим номером подходила максимально близко (или достаточно близко) к решению, и оценить погрешность.

Для потенциалов, аналитических в большом круге и удовлетворяющих условию $q(0) = 0$, а также для потенциалов, аналитических в некоторой ρ -окрестности отрезка $[-a, a]$, нами получены оценки для погрешности наилучшего приближения ФСР (2) уравнения (1) суммами (6), экспоненциально убывающие с ростом λ .

Основной результат статьи заключается в следующем. Положим $M_0 = \max \left\{ \int_0^a |q(t)| dt, \int_{-a}^0 |q(t)| dt \right\}$ и через $\varphi_{n,j}(q, x, \lambda)$ обозначим невязку при приближении решения y_j суммой $S_{n,j}$:

$$\varphi_{n,j}(q, x, \lambda) = y_j(q, x, \lambda) - S_{n,j}(q, x, \lambda).$$

Теорема 1. Пусть функция $q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ аналитична в круге $|z| < R$, $R > a$, и ее норма конечна:

$$\|q\|_R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| R^{n+1}}{n+1} = M < +\infty. \quad (7)$$

Для $\lambda > 0$ через $N = N(\lambda)$ обозначим ближайшее к $2\lambda(R - a) - 1$ целое число¹.

Тогда при $N > 1$ имеем

$$\sup_{\eta \geq \lambda} \max_{j=0,1} \max_{x \in [-a,a]} |\varphi_{N,j}(q, x, \eta)| \leq CN^{-1/2} \exp(M_0/\lambda - 2\lambda(R - a)), \quad (8)$$

где $C = C(R, a, M) = \sqrt{8}(M(R - a))^{1/4} \exp(2\sqrt{M(R - a)})$.

Теорема 2. Пусть $\rho > 0$, а функция $q(z)$ аналитична в ρ -окрестности отрезка $[-a, a]$ — $\mathcal{O}(\rho, [-a, a])$, замыкание которой представляет собой объединение двух полуокружностей $\{|z - a| \leq \rho, \operatorname{Re} z \geq a\}$, $\{|z + a| \leq \rho, \operatorname{Re} z \leq -a\}$ и прямоугольника $\{|\operatorname{Re} z| \leq a, |\operatorname{Im} z| \leq \rho\}$. Предположим, что следующая норма $q(z)$ конечна:

$$\mathcal{N}(q) = \sup_{z \in \mathcal{O}(\rho, [-a, a])} \inf_{\mathcal{L}_{0,z}} \int_0^z |q(t)| |dt| = M_1 < +\infty. \quad (9)$$

В выражении (9) нижняя грань берется по всем спрямляемым кривым $\mathcal{L}_{0,z}$, соединяющим точки 0 и z . Для $\lambda > 0$ положим $N = N(\lambda) = [2\lambda\rho/e] - 1$. Тогда при $N > 1$ имеем

$$\sup_{\eta \geq \lambda} \max_{j=0,1} \max_{x \in [-a,a]} |\varphi_{N,j}(q, x, \eta)| \leq M_1(2\rho\lambda + e) \exp(M_0/\lambda + M_1\rho - 2\rho\lambda/e).$$

К исследованию вопроса об аппроксимации решений уравнения (1) приводит и следующая важная задача — обоснование метода приближенного вычисления первых собственных значений с помощью формулы следов. Этот метод мог бы быть применен, например, к вычислению первых собственных чисел задачи Орра — Зоммерфельда, описывающей плоскопараллельное течение жидкости, и тем самым к доказательству устойчивости этого течения, т.е. к решению задачи, которую изучали многие математики: Нейман, Рэлей и др.

¹ Если $p = \nu + 1/2$, $\nu \in \mathbb{Z}$, то ближайшим целым числом к p будем считать ν .

Как известно, для задачи Штурма — Лиувилля $-y'' + q(x)y = \Lambda y$, $y(0) = y(\pi) = 0$ собственные значения в случае гладкой функции $q(x)$ асимптотически ведут себя следующим образом:

$$\Lambda_n \sim n^2 + c_0 + c_2/n^2 + c_4/n^4 + \dots, \quad n \rightarrow \infty.$$

Коэффициенты c_0, c_2, \dots выражаются в явном виде через функцию $q(x)$. Тогда можно вычислить первый регуляризованный след [8]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Lambda_n - n^2 - c_0) = c_0/2 - (q(0) + q(\pi))/4.$$

Известны также формулы регуляризованных следов всех порядков:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Lambda_n^k - A_n(k)) = B(k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где $A_n(k)$ — отрезки асимптотических разложений Λ_n , обеспечивающие абсолютную сходимость указанных рядов, а $B(k)$ — величины, выражающиеся в конечном виде через потенциал $q(x)$. Важно, что нахождение всех этих величин может быть алгоритмизировано.

