

УДК 531.36

## Тестирование точности стабилизации стохастических управляемых систем<sup>1</sup>

В. А. Садовничий, В. В. Александров, С. С. Лемак

### Аннотация

Рассмотрена постановка задачи тестирования точности стабилизации положения равновесия управляемой стохастической системы, когда часть параметрических и постояннодействующих возмущений известна с точностью до множества. Сформулированы условия нахождения отличного результата задачи тестирования и оптимальной контрстратегии. Приведен пример тестирования качества системы активной магнитной стабилизации тангажных колебаний искусственного спутника Земли.

### Постановка задачи тестирования

Одним из возможных подходов к задаче тестирования точности управления, в частности, точности стабилизации программных движений управляемой системы является получение гарантированных показателей работы алгоритма управления (стабилизации), ориентированных на возможное наихудшее поведение параметрических и постояннодействующих возмущений, мешающих стабилизации. Такой подход реализован в работе [1], где основой стратегии тестирования точности является постановка, решение максиминных задач и ее использование для проведения тестирования.

В данной работе этот подход расширен на случай, когда для части возмущений известно статистическое описание, а именно они могут быть представлены стационарными случайными процессами с известной (заданной) спектральной плотностью. Как известно, в этом случае эти возмущения могут быть смоделированы выходом линейной стохастической системы, входные воздействия которой представляют

---

<sup>1</sup> «Дифференциальные уравнения», Минск, 1999, 35, № 5, С. 1–8

собой белый шум с заданной интенсивностью [2], поэтому не снижая общности, можно считать, что случайные возмущения, действующие на систему моделируются векторным белым шумом с известной матрицей интенсивности. Как будет показано ниже, в этом случае методика тестирования [1] приводит к игровым задачам для дисперсионных уравнений стохастической системы в отклонениях от желаемого движения или желаемого стационарного положения системы.

Пусть уравнения движения управляемой системы представлены уравнениями

$$\dot{y} = \tilde{f}(y, w, v, \xi), \quad (1)$$

где  $w$  — вектор управляющих сигналов  $w(\cdot) \in \tilde{Q} = \{w(\cdot) \in KC \mid w(t) \in \Omega \subset R^s\}$ ;  $v$  — вектор возмущений, оказывающих негативное влияние на точность стабилизации  $v(t) \in V \subset R^l$ ;  $\xi$  — вектор случайных возмущений, моделируемых белым шумом:  $M[\xi(t)] \equiv 0$ ,  $M[\xi(t)\xi^T(t)] = F(t)$ , где  $F(t)$  — неотрицательно определенная симметричная матрица,  $M$  — операция взятия математического ожидания.

Рассмотрим нелинейную систему уравнений в отклонениях  $x = y - \tilde{y}$  от желаемого движения  $\tilde{y}(t)$  из заданного множества траекторий  $Y = \{\tilde{y}(t) \in Y^0 \subset R^n, t_0 \leq t \leq t_k\}$

$$\dot{x} = f(x, v, u, \xi), \quad (2)$$

где  $u = w - \tilde{w}$  — оставшиеся ресурсы по управлению для решения задачи стабилизации. Обычно управляющие сигналы формируются как функции времени и оценок отклонений  $\hat{x}$ :  $u = u(t, \hat{x})$ .

Пусть  $J(u, v)$  — критерий точности стабилизации. Например, в качестве критерия точности можно выбрать

$$J = M[x(t_k)^T S x(t_k) + \int_0^{t_k} (x^T G x + u^T N u) dt], \quad (3)$$

где  $S, G$  неотрицательно определенные симметричные матрицы,  $N$  — положительно определена.

Что касается вектора возмущений  $v$ , то в случае тестирования можно предположить наличие зависимости вектор-функции  $v$  от отсаих отклонений и значений управления:  $v = v(t, x, u)$ .

Таким образом (предполагая, что решение задачи существует) имеем задачу на  $\max \min$  с определенной дискриминацией для управления

$$\max_{u \in U} J(u, v) \rightarrow \min_{v \in V}. \quad (4)$$

В этом случае в соответствии с теоремой Н.Н. Красовского [3] соответствующая дифференциальная игра имеет седловую точку

$$\max_u \min_v J(u, v) = \min_u \max_v J(u, v) = J^0(u^0, v^0). \quad (5)$$

Ее наличие позволяет ввести понятие наилучшего результата функционирования алгоритмов стабилизации.

