

УДК 531.36

Особенности решений модельных динамических систем одной задачи внешней баллистики¹

В. А. Садовничий, Ю. М. Окунев

I

Математическое моделирование динамики свободного полета высокоскоростных объектов пространственной аэродинамической формы требует построения соответствующих математических моделей движения различной полноты описания, определяемой требованиями к точности решения задачи внешней баллистики (определения характеристик траекторного и углового движения, а также параметров, характеризующих рассеивание), особенно в условиях возникновения критических режимов полета. Необходимость учета тех или иных факторов (степень проработки и детализации модели) зависит от конкретной задачи и, как правило, определяется в процессе исследования. В каждом конкретном случае осуществляется соответствующий выбор и строится модель самого тела как механического объекта, модель внешнего воздействия на тело - модель поля тяготения Земли, модель стандартной атмосферы и ветровых возмущений, модель аэродинамического воздействия.

Качество моделирования существенно зависит от точности описания аэродинамических сил и моментов. Для режимов полета с малыми углами атаки и скольжения допустимо представление аэродинамических коэффициентов с использованием их частных производных по кинематическим параметрам движения.

Свободный полет тел нетрадиционной компоновки со сложной геометрией при "неблагоприятных" условиях движения (например, при

¹ В сб.: Избранные вопросы математики, механики и их приложений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999 г., с. 360-392.

значительных начальных возмущениях) может происходить на больших углах атаки и скольжения. В этой ситуации имеющиеся аэродинамические модели, полученные теоретическим или экспериментальным путем, вообще говоря, не обладают достаточной полнотой описания силовых и моментных характеристик. Главным образом это касается зависимости сил и моментов от угловых скоростей тела. Традиционно она представляется линейными эмпирическими поправками, так называемыми вращательными производными, что возможно при относительно медленных угловых движениях тела. Кроме того, для указанных режимов полета нельзя заранее сузить класс возможных движений тела около центра масс и получить линейные аппроксимации аэродинамических коэффициентов. По этой причине модели аэродинамического воздействия, построенные теоретически на основе конечного набора вариантов расчетов, имеют либо очень сложное аналитическое представление, либо таковое вообще затруднено, и модели строятся на основе экспериментальных данных, представленных в виде таблиц.

Таким образом, исследование пространственного движения тела сводится к изучению существенно нелинейных, нестационарных, многопараметрических, жестких дифференциальных уравнений высокой размерности.

Аналитическое исследование таких динамических систем имеет ограниченные возможности, если не прибегать к существенным упрощениям, приводящим к потере количественной, а в ряде случаев и качественной достоверности. Возможности исследования с помощью математического моделирования на ЭВМ посредством численного интегрирования полных уравнений много шире и позволяют доводить исследование до конкретных технических рекомендаций. Однако такой подход имеет свои сложности, связанные с отсутствием априорной информации о возможных (в зависимости от начальных условий и параметров задачи) типах движения, для изучения которых необходимо проведение качественного анализа особых решений уравнений движения и определения условий их реализации.

Разрешение обозначенных проблем, возникающих при исследовании пространственного движения тел сложной геометрии в широком диапазоне изменения угловых координат и их производных, возможно путем имитационного моделирования, когда информация об аэродинамических характеристиках не полна, позволяющего ввести параметрическое семейство динамических систем, адекватно описывающих качественные особенности динамики тела не только в узком диапазоне изменения компонент вектора состояния и определяющих

параметров, но и при его существенном расширении.

Исследование показало, что линеаризованная модель аэродинамического воздействия без учета демпфирующих факторов (вращательных производных) вполне приемлема в указанном выше смысле для описания ряда особенностей динамики высокоскоростного полета динамически симметричного тела с высокими несущими свойствами, имеющего конечный порядок осевой симметрии. В частности, имеются в виду полученные аналитическими методами результаты, качественно не отличающиеся от результатов баллистических испытаний.

Примем линеаризованную квазистационарную аэродинамическую модель без демпфирующих членов [1]. Отнесенный к единичной массе вектор полной аэродинамической силы \mathbf{f}_s и вектор аэродинамического момента \mathbf{M}_s^{cm} в осях связанного трехгранника (\mathbf{M}_s) ($\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ – орты системы (\mathbf{M}_s)) зададим соотношениями

$$\mathbf{f}_s = -c_2 V^2 \beta \mathbf{s}_1 - c_1 V^2 \mathbf{s}_2 + c_2 V^2 \alpha \mathbf{s}_3, \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_s = \frac{\mathbf{M}_s^{cm}}{J_0} = -k V^2 (\alpha \mathbf{s}_1 + \beta \mathbf{s}_3). \quad (2)$$