И. М. Гельфанд предложил новый метод приближенного вычисления первых собственных значений, который был реализован Л. А. Диким в 1957 г. В бесконечной системе уравнений (10) удерживаются только N уравнений и N слагаемых в круглых скобках, т. е. записывается алгебраическая система

$$\sum_{n=1}^N (\Lambda_n^k - A_n(k)) = B(k), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

которая и решается относительно $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$. Л. А. Дикий осуществил конкретный счет для потенциала $q(x) = \cos x$ (уравнение Матье) и получил значения первых трех собственных чисел с тремя верными знаками после запятой, причем без строго математического обоснования данного метода. В работе [9] показано, что для потенциалов общего вида из класса C^∞ метод вычисления первых собственных чисел, примененный Л. А. Диким, не может быть обоснован. В [7] выделен класс S уравнений, у которых в разложениях (3) все коэффициенты $b_{k,j}(x)$, начиная с некоторого номера n_0 , тождественно равны нулю, т. е. это класс уравнений с обрывающимися АР для ФСР (и тем более со сходящимися!). Для такого класса S удалось обосновать метод вычисления

первых собственных значений, использованный Л. А. Диким. Это дает основания надеяться на то, что и для тех уравнений (1), ФСР которых допускает очень хорошее приближение частичными суммами АР (3), метод Гельфанда — Дикого окажется эффективным.

Предположим, что поставлена задача найти ФСР уравнения (1) с точностью выше ε ($\varepsilon > 0$ задано). Мы предлагаем следующий метод “аналитической аппроксимации”, который работает в случае, когда потенциал

$$q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (11)$$

голоморфен в некотором круге радиуса, большего a , с центром в начале координат. Теорема 1, в которой оценена постоянная в символе O из соотношения (5), позволяет выяснить, при каких λ предлагаемый метод обеспечивает требуемую точность.

I. Если $q(0) = a_0 \neq 0$, то переписываем уравнение (1) в виде

$$-y'' - q_0(x)y = \mu^2 y, \quad \mu = \sqrt{\lambda^2 + a_0}. \quad (12)$$

(Отметим, что потенциал не предполагается действительным, важно лишь, чтобы $q(0) \in \mathbb{R}$.) Если $q(0) = 0$, то считаем, что $\mu = \lambda$.

II. При $t > 0$ и $\mu > 0$ рассматриваем функцию

$$F(\mu, t) = \sqrt{tM(a+t)} - \mu t, \quad \text{где} \quad M(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|R^{n+1}}{n+1}.$$

Функция $F(\mu, t)$ определена при любых $\mu > 0$ и $t \in [0, R_1 - a)$, где R_1 — радиус сходимости степенного ряда (11). (Если $R_1 < +\infty$ и $M(R_1) < +\infty$, то $F(\mu, t)$ определена и при $t = R_1 - a$.) Для каждого $\mu > 0$ определена величина

$$\Phi(\mu) = \begin{cases} \min_{0 \leq t < R_1 - a} F(\mu, t), & \text{если } R_1 = +\infty, \\ \min_{0 \leq t < R_1 - a} F(\mu, t), & \text{если } R_1 < +\infty, \text{ но } M(R_1) = +\infty, \\ \min_{0 \leq t \leq R_1 - a} F(\mu, t), & \text{если } R_1 < +\infty \text{ и } M(R_1) < +\infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что в первом или втором случае минимум на полуинтервале $[0, R_1 - a)$ достигается. Поиск минимума по t функции $F(\mu, t)$ при фиксированном μ представляет собой отдельную задачу,

которая, разумеется, содержит ряд трудностей: не всегда мы знаем в явном виде $M(R)$ и не всегда просто отыскать минимум функции. На практике можно поступать так: если $M(R)$ не удастся найти точно, то имеет смысл заменить $M(R)$ какой-либо просто вычисляемой ее мажорантой $M^*(R)$. Если после этого минимум функции $F^*(\mu, t) = \sqrt{tM^*(a+t)} - \mu t$ снова не находится точно и приходится использовать компьютер, то фактически берется значение $t^* = t^*(\mu)$, “близкое” к точке минимума, и вычисляется $\Phi^*(\mu) = F^*(\mu, t^*(\mu))$. Очевидно, что $\Phi^*(\mu) \geq \Phi(\mu)$. Поэтому, согласно теореме 1, если взять в качестве $N = N(\mu)$ ближайшее целое число к $2\mu t^*(\mu) - 1$, то при всех $\eta \geq \mu$ для решений уравнения $-y'' - q_0(x)y = \eta^2 y$, удовлетворяющих начальным условиям

$$y_0(0, \eta) = 1, \quad y'_0(0, \eta) = 0, \quad y_1(0, \eta) = 0, \quad y'_1(0, \eta) = i\eta, \quad (13)$$