Сама процедура тестирования в этом случае сводится к последовательному выполнению двух шагов:

1-й шаг. После представления данных о множестве возмущений  $V$  и интенсивности случайных воздействий  $F(t)$  решается динамическая игра (5), что позволяет найти седловую точку (отличный результат) и оптимальную контрстратегию  $v^0(t, x, u)$ .

2-й шаг. Происходит процедура тестирования: на вход системы (2) подаются сигналы управления  $u^r$ , вырабатываемые тестируемым алгоритмом стабилизации, а также наихудшие возмущения  $v^0(t, x, u^r)$ . Проведя статистическое моделирование системы (2), вычисляем реальные значения функционала качества  $\varphi_0(u^r, v^0)$ . Данное значение сравнивается с отличным результатом  $\varkappa = \frac{J(u^r, v^0)}{\varphi_0(u^0, v^0)} \vee 1$ , что позволяет судить о точности алгоритма стабилизации  $u^r$ .

Рассмотрим первый этап методики тестирования — получение отличного результата и оптимальной контрстратегии.

### **Формирование оптимальной контрстратегии и вычисление отличного результата тестирования**

Рассмотрим случай, когда уравнения в отклонениях (2) от желаемого движения управляемой системы могут иметь вид

$$\dot{x} = A(t, p)x + B(t, p)u + C(t, p)q + D(t, p)\xi \quad (6)$$

где  $\xi$  — векторный белый шум с известной матрицей интенсивности  $F(t) \geq 0$ ,  $M[\xi(t)\xi^\top(t')] = F(t)\delta(t - t')$ ;

$M[x(0)] = e_0$  — математическое ожидание отклонений  $x(0)$ , а

$M[\overset{\circ}{x}(0)\overset{\circ}{x}^\top(0)] = P_0$  — их матрица ковариаций;

$p$  и  $q$  — компоненты вектора возмущений  $v = \{p, q\}$ . Подвектор  $p$  описывает параметрические возмущения, действующие на управляемую систему. Будем считать, что возмущения  $p$  постоянны во времени и принадлежат известному множеству  $p \in W \subset R^k$ . Остальную часть возмущений  $q$  считаем произвольными кусочно-непрерывными

функциями, принимающими любые значения из заданного множества  $q(t) \in Q$ .

Так, например, в задаче магнитной стабилизации, параметрические возмущения  $p$  представляют собой погрешности выставки приборной системы координат спутника, а возмущения  $q(t)$  представляют паразитные моменты, возникающие из-за собственной намагниченности спутника.

Для вспомогательной системы (6) сформулируем условия решения задачи

$$\max_{p \in W} \min_{q \in Q} \min_{u \in U} J(p, q, u)$$

что позволит найти наилучший (отличный) результат и оптимальную контрстратегию  $p^0, q^0$ . В процессе решения этой задачи определим вспомогательный алгоритм стабилизации  $u^0$ , который находится из решения внутренней задачи на минимум, и при котором достигается наилучшая точность стабилизации.

В случае полной и точной информации об отклонениях  $x$  вспомогательное оптимальное управление  $u^0$  имеет вид линейной обратной связи по отклонениям  $u^0 = K(t)x$ .

В случае неполной информации об отклонениях вспомогательный алгоритм стабилизации формируется по оценкам отклонений  $\tilde{x}$ , вырабатываемым системой оценивания по информации от измерителей, которая представлена вектором измерений  $z = Hx + H_1q + \eta$ , где  $\eta$  — инструментальные погрешности измерителей, описываемые процессом типа белого шума [2]. Алгоритм оценивания имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A(t, p)\tilde{x} + B(t, p)u + C(t, p)q + \tilde{K}(z - H\tilde{x}), \\ z &= Hx + H_1q + \eta \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\tilde{x}$  — оценка  $x$ ;  $\tilde{K}(t)$  — матрица усиления в алгоритме оценивания.

Стабилизирующее отклонение ищем в виде  $u = K\tilde{x}$ , где  $\tilde{x}$  — оценки отклонений, определяемые алгоритмом оценивания (7).