Введенные здесь обобщенные коэффициенты сил и моментов c_1, c_2, k – параметры, зависящие от плотности среды, конструктивных и массово-инерционных характеристик. Их связь с безразмерными аэродинамическими коэффициентами определяется формулами

$$c_1 = \frac{\rho S}{2m} c_1^*, \quad c_2 = \frac{\rho S}{2m} c_2^{*\alpha}, \quad -k = \frac{\rho S l}{2J_0} m_{s_1}^\alpha, \quad (3)$$

где $c_1^*, c_2^{*\alpha}$ – коэффициенты продольной и нормальной силы, $m_{s_1}^\alpha$ – коэффициент момента тангажа; $\rho = \rho(h)$ – плотность, h – высота полета, S – площадь миделевого сечения, l – характерная длина элемента. Для тела неизменяемой геометрии и массы и в случае режимов полета с малым диапазоном изменения высоты обобщенные коэффициенты являются постоянными величинами.

Модель аэродинамического воздействия приведенной выше структуры широко используется в литературе по динамике полета (2). Такое простейшее представление функциональной зависимости аэродинамических сил и моментов от части компонент вектора состояния (V, α, β) и конструктивных параметров в сочетании с различными упрощенными уравнениями движения дает возможность эффективно применять аналитические методы исследования, в частности, строить приближенные аналитические решения, необходимые для классификации типов движения тела. При определенных условиях эти решения

с хорошей точностью совпадают с численными решениями, построенными при моделировании на ЭВМ.

Рассмотрим пространственное движение тела, не имеющего конструктивных асимметрий (главные оси инерции тела совпадают с осями связанного трехгранника (\mathbf{Ms})), вращающегося вокруг своей продольной оси s_2 . Будем считать, что в процессе движения угол атаки α и угол скольжения β , как и их производные по времени, остаются малыми. Относительно угла скоростного крена γ_c и составляющей ω_{s_2} угловой скорости вращения объекта вокруг продольной оси таких предположений не делается. При принятой модели аэродинамического воздействия со стабилизирующими моментами по углам тангажа и рыскания и нулевым моментом по углу крена такой режим движения может реально осуществляться, если выполняется ряд условий: малы начальные возмущения углов α, β и соответствующих угловых скоростей, присутствует начальное вращение $\omega_{s_2}(0)$, в модельной динамической системе не возникает антидемпфирования.

Если движение происходит в невозмущенной атмосфере и в качестве модели гравитационного воздействия принимается плоско-параллельное поле силы тяжести, то соответствующая динамическая система, моделирующая режим движения, имеет вид:

группа кинематических уравнений движения центра масс тела

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 &= -V \cos \Theta \sin \psi_c, \\ \dot{L}_2 &= V \cos \Theta \cos \psi_c, \\ \dot{h} &= V \sin \Theta,\end{aligned}\tag{4}$$

L_1, L_2, h – боковое отклонение, дальность в плоскости движения, высота, соответственно;

группа динамических уравнений движения центра масс тела

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_c &= \frac{(c_2 - c_1)V}{\cos \Theta} (-\alpha \sin \gamma_c + \beta \cos \gamma_c) \\ \dot{\Theta} &= (c_2 - c_1)V (\alpha \cos \gamma_c + \beta \sin \gamma_c) - \frac{g \cos \Theta}{V} \\ \dot{V} &= -c_1 V^2 - g \sin \Theta\end{aligned}\tag{5}$$

Ψ_c, Θ, V – углы скоростного курса и наклона траектории, путевая скорость центра масс тела, соответственно;

группа динамических уравнений движения тела вокруг центра масс

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{s_1} &= J\omega_{s_2}\omega_{s_3} - kV^2\alpha, \\ \dot{\omega}_{s_2} &= 0, \\ \dot{\omega}_{s_3} &= -J\omega_{s_2}\omega_{s_1} - kV^2\beta\end{aligned}\tag{6}$$

ω_{s_i} ($i = 1, 2, 3$) - проекции абсолютной угловой скорости связанного трехгранника (Ms) на его оси, $J+1 = J_2/J_0$ - безразмерный параметр, характеризующий отношение момента инерции J_2 тела относительно продольной оси s_2 к моменту инерции J_0 тела относительно поперечной оси связанного трехгранника ($J_1 = J_3 = J_0$);

группа кинематических уравнений движения тела вокруг центра масс

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \omega_{s_1} - (c_2 - c_1)V\alpha - \omega_{s_2}\beta + \frac{g \cos \Theta}{V} \cos \gamma_c \\ \dot{\beta} &= \omega_{s_3} - (c_2 - c_1)V\beta + \omega_{s_2}\alpha + \frac{g \cos \Theta}{V} \sin \gamma_c \\ \dot{\gamma}_c &= \omega_{s_2} + (c_2 - c_1)V\alpha \operatorname{tg} \Theta \sin \gamma_c - \left((c_2 - c_1)V \operatorname{tg} \Theta + \frac{g \cos \Theta}{V} \right) \beta \cos \gamma_c\end{aligned}\tag{7}$$

α, β, γ_c - углы атаки, скольжения и скоростного крена, соответственно.