будет выполняться неравенство

$$\sup_{\eta \geq \mu} \max_{j=0,1} \max_{x \in [-a, a]} |y_j(q_0, x, \eta) - S_{N,j}(q_0, x, \eta)| < A(\mu) \exp(M_0/\mu + 2\Phi^*(\mu)), \quad (14)$$

где $M_0 = \max \left\{ \int_0^a |q_0(t)| dt, \int_{-a}^0 |q_0(t)| dt \right\}$, $A(\mu) = (8\sqrt{t^* M^*(a+t^*)}/N)^{1/2}$.

Заметим, что множитель $A(\mu)$ играет весьма незначительную роль по сравнению с величиной $\exp(2\Phi^*(\mu))$, которая и дает “малость” оценки сверху (14). (Легко видеть, что $\Phi(\mu)$ убывает не медленнее, чем линейная функция, и, следовательно, $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \Phi(\mu) = -\infty$.)

III. Ищем “возможно меньшее” μ , для которого выполняется неравенство

$$A(\mu) \exp(M_0/\mu + 2\Phi^*(\mu)) < \varepsilon. \quad (15)$$

Поиск корня уравнения $A(\mu) \exp(M_0/\mu + 2\Phi^*(\mu)) = \varepsilon$ проводим методом деления пополам. В результате за небольшое число операций (точность выше 0,1 не требуется) находится значение $\hat{\mu}$, не сильно отличающееся от наименьшего, удовлетворяющего неравенству (15), начиная с которого наш метод аппроксимации решений рассматриваемого уравнения заведомо даст точность выше ε .

IV. Берем в качестве \hat{N} ближайшее целое число к $2\hat{\mu}t^*(\hat{\mu}) - 1$. Далее, отправляясь от потенциала $q_0(x)$, вычисляем \hat{N} первых коэффициентов АР $b_{k,j}(q_0, x)$ по рекуррентным формулам (4). Таким образом, построены функции $S_{\hat{N},j}(q_0, x, \mu)$, $j = 0, 1$, отличающиеся от ФСР (13) уравнения $-y'' - q_0(x)y = \eta^2 y$ меньше чем на ε при всех $x \in [-a, a]$ и

$\eta \geq \hat{\mu}$. Отметим, что $S_{N,0}(q_0, 0, \mu) = 1$ и $S_{N,1}(q_0, 0, \mu) = 0$ при любых $N \in \mathbb{N}$.

Замечания. 1. Если $q_0(x)$ – функция вида $\sum_m \sum_\ell C_{m,\ell} x^m \exp(\gamma_\ell x)$, где $C_{m,\ell}$ и γ_ℓ – некоторые, вообще говоря, комплексные постоянные, то коэффициенты АР легко вычисляются на компьютере в аналитическом виде, минуя операции численного дифференцирования и интегрирования, с помощью стандартных программ вычисления производных и интегралов от элементарных функций. В число функций указанного вида, естественно, входят полиномы и тригонометрические полиномы.

2. Используемая нами норма (7) потенциала q может показаться неудобной для вычислений, но она допускает хорошо известные оценки сверху как через норму Харди в $H^1(|z| < R)$, так и через \sup -норму в $H^\infty(|z| < R)$:

$$\|q\|_R \leq \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} |q(Re^{i\theta})| d\theta, \quad \|q\|_R \leq R \sup_{|z| < R} |q(z)|.$$

Если тейлоровы коэффициенты a_n ряда (11) неотрицательны, то

$$\|q\|_R = \int_0^R q(t) dt.$$

3. Из изложенного ниже видно (см. неравенства (25) и (33)), что наш метод позволяет получить оценки для погрешности приближения ФСР уравнения (1) N -й частичной суммой АР с любым номером N , а не только со специально выбираемым, как в формулировках теорем 1 и 2. Это важно в случае, когда вычисление слишком большого количества коэффициентов $b_{k,j}$ затруднено, т.е. нам задана граница сверху для N .