Обозначим  $\Delta x = x - \tilde{x}$  — ошибку оценки отклонений,  $P_{\Delta x} = M[\Delta \overset{\circ}{x}, \Delta \overset{\circ}{x}^T]$ ,  $\Delta \overset{\circ}{x} = \Delta x - e_{\Delta x}$ ,  $e_{\Delta x} = M[\Delta x]$ , а  $R(t)$  — ковариационную матрицу ошибок измерений  $R(t) = M[\eta\eta^T]$ , которая предполагается известной.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема.** *Отличный результат  $J^0$  и оптимальная контрстратегия системы тестирования  $\{p^0, q^0\}$  находятся из решения экстремальной задачи*

$$J^0(p, q) = \text{Tr}[\mathcal{L}(0)P_0 + \int_0^{t_k} (\mathcal{L}D^\top FD + \mathcal{L}BN^{-1}B^\top \mathcal{L}P_{\Delta x})dt] + \\ + e_x^\top(t_k)Se_x(t_k) + \int_0^{t_k} (e_x^\top Ge_x + e_{\tilde{x}}^\top K N K^\top e_{\tilde{x}})dt \rightarrow \max_{p \in W, q \in Q} \quad (8)$$

при условиях:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= A(p)e_x + B(p)K e_{\tilde{x}} + Cq(t) \\ \dot{e}_{\tilde{x}} &= (A(p) + B(p)K)e_{\tilde{x}} + Cq(t) + \tilde{K}(He_x - He_{\tilde{x}}) + \tilde{K}H_1q, \\ K &= -N^{-1}B^\top \mathcal{L}, \quad \tilde{K} = P_{\Delta x}H^\top R^{-1}, \\ \dot{\mathcal{L}} &= -\mathcal{L}A(p) - A^\top(p)\mathcal{L} - G + \mathcal{L}B(p)N^{-1}B^\top(p)\mathcal{L}, \\ \dot{P}_{\Delta x} &= A(p)P_{\Delta x} + P_{\Delta x}A^\top(p) + D^\top FD - \tilde{K}R\tilde{K}^\top, \\ \mathcal{L}(t_1) &= S, \quad P_{\Delta x}(0) = P_0, \quad e_x(0) = e_0, \quad e_{\tilde{x}}(0) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

**Доказательство.** Отличный результат является решением задачи

$$J^0 = \max_{p \in W, q \in Q} \min_{u \in U} J(p, q, u), \quad (10)$$

где  $u = K\tilde{x}$ . В силу теоремы разделения [6] задача поиска отличного результата (10) для системы (6,7) может быть сформулирована в виде

$$J_0^0 = \max_{p, q} J^0(p, q), \quad \text{где} \\ J^0(p, q) = \min_{K, \tilde{K}} M[x(t_k)^\top Sx(t_k) + \int_0^{t_k} (x^\top Gx + u^\top Nu)dt]. \quad (11)$$

Здесь  $K, \tilde{K}$  — матрицы обратных связей в задачах оптимальной стабилизации и оценивания.

В случае  $q \equiv 0$  решение задачи оптимальной стабилизации (внутренней задачи на минимум) сводится к задаче о выборе линейного стохастического регулятора при неполных измерениях по квадратичному критерию.

Рассмотрим общий случай  $q \neq 0$ .

Предположим сначала наличие полной информации об отклонениях  $x$ . Пусть управление задано в виде линейной обратной связи  $u = Kx$ . Критерий качества (3) можно переписать в виде

$$J = \text{Tr}[SP_x(t_k) + \int_0^{t_k} (GP_x + K^\top NKP_x)dt], \quad (12)$$

где  $P_x$  — матрица вторых моментов  $P_x = M[xx^\top]$ .  $\text{Tr}$  — операция взятие следа матрицы.  $\text{Tr} \|a_{ij}\| = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  — сумма диагональных элементов.