Исследование основных характеристик пространственного движения тела удобно проводить, введя комплексный "пространственный угол атаки" и комплексную "угловую скорость" по формулам

$$\chi = \alpha + i\beta, \quad \omega_\chi = \omega_{s_1} + i\omega_{s_3}.\tag{8}$$

При этом первое и третье уравнения системы (6) представятся в виде одного уравнения с комплексными переменными χ, ω_χ

$$\dot{\omega}_\chi = -kV^2(t)\chi - iJ\omega_{s_2}\omega_\chi \quad (\omega_{s_2} = \omega_{s_2}(0) = \omega_2 - \text{параметр}).\tag{9}$$

Аналогично первое и второе уравнения системы (7) представятся в виде

$$\dot{\chi} = -[(c_2 - c_1)V(t) - i\omega_{s_2}]\chi + \omega_\chi + \frac{g \cos \Theta(t)}{V(t)} e^{\gamma_{ci}},\tag{10}$$

$$\dot{\chi} = \dot{\alpha} + i\dot{\beta},\tag{11}$$

Уравнения (9), (10), в свою очередь, допускают приведение к одному дифференциальному уравнению второго порядка для простран-

ственного угла атаки χ :

$$\ddot{\chi} + [(c_2 - c_1)V - (1 - J)\omega_{s_2}i]\dot{\chi} + \left\{ [k - (c_2 - c_1)c_1]V^2 + J\omega_{s_2}^2 + J\omega_{s_2}(c_2 - c_1)Vi \right\} \chi = G$$

$$(\omega_{s_2} = \omega_{s_2}(0) = \omega - \text{параметр}) , \quad (12)$$

$$G = g \cos \Theta \left(c_1 + \frac{2g \sin \Theta}{V^2} \right) e^{\gamma_c i} + i(1 + J)\omega_{s_2} \frac{g \cos \Theta}{V} e^{\gamma_c i} -$$

$$-i \frac{g^2 \cos^2 \Theta}{V^2} \beta \cos \gamma_c e^{\gamma_c i} \quad (13)$$

Представленная выше модельная динамическая система позволяет проводить анализ динамики тела лишь путем расчетов на ЭВМ. Использование таких уравнений для аналитических оценок практически невозможно без дополнительных упрощений. Одним из таких существенных упрощений является предположение о малом влиянии силы тяжести на характер движения тела. Для обоснования правомерности этого предположения запишем уравнения, содержащие в правых частях члены, обусловленные влиянием силы тяжести, в безразмерном виде:

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = (c_2^* - c_1^*)(\alpha \cos \gamma_c + \beta \sin \gamma_c) - 2 \frac{1}{Fr^2} \cos \Theta ,$$

$$\frac{d(\ln V)}{d\tau} = -c_1^* - 2 \frac{1}{Fr^2} \sin \Theta , \quad (14)$$

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} + [(c_2^* - 2c_1^*) - i(1 - J)\omega_{s_2}^*] \frac{d\chi}{d\tau} + \{ [k^* - (c_2^* - c_1^*)c_1^*] + J(\omega_{s_2}^*)^2 + iJ\omega_{s_2}^*(c_2^* - c_1^*) \} \chi =$$

$$= 2 \frac{1}{Fr^2} \sin \Theta \frac{d\chi}{d\tau} + 2 \frac{1}{Fr^2} \cos \Theta \left(c_1^* + 4 \frac{1}{Fr^2} \sin \Theta \right) e^{\gamma_c i} +$$

$$+ 2i \frac{1}{Fr^2} (1 + J)\omega_{s_2}^* (\cos \Theta) e^{\gamma_c i} - 4i \frac{1}{Fr^4} (\cos^2 \Theta) \beta (\cos \gamma_c) e^{\gamma_c i} , \quad (15)$$

$$\frac{d\omega_{s_2}^*}{d\tau} = c_1^* \omega_{s_2}^* + 2 \frac{1}{Fr^2} (\sin \Theta) \omega_s^* ,$$

$$\frac{d\gamma_c}{d\tau} = \omega_s^* + (c_2^* - c_1^*) \alpha \tan \Theta \sin \gamma_c -$$

$$- [(c_2^* - c_1^*) \tan \Theta + 2 \frac{1}{Fr^2} \cos \Theta] \beta \cos \gamma_c .$$

Здесь безразмерная независимая переменная введена заменой

$$d\tau = \frac{