4. При приближении частичными суммами АР решений уравнения (1) в случае потенциала q , аналитического в $\mathcal{O}(\rho, [-a, a])$, поиск оптимального номера N и порога $\hat{\mu}$ применимости метода совпадает с изложенным выше. Делаются лишь естественные изменения, продиктованные другой формулой для $N(\lambda)$ и другой оценкой сверху в теореме 2. Здесь сдвиг спектрального параметра необязателен, но если за счет этого можно уменьшить величину M_1 , то его имеет смысл сделать. Необходимость рассмотрения потенциалов, аналитических только лишь в $\mathcal{O}(\rho, [-a, a])$, но не в круге $|z| < \rho + a$, продиктована потребностями приложений. В задачах математической физики часто встречаются уравнения (1) с потенциалами, имеющими полюса “недалеко” от действительной оси. Например, $q(x) = (x^2 + \alpha^2)^{-k}$,

$q(x) = c(\operatorname{ch} \beta x)^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Иногда, как в случаях $q(x) = \cos bx$, $q(x) = \exp(-bx^2)$, b — большое положительное число, норма $q(z)$ в $\mathcal{O}(\rho, [-a, a])$ невелика, а в большом круге огромна. Тогда теорема 1 не дает приемлемой оценки погрешности при небольших λ .

5. Результаты, аналогичные теоремам 1 и 2, нами получены и при произвольных значениях параметра $\lambda \in \mathbb{C}$. Также оценены отклонения n -х частичных сумм АР (3) от решений уравнения (1) не только на отрезке действительной оси, но и на различных компактах в комплексной плоскости. Иначе говоря, мы умеем давать оценки для приближений решений, содержащих растущие экспоненты. В этом случае приведенные в теоремах 1 и 2 оценки ухудшаются на множитель $\exp(|\operatorname{Im}(\lambda z)|)$. Ввиду небольшого объема публикации эти вопросы не рассматриваем.

Насколько нам известно, постоянная в символе O в соотношении (5) ранее не вычислялась. Были получены лишь оценки невязок $\varphi_{n,j}(q, x, \lambda)$ через $(n+1)$ -й коэффициент АР (3). Приведем неравенство Олвера [10, с. 353], переписанное для нашего случая:

$$\max_{j=0,1} \max_{x \in [-a,a]} |\varphi_{n,j}(q, x, \lambda)| \leq 4 \exp(M_0/\lambda) \mathcal{V} b_{n+1} |0^x / \lambda^{n+1}. \quad (16)$$

Величина M_0 определена перед формулировкой теоремы 1, а через $\mathcal{V} f|_\alpha^\beta$ обозначена вариация функции f на отрезке $[\alpha, \beta]$. Основная проблема заключается в исследовании поведения величин $\mathcal{V}(b_{n+1}(q, \cdot))|_0^x$ при растущем n в зависимости от аналитических свойств $q(z)$.

Нами получены почти неулучшаемые по порядку при растущем n на классах потенциалов [11]

$$\Omega^0(M, R) = \left\{ q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k| R^{k+1}}{k+1} \leq M \right. \right\} \quad (17)$$

оценки величин

$$\mathfrak{B}_n^0(M, R, a) = \sup_{q \in \Omega^0(M, R)} \max_{j=0,1} \max_{x \in [-a,a]} |b_{n,j}(q, x)|. \quad (18)$$

Именно они и служат основой для доказательства теоремы 1. Оценки роста коэффициентов $b_{n,j}(q, x)$ для функций $q(z)$, аналитических в ρ -окрестности отрезка $[-a, a]$, проведены в данной работе.

Укажем несколько конкретных примеров, демонстрирующих эффективность нашего метода аппроксимации ФСР (2) уравнения (1).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$-y'' + \alpha xy = \lambda^2 y, \quad x \in [-1, 1], \quad |\alpha| \leq 1. \quad (19)$$