Матрица  $P_x$  удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} \dot{P}_x &= (A + BK)P_x + P_x(A + BK)^\top + Cq e_x^\top + e_x(Cq)^\top + D^\top F D, \\ P_x(0) &= P_x^0. \end{aligned} \quad (13)$$

Стохастическая задача поиска минимума функционала (3) сводится к детерминированной экстремальной задаче

$$J^0 \rightarrow \min_K J$$

при условии (13). В этой задаче элементы матрицы  $K$  рассматриваются как управления, а элементы матрицы  $P_x$  — фазовые координаты размерности  $(\frac{n(n+1)}{2})$ . Из решения экстремальной задачи следуют соотношения для оптимальных коэффициентов стабилизации  $K$ :

$K = -N^{-1}K\mathcal{L}$ , где  $\mathcal{L}$  симметричная матрица, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}A + A^\top \mathcal{L} + G - \mathcal{L}BN^{-1}B^\top \mathcal{L} = 0, \quad \mathcal{L}(t_k) = S. \quad (14)$$

Перепишем формулу (12) при оптимальных значениях матрицы усиления  $K$ . Поскольку  $P_x = P + e_x e_x^\top$ , где  $P = M[\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}^\top]$ ,  $\overset{\circ}{x} = x - e_x$ ,  $e_x = M[x(t)]$ , и  $e_x$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{e}_x = (A + BK)e_x + Cq, \quad (15)$$

то из выражения (12) следует

$$\begin{aligned} J^0 &= \text{Tr}[SP_x(t_k) + \int_0^{t_k} (GP_x + K^\top NKP_x)dt] = J_1^0 + J_2^0, \quad \text{где} \\ J_1^0 &= \text{Tr}[SP(t_k) + \int_0^{t_k} (GP + K^\top NKP)dt], \\ J_2^0 &= e_x^\top S e_x + \int_0^{t_k} e_x^\top (G + K^\top N K) e_x dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Преобразуем первое слагаемое

$$\begin{aligned} J_1^0 &= \text{Tr}[SP(t_k) + \int_0^{t_k} (GP + K^\top NKP)dt + \int_0^{t_k} \dot{\mathcal{L}}P + \dot{P}\mathcal{L}dt - \\ &\quad - \int_0^{t_k} \frac{d\mathcal{L}}{dt}dt] = \text{Tr}[\mathcal{L}(0)P(0)] + \text{Tr}[\int_0^{t_k} D^\top F D \mathcal{L} dt]. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь использовалось  $\mathcal{L}(t_k) = S$ ,  $-\int_0^{t_k} \frac{d\mathcal{L}}{dt} dt = -\mathcal{L}(t_k)P(t_k) + \mathcal{L}(0)P(0)$  и уравнения (13), (15), (14).

В случае неполной информации об отклонениях стабилизирующее отклонение ищем в виде  $u = K\tilde{x}$ , где  $\tilde{x}$  — оценки отклонений, определяемые алгоритмом оценивания (7). Заметим, что  $e_{\Delta x} = e_x - e_{\tilde{x}}$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= A(e_x + BK)e_{\tilde{x}} + Cq(t) \\ \dot{e}_{\tilde{x}} &= (A + BK)e_{\tilde{x}} + Cq(t) + \tilde{K}(He_x - He_{\tilde{x}}) + \tilde{K}H_1q\end{aligned}$$

Оптимальные коэффициенты усиления оценщика находятся из уравнений [2]:

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= P_{\Delta x}H^{\top}R^{-1}, \\ \dot{P}_{\Delta x} &= AP_{\Delta x} + P_{\Delta x}A^{\top} + D^{\top}FD - \tilde{K}R\tilde{K}^{\top}, \quad P_{\Delta x}(0) = P^0.\end{aligned}\quad (18)$$

Как и в предыдущем случае можно провести преобразование функционала, аналогичные (16) и (17), откуда и следует утверждение теоремы. ■

Первое слагаемое в  $J^0$  не зависит от  $q(t)$  и решение задачи (8)  $J_0^0 = J(p^0, q^0)$  получим методом последовательных приближений.

При фиксированных  $p \in P$  задача поиска  $\max_{q(t) \in Q} J^0$  сводится к задаче экстремального управления по  $q(t)$  линейной системой

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= A(p)e_x + B(p)K e_{\tilde{x}} + Cq(t) \\ \dot{e}_{\tilde{x}} &= (A(p) + B(p)K)e_{\tilde{x}} + Cq(t) + \tilde{K}(He_x - He_{\tilde{x}}) + \tilde{K}H_1q\end{aligned}\quad (19)$$

с квадратичным критерием качества

$$J_2^0 = e_x^{\top} S e_x + \int_0^{t_k} (e_x^{\top} (G + K^{\top} N K) e_x) dt. \quad (20)$$

Ее решение может быть получено, например, методом последовательных приближений Крылова-Черноустько [7]. На следующем шаге, после определения  $q(t)$ , задача поиска  $\max_{p \in W} J^0$  представляет собой задачу нелинейного программирования по параметрам  $p \in P$ , которая может быть решена подходящим численным методом.

### Тестирование точности алгоритма стабилизации

На втором шаге стратегии тестирования происходит собственно тестирование некоторого алгоритма стабилизации  $u^r$ , используя полученные результаты на первом шаге процедуры тестирования. При

этом сам алгоритм  $u^r$  тестируемой системе может быть неизвестен, т.е. для системы тестирования он представляет собой «черный ящик» с известными входом и выходом.

Процедура тестирования требует проведения статистических испытаний для системы уравнений в отклонениях (2) и вычисления критерия качества (3) статистическим путем. Для этого при известных  $p^0$  и  $q^0(t)$  интегрируется система (2), для чего моделируются шумы в системе  $\xi$  и показания датчиков, используемых алгоритмом стабилизации  $u^r$  на входе. На выходе «черного ящика» получаем управляющие сигналы  $u^r$  и замыкаем систему (2). После статистической обработки результатов интегрирования вычисляем статистическое среднее точности стабилизации тестируемого алгоритма  $J^0(p^0, q^0(t), u^r)$  и сравниваем его с полученным на первом шаге отличным результатом  $J_0^0$

$$\kappa = \frac{J^0(u^r)}{J_0^0},$$

что позволяет судить о качестве алгоритма стабилизации  $u^r$ .

### Пример решения задачи тестирования

Рассмотрим пример вычисления оценки точности стабилизации на модельной задаче стабилизации канала тангажных колебаний спутника, движущегося по круговой полярной орбите.

Для простоты считаем, что напряженность магнитного поля Земли складывается из поля  $\vec{T}$ , заданного прямым диполем и флуктуационной составляющей  $\Delta\vec{T}$ . Пусть спутник движется равномерно по круговой полярной орбите. Обозначим  $Oy_1y_2y_3$  — оси орбитальной системы координат.

Магнитный момент  $M^a$ , создаваемый рамкой с током, представим в виде  $M^a = M_u^0 * u$ , где  $u = \{1, 0, -1\}$  — управление.

Обозначим  $Ox$  — оси системы координат, связанной с главными осями инерции спутника. Поворот системы  $Ox$  относительно орбитальной  $Oy$  зададим углом  $\alpha$ . Система  $Oz$  связана с приборным трехгранником спутника. Она повернута относительно  $Ox$  на угол  $\delta_0 + \delta$ , где  $\delta_0$  — расчетное значение угла поворота, а  $\delta$  — погрешность реализации приборной системы.

Уравнение тангажных колебаний спутника можно записать в виде

$$B\ddot{\alpha} + 3\omega_0^2(A - C) \sin \alpha \cos \alpha = M^a + M^b + \Delta M_\xi$$

Здесь  $A, B, C$  — моменты инерции спутника,  $M^a M^b$  — управляющий и возмущающий магнитные моменты,  $\Delta M_\xi$  — возмущающие момен-



ты сторонних сил. Пусть  $\Delta T_y = (\tilde{\Delta}_1, 0, \tilde{\Delta}_3)$  проекции возмущений напряженности магнитного поля Земли на оси  $Oy$ . Обозначим  $I_\sigma = (n_1, 0, n_3)$  проекции магнитного момента на оси связанной системы  $Ox$ , вызванного собственной намагниченностью спутника. Будем считать, что на спутнике установлена одна рамка с током, магнитный момент которой ориентирован по оси  $z_3$ . Тогда управляющий момент равен

$$M^a = 0.5M_u^0 u [2e_0 \tilde{\Delta}_1 \cos(\alpha + \delta_0 + \delta) - 2e_0 \tilde{\Delta}_3 \sin(\alpha + \delta_0 + \delta) - B_0(3 \sin(\alpha + \delta_0 + \delta - \tau) + \sin(\alpha + \delta_0 + \delta + \tau))], \quad (21)$$

где  $B_0 = \mu_0 H_0 / r_0^3$ ,  $H_0$  - магнитный момент диполя Земли,  $\mu_0$  - коэффициент магнитной проницаемости,  $r_0$  - радиус орбиты спутника.