Покажем на основании теоремы 1, что при $\lambda \geq \hat{\lambda} = 2\sqrt{3}$ частичные суммы АР (3) с номером 68 приближают решения этого уравнения $y_0(x, \lambda)$ и $y_1(x, \lambda)$ на отрезке $[-1, 1]$ с точностью выше $4 \cdot 10^{-9}$. Возьмем $R = 11$. Тогда ближайшим целым числом к $2\hat{\lambda}(R - a) - 1$ (здесь $a = 1$) будет $\hat{N} = 68$. Для $q(x) = \alpha x$ при $|\alpha| \leq 1$ имеем $M(R) \leq R^2/2$, $M_0 \leq 1/2$. Отсюда находим, что $\sqrt{M(R)(R - a)} = R\sqrt{(R - a)/2} = 11\sqrt{5} < 24,6$, а $\hat{\lambda}(R - a) = 20\sqrt{3} > 34,64$. Поэтому при $\lambda \geq 2\sqrt{3}$ погрешность приближения ФСР (2) решений уравнений (19) частичными суммами их АР с номером 68 будет меньше

$$(8\sqrt{M(R)(R - a)/N})^{1/2} \exp(M_0/\hat{\lambda} + 2(\sqrt{M(R)(R - a)} - \lambda(R - a))) < \\ < (196,8/68)^{1/2} \exp(1/(4\sqrt{3}) - 20,08) < \exp(-19,35) < 4 \cdot 10^{-9},$$

а это и требовалось доказать.

Пример 2. Для уравнения

$$-y'' + \alpha x^2 y = \lambda^2 y, \quad x \in [-1, 1], \quad |\alpha| \leq 1, \quad (20)$$

возьмем $\hat{\lambda} = 3\sqrt{3}$, $R = 5$. Ближайшим целым числом к $2\hat{\lambda}(R - 1) - 1 = 24\sqrt{3} - 1$ будет $N = 41$. Тогда $M(R) \leq R^3/3$, $M_0 \leq 1/3$, $\sqrt{M(R)(R - a)} = \sqrt{125 \cdot 4/3} < 12,91$, $\hat{\lambda}(R - a) = 12\sqrt{3} > 20,76$. Отсюда находим, что при $\lambda \geq 3\sqrt{3}$ погрешность приближения ФСР (2) решений уравнений (20) частичными суммами их АР с номером 41 будет меньше

$$(8\sqrt{M(R)(R - a)/N})^{1/2} \exp(M_0/\hat{\lambda} + 2(\sqrt{M(R)(R - a)} - \lambda(R - a))) < \\ < (103,28/41)^{1/2} \exp(1/(9\sqrt{3}) - 15,7) < 2,7 \cdot 10^{-7}.$$

Пример 3. Уравнение

$$-y'' + \alpha x^3 y = \lambda^2 y, \quad x \in [-2, 2], \quad |\alpha| \leq 1, \quad (21)$$

рассматривается на более длинном отрезке, чем в примерах 1 и 2. На отрезке $[-2, 2]$ потенциал αx^3 при $\alpha = \pm 1$ имеет довольно большой разброс значений: от -8 до 8 . Тем не менее и в этом случае метод аппроксимации ФСР (2) уравнения (21) частичными суммами АР (3) дает удовлетворительные результаты, правда, уже при несколько больших значениях параметра λ , чем в предыдущих примерах. Положим $R = 4$. При $\alpha = \pm 1$ имеем $M(R) = R^4/4$. Следовательно,

$\sqrt{M(R)(R-a)} = 8\sqrt{2}$. Тогда, согласно теореме 1, при $N = N(\lambda)$ — ближайшее целое число к $4\lambda - 1$ — получим оценку

$$\sup_{\eta \geq \lambda} \max_{j=0,1} \max_{|x| \leq 2} |y_j(x, \eta) - S_{N,j}(x, \eta)| < (64\sqrt{2}/N)^{1/2} \exp(4/\lambda + 16\sqrt{2} - 4\lambda). \quad (22)$$

Таким образом, с ростом λ погрешность приближения ФСР (2) частичной суммой АР с номером $N(\lambda)$ убывает быстрее, чем $e \cdot \exp(-4\lambda)$. Подставляя в неравенство (22) различные значения λ , получаем, что при $\lambda \geq 6\sqrt{2}$ приближение частичной суммой с номером 33 гарантирует точность выше $8^{1/4} \exp(\sqrt{2}/3 - 11,3) < 3,4 \cdot 10^{-5}$. При $\lambda \geq 9$ частичные суммы АР с номером 35 дают точность приближения выше $4,6 \cdot 10^{-6}$, а при $\lambda \geq 10$ суммы S_{39} обеспечивают погрешность меньше $8,3 \cdot 10^{-8}$.

Во всех приведенных выше примерах результаты значительно улучшаются с уменьшением $|\alpha|$. Если рассмотреть уравнения (21) с $\alpha = \pm 1/2$, то можно взять $R = 5$. Тогда $\sqrt{M(R)(R-a)} < 15,375$ и уже при $\lambda \geq 8$ суммы S_{47} гарантируют точность приближения $(129/47)^{1/2} e^{-17} < 7 \cdot 10^{-8}$.