Возмущающий момент равен

$$M^b = B_0 M_u^0 [\sigma_3(\Delta_1 + \sin \tau) + \sigma_1(-\Delta_3 - 2 \cos \tau) + \alpha(\sigma_1(-\Delta_1 - \sin \tau) + \sigma_3(-\Delta_3 - 2 \cos \tau))]$$

С точностью до линейных членов по  $\alpha$  уравнения колебаний в безразмерном виде следующие:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + (b^2 - b_{50}\sigma_1 - b_{60}\sigma_3 + b_{20}u)\alpha = & u[b_{00} + b_{21}\delta] + \sigma_1 b_{31} + \\ & + \sigma_3 b_{41} + \xi_1 + \Delta_1[u(b_{70}u + b_{71}(\delta + \alpha)) + b_{40}\sigma_3] + \\ & + \Delta_3[u(b_{80}u + b_{81}(\delta + \alpha)) + b_{80}\sigma_1], \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$b^2 = 3 \frac{A - C}{B}, \quad \xi_1 = \frac{\Delta M_\xi}{B \omega_0^2}, \quad b_{00} = M_0 \left( -\frac{3}{2} \sin(\delta_0 - \tau) + \frac{1}{2} \sin(\delta_0 + \tau) \right),$$

$$b_{20} = M_0 \left( \frac{3}{2} \cos(\delta_0 - \tau) + \frac{1}{2} \cos(\delta_0 + \tau) \right), \quad b_{30} = -M_0, \quad b_{40} = M_0,$$

$$b_{50} = M_0 \sin \tau, \quad b_{60} = 2M_0 \cos \tau, \quad b_{70} = M_0 \cos \delta_0, \quad b_{80} = -M_0 \sin \delta_0,$$

$$b_{21} = -M_0 \left( \frac{3}{2} \cos(\delta_0 - \tau) + \frac{1}{2} \cos(\delta_0 + \tau) \right),$$

$$b_{31} = -2M_0 \cos \tau, \quad b_{41} = M_0 \sin \tau, \quad b_{71} = -M_0 \sin \delta_0, \quad b_{81} = -M_0 \cos \delta_0,$$

а  $\tau = \omega_0 * t$ ,  $M_0 = \frac{M_u^0 B_0}{\omega_0^2 B}$ ,  $\Delta_i = \frac{\mu_0 \tilde{\Delta}_i}{B_0}$ ,  $\sigma_i = \frac{n_i}{M_u^0}$  - безразмерные переменные.

Для мексиканского спутника «Satex» на орбите  $r_0 = 800$  км. и активным магнитным моментом  $M_u^0 = 4 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ , параметры  $M_0 = 1.519$ ,  $b^2 = 2.936$ .

Обозначим:  $p = \delta$ ,  $q_1 = \sigma_1$ ,  $q_2 = \sigma_3$ ,  $\xi_1 = \frac{\Delta M_\xi}{B\omega_0^2}$ ,  $\xi_2 = \Delta_1$ ,  $\xi_3 = \Delta_3$ ,  
 $x = (\alpha, \dot{\alpha})$ ,  $q = (q_1, q_2)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ .

С точностью до  $\alpha\Delta_i$ ,  $\delta\Delta_i$ ,  $\alpha\sigma_i\Delta_i$  уравнение (22) можно переписать в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t, p)u + C(t)q + D(t)\xi, \quad (23)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{00} + b_{20}p \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{31} & b_{41} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{10} & b_{20} & b_{70} & b_{80} \end{pmatrix}, \quad M[\xi_4^2] = D_0 e^{-\gamma t}.$$

Параметры  $D_0$  и  $\gamma$  подбираются таким образом, чтобы решение вспомогательной системы (23) на интервале  $[0, t_k]$  мало отличалось от решения нелинейной системы в отклонениях (22).

Будем считать, что неточность реализации приборного трехгранника  $p \in W$  - принадлежит известному отрезку, а компоненты вектора  $q(t)$  — произвольные функции времени, известные с точностью до множества  $q(t) \in Q$ . Компоненты вектора  $\xi$  считаем независимыми белыми шумами с интенсивностями  $\tilde{F}_i$ .

На первом этапе тестирования задачу (8) поиска отличного результата будем решать методом последовательных приближений. Для простоты будем считать, что нам известна полная информация о векторе состояния  $x$ . При заданных  $p$  решение внутренней задачи на минимум по  $K(p)$  находим из уравнений Риккати (9).

Наихудшие возмущения  $q^0(t)$  получаем из решения линейной задачи (19) с квадратичным критерием качества (20)

На рис. 1 показана зависимость критерия качества  $J^0(p, q^0)$  от  $p$  при следующих исходных данных

$$t_1 = 12, \quad \tilde{F}(1, 1) = 0.1, \quad \tilde{F}(2, 2) = 0.5, \quad \delta_0 = 0.7, \quad |q_1(t)| \leq 0.1, \quad |q_2(t)| \leq 0.1,$$

$$N = 1, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Наихудшее возмущение  $p^0 = -0.7$  соответствует такому расположению рамки с током, что ее магнитный момент направлен по оси  $x_3$ . Как следует из рис. 1 размещение рамки перпендикулярно  $x_3$  выгоднее с точки зрения точности стабилизации тангажных колебаний.

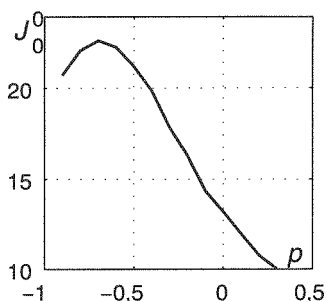


Рис. 1

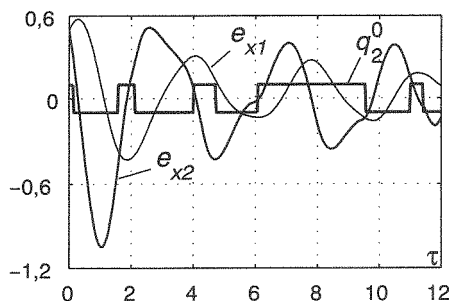


Рис. 2

На рис. 2 показан вид наихудшего возмущения  $q_1^0(t)$  для оптимального  $p^0 = -0.7$  и поведение математических ожиданий угла поворота спутника  $e_{x1}$  и его угловой скорости  $e_{x2}$ .

На втором этапе тестирования были проведены статистические испытания алгоритма стабилизации колебаний  $u^r = -\text{sign}[(b_{00} + b_{12}p)\dot{\alpha}]$ , рассматриваемого в работе [5].

На рис. 3 представлена зависимость выборочного среднего значения критерия качества (3) и его терминальной части соответствующих управлению  $u^r$  от количества испытаний  $k$ . Видно,

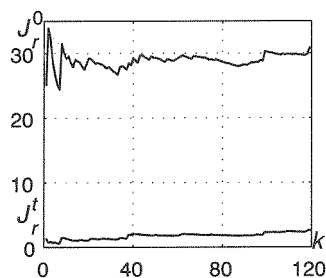


Рис. 3

что для получения стабильной статистической оценки функционала нужно провести порядка 60-80 испытаний.

Также были проведены и статистические испытания алгоритма управления  $u^0 = K(p^0)x$ , полученного на первом этапе при поиске отличного результата.

На рис. 4 представлены зависимости от времени элементов матриц ковариаций вектора состояния  $P_{ij}^0$  при оптимальном управлении  $u^0$  (жирные линии) и значения ковариаций  $P_{ij}^r$  при тестируемом управлении  $u^r$  (тонкие линии).