Пример 4. Рассмотрим уже упоминавшееся уравнение Матье

$$-y'' + \alpha y \cos x = \lambda^2 y,$$

$x \in [0, \pi]$. Заменой переменного $x - \pi/2 = z$, приведем его к виду $-y'' + \alpha y \sin z = \lambda^2 y$, $|z| \leq \pi/2$. Здесь $M(R) = |\alpha|(\operatorname{ch} R - 1)$. Вычисляя на компьютере $\min_{R > \pi/2} (\sqrt{(\operatorname{ch} R - 1)(R - \pi/2)} - \lambda R)$ и определяя $N(\lambda)$, получаем при $|\alpha| \leq 1$ следующие оценки для погрешностей приближения: при $\lambda \geq 5$ номер приближающей суммы 21, а гарантированная точность 0,00041; при $\lambda \geq 6$ 29 и $3,4 \cdot 10^{-6}$ соответственно; при $\lambda \geq 7$ 38 и $1,7 \cdot 10^{-8}$ соответственно; при $\lambda \geq 8$ 47 и $6 \cdot 10^{-11}$ соответственно.

Как и в примере 3, оценки резко улучшаются при снижении верхней границы для $|\alpha|$.

Перейдем к доказательствам сформулированных утверждений.

Доказательство теоремы 1. Проверим сначала (см. (16) — (18)), что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sup_{q \in \Omega^0(M, R)} \max_{j=0,1} \max_{|x| \leq a} |\mathcal{V}b_{n,j}(q, \cdot)|_0^x \leq \mathfrak{B}_n^0(M, R, a). \quad (23)$$

Для этого каждой функции $q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in \Omega^0(M, R)$ поставим в соответствие функцию $\mathcal{P}(q) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| z^k$. В работе [11] доказано,

что функции $b_{n,j}(q, z)$ и $b_{n,j}(\mathcal{P}(q), z)$ при любых $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1$, $q \in \mathcal{A}(|z| < R)$ аналитичны в круге $|z| < R$ и коэффициенты их разложений в степенные ряды

$$b_{n,j}(q, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n,j} z^k, \quad b_{n,j}(\mathcal{P}(q), z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,n,j} z^k$$

удовлетворяют неравенствам $|a_{k,n,j}| \leq A_{k,n,j} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}_0, j = 0, 1$. Следовательно, при любых $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1$ и $x \in [0, a]$ (при $x \in [-a, 0]$ рассуждения полностью аналогичны) находим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{V} b_{n,j}(q, \cdot) \Big|_0^x &= \int_0^x |b'_{n,j}(q, t)| dt = \int_0^x \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n,j} k t^{k-1} \right| dt \leq \\ &\leq \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k,n,j}| k t^{k-1} \right) dt \leq \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} A_{k,n,j} k t^{k-1} dt \leq \int_0^a b'_{n,j}(\mathcal{P}(q), t) dt = \\ &= b_{n,j}(\mathcal{P}(q), a) - A_{0,n,j} \leq b_{n,j}(\mathcal{P}(q), a); \end{aligned} \quad (24)$$

здесь мы существенно использовали неотрицательность чисел $A_{k,n,j}$. Поскольку отображение $q \mapsto \mathcal{P}(q)$ сохраняет норму (7), то справедливо включение $\mathcal{P}(q) \in \Omega^0(M, R)$. Отсюда по определению величин \mathfrak{B}_n^0 получаем, что $b_{n,j}(\mathcal{P}(q), a) \leq \mathfrak{B}_n^0(M, R, a)$, а это вместе с (24) приводит к (23). Неравенства (23) и (16) влекут за собой в свою очередь справедливость оценки

$$\begin{aligned} \sup_{q \in \Omega^0(M, R)} \max_{j=0,1} \max_{x \in [-a, a]} |\varphi_{n,j}(q, x, \lambda)| &\leq \\ &\leq 4 \exp(M_0/\lambda) \mathfrak{B}_{n+1}^0(M, R, a) / \lambda^{n+1}. \end{aligned}$$

Так как правая часть неравенства убывает по λ , то получаем оценку невязок при приближении решений $y_j(x, \lambda)$ суммами (6), равномерную по спектральному параметру $\eta \in [\lambda, +\infty)$:

$$\begin{aligned} \sup_{q \in \Omega^0(M, R)} \sup_{\eta \geq \lambda} \max_{j=0,1} \max_{x \in [-a, a]} |\varphi_{n,j}(q, x, \eta)| &\leq \\ &\leq 4(M_0/\lambda) \mathfrak{B}_{n+1}^0(M, R, a) / \lambda^{n+1}. \end{aligned}$$

Подставив в эту оценку доказанное в работе [11] неравенство

$$\mathfrak{B}_n^0(M, R, a) < (n! e^{2u} / (2(R-a))^{n+1}) \sqrt{u/(4\pi)},$$

где $u = \sqrt{M(R-a)}$, и обозначив $p = 2\lambda(R-a)$, заключаем, что при любых $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathfrak{Q}^0(M, R)$, $\eta \geq \lambda$, $j = 0, 1$

$$\max_{|x| \leq a} |\varphi_{n,j}(q, x, \eta)| \leq (2n!/p^{n+1}) \sqrt{u/\pi} \exp(2u + M_0/\lambda). \quad (25)$$

Для доказательства теоремы 1 осталось установить, что если взять $n = N(\lambda)$, где $N(\lambda)$ — ближайшее целое число к $2\lambda(R-a) - 1 = p - 1$, то правая часть неравенства (25) будет меньше правой части неравенства (8). В силу именно такого выбора $N(\lambda)$ мы фактически минимизируем по n выражение $p^{-n-1}n!$. Обозначим $m = N(\lambda) + 1$. Тогда $p = m + \alpha$, где $|\alpha| \leq 1/2$. Имеем

$$\frac{N!p^{-N-1}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{(m-1)!p^{-m}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-p}}{\sqrt{m-1}} \left(\frac{m!e^m}{m^m} \right) \left(\frac{m}{p} \right)^m e^{p-m} \frac{\sqrt{m-1}}{\sqrt{2\pi m}}. \quad (26)$$

Нетрудно проверить, что при всех $m \geq 1$ справедливо неравенство $m!e^m/m^m < \sqrt{2\pi(m+1/2)}$. Поэтому из (26) находим, что

$$\begin{aligned} \frac{N!p^{-N-1}}{\sqrt{2\pi}} &\leq \frac{e^{-p}}{\sqrt{m-1}} \sqrt{\frac{(m+1/2)(m-1)}{m^2}} \left(\frac{m}{p} \right)^m e^{p-m} = \\ &= \frac{e^{-p}}{\sqrt{m-1}} \sqrt{1 - \frac{1}{2m} - \frac{1}{2m^2}} \left(\frac{m+\alpha}{m} \right)^{-m} e^{\alpha}, \end{aligned}$$

откуда, поскольку

$$e^{\alpha} \left(\frac{m+\alpha}{m} \right)^{-m} = \exp \left(\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \alpha^{\nu}}{\nu m^{\nu-1}} \right) \leq \exp \left(\frac{1}{m} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{2^{-\nu}}{\nu} \right) \leq \exp \left(\frac{1}{4m} \right),$$

получаем

$$\frac{N!p^{-N-1}}{\sqrt{2\pi}} < \frac{e^{-p}}{\sqrt{m-1}} \sqrt{1 - \frac{1}{2m}} \exp \left(\frac{1}{4m} \right) < \frac{e^{-p}}{\sqrt{m-1}} = \frac{e^{-p}}{\sqrt{N}}. \quad (27)$$

Принимая во внимание неравенство (27) заключаем, что при $n = N(\lambda)$ правая часть (25) меньше правой части неравенства (8), а это доказывает теорему 1.

Доказательство теоремы 2. Установим сначала, что если потенциал q удовлетворяет ограничению (9), то при любых $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\max_{j=0,1} \max_{x \in [-a,a]} |b'_{n,j}(q, x)| \leq ((n+1)M_1/4)(n/(2\rho))^n \exp(M_1\rho). \quad (28)$$

Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Рассмотрим пространства $U_{n,k}$, $0 \leq k \leq n-1$, состоящие из функций, аналитических в $\mathcal{O}(\rho(1-k/n), [-a, a])$, для которых конечна норма $W_{n,k}(f) = \sup_{z \in U_{n,k}} |f(z)|$.

Из условия (9) и (4) находим, что $W_{n,0}(b_{1,j}(q, \cdot)) \leq M_1/4$, $j = 0, 1$, а норма интегрального оператора $J_q f(z) = \int_0^z q(t)f(t) dt$ из пространств U_{n,k_1} в U_{n,k_2} , $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$, не превосходит M_1 .