В таблице 1 показаны результаты испытаний: в первой строке выборочные средние  $m_J$ , выборочные дисперсии  $\sigma_J$  и соответствующие им доверительные интервалы  $I_m, I_\sigma$  (с доверительной вероятностью  $p_\alpha = 0.95$ ) для отличного результата  $J_0^0$  критерия (3), соответству-

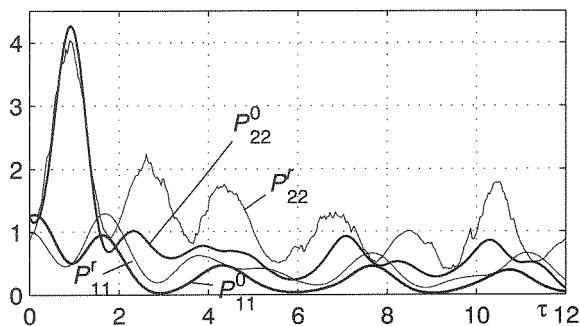


Рис. 4

ющего управлению  $u^0$ .

Вторая строка представляет результаты статистических испытаний для функционала качества  $J_r^0$ , соответствующего тестируемому управлению  $u^r$ .

Последние две строки таблицы — аналогичные значения для терминальной части функционала (3).

Таблица 1

J	$m_J$	$\sigma_J$	$I_m(0.05)$	$I_\sigma(0.05)$
$J_0^0$	19.8	1.037	19.63-20.01	0.92-1.188
$J_r^0$	29.84	2.05	29.47-30.21	1.82-2.348
$J_0^t$	0.357	0.092	0.340-0.374	0.85-1.102
$J_r^t$	3.27	0.96	3.09-3.44	0.85-1.102

Из таблицы следует, что с точки зрения выбранного критерия, качество управления  $u^r$  в  $\kappa = \frac{29.84}{19.8} = 1.507$  раза хуже, чем при «отличном» результате управления, причем с вероятностью 0.95 величина  $\kappa$  лежит в пределах  $1.472 < \kappa < 1.538$ .

Если рассматривать только терминальную часть критерия (3), то результаты значительно хуже —  $\kappa = 9.3$ . Это вызвано тем, что управление  $u^0$  более тонко, чем дискретное управление  $u^r$ , реагирует на малые отклонения спутника от стационарного положения и менее обременительными ограничениями на допустимую величину управления, задаваемую параметром  $N$ .

При более жестких требованиях к вспомогательному управлению  $u^0$  результаты тестирования сближаются.

Для примера в таблице 2 приведены результаты статистических испытаний при значении параметра  $N = 3.5$  в функционале (3).

Таблица 2

J	$m_J$	$\sigma_J$	$I_m(0.05)$	$I_\sigma(0.05)$
$J_0^0$	40.55	2.22	40.15-40.96	1.97-2.55
$J_r^0$	66.06	13.05	63.7-68.42	11.58-14.94
$J_0^t$	2.28	0.35	2.21-2.35	0.316-0.407
$J_r^t$	3.01	1.48	2.75-3.28	1.313-1.695

Как видим из таблицы, при таком критерии качества результат тестирования терiminalной части функционала (3) с  $N = 3.5$  равен  $\kappa = \frac{3.01}{2.28} = 1.32$ .

Результат тестирования для полного функционала (3)  $\kappa = \frac{66.06}{40.55} = 1.628$  не улучшился по сравнению с критерием при  $N = 1$ .

## Литература

1. В.В.Александров. Тестирование качества стабилизации нестационарных движений// Вестник Моск. ун-та. Матем. механ. 1997. №3. С. 51–54.
2. В.В. Александров, С.И. Злочевский, С.С. Лемак, Н.А. Парусников. Введение в динамику управляемых систем. Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 1993, 189 с.
3. Н.Н. Красовский. Управление динамической системой. М., Наука 1985.
4. В.А. Садовничий, В.В. Александров, Г.И. Ванюрихин, А.Г. Якушев. Математическое обеспечение автоматизированных комплексов обучения, тренировки и тестирования специалистов по управлению динамическими системами. Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 1994, препринт №3 57 с.
5. В.В.Александров, В.Н.Жермоленко. Минимаксная стабилизация параметрически возмущаемой колебательной системы// Вестник Моск. ун-та. Матем. механ. 1998. № 6. С. 40–43.
6. М.Х.А. Девис. Линейное оценивание и стохастическое управление. М., Наука, 1984, 208с.
7. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для задач оптимального управления. М.; ЖВМ и МФ, 1962, 2. № 6. С. 1132–1138.