Из (4) вытекает представление $b_{n,j}(q, z)$ в операторной форме

$$b_{n,j}(q, z) = 2^{-n-1} \prod_{k=2}^n (D_{(-1)^{k+j+1}} + J_q) \int_0^z q(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (29)$$

где $D_1 f(z) = f'(z) + f'(0)$, $D_{-1} f(z) = f'(z) - f'(0)$, с учетом которого получаем

$$W_{n-1,n}(b_{n+1,j}(q, \cdot)) \leq M_1 \cdot 2^{-n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \|D_{(-1)^{k+j+1}} + J_q\|_k;$$

здесь под $\|\cdot\|_k$ понимается норма оператора из пространства $U_{n,k-1}$ в $U_{n,k}$.

Норма J_q была оценена выше, а так как норма оператора дифференцирования из $H^\infty(G_1) \rightarrow H^\infty(G_2)$, $G_2 \subset G_1$, не превосходит $1/d$, где d — расстояние от границы области G_2 до границы области G_1 , то приходим к оценкам

$$\|D_{\pm 1} + J_q\|_k \leq M_1 + (n/\rho)(1 + 1/(n-k+1)). \quad (30)$$

Отсюда и из (29) находим, что

$$\begin{aligned} W_{n,n-1}(b_{n,j}(q, \cdot)) &= \sup_{z \in \mathcal{O}(\rho/n, [-a, a])} |b_{n,j}(q, z)| \leq \\ &\leq \frac{M_1}{2^{n+1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(M_1 + \frac{n}{\rho} \left(1 + \frac{1}{n-k-1} \right) \right) = \frac{M_1}{4} \left(\frac{n}{2\rho} \right)^{n-1} \prod_{s=2}^n \left(1 + \frac{1}{s} + \frac{M_1 \rho}{n} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Оценим сверху последнее произведение в соотношении (31). Так как $(1+x/n)^n \leq e^x$ при любых $x > 0$ и $1+t_1+t_2 < (1+t_1)(1+t_2)$ при любых положительных t_1 и t_2 , то получаем, что

$$\prod_{s=2}^n \left(1 + \frac{1}{s} + \frac{M_1 \rho}{n} \right) < \prod_{s=2}^n \left(1 + \frac{1}{s} \right) \prod_{s=2}^n \left(1 + \frac{M_1 \rho}{n} \right) <$$

$$< \exp(M_1 \rho) \prod_{s=2}^n \left(1 + \frac{1}{s}\right) = \frac{n+1}{2} \exp(M_1 \rho). \quad (32)$$

Тогда находим, что

$$\sup_{z \in \mathcal{O}(\rho/n, [-a, a])} |b_{n,j}(q, z)| < ((n+1)M_1/8)(n/(2\rho))^{n-1} \exp(M_1 \rho).$$

Отсюда и из упомянутой выше оценки нормы оператора дифференцирования вытекает (28). Заменяя в (28) n на $n+1$, получаем, что

$$4Vb_{n+1}(q, \cdot)|_0^x / \lambda^{n+1} \leq (n+2)|x|M_1((n+1)/(2\rho\lambda))^{n+1} \exp(M_1 \rho). \quad (33)$$

Теперь положим в (33) $n = N(\lambda) = [2\lambda\rho/e] - 1$. Тогда при любых $x \in [-a, a]$ из (33) находим, что

$$\begin{aligned} 4Vb_{n+1}(q, \cdot)|_0^x / \lambda^{n+1} &\leq (N(\lambda) + 2)aM_1 e^{-n-1} \exp(M_1 \rho) \leq \\ &\leq (2\lambda\rho/e + 1)aM_1 \exp(M_1 \rho - [2\lambda\rho/e]) < (2\lambda\rho + e)aM_1 \exp(M_1 \rho - 2\lambda\rho/e). \end{aligned}$$

Отсюда и из (16) следует утверждение теоремы 2.

Литература

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1977.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы. М., 1973.
3. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. Введение в теорию. М., 1973.
4. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.
5. Birkhoff G. D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. Vol. 9. P. 219 — 231.
6. Кравицкий А. О., Лидский В. Б. // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 4. С. 748 — 759.
7. Садовничий В. А., Подольский В. Е. // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 1. С. 133 — 148.
8. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. С. 593 — 596.
9. Шкарин С. А. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1996. № 1. С. 39 — 44.
10. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М., 1990.
11. Садовничий В. А., Попов А. Ю. // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 2. С. 280 — 284; № 3. С. 403 — 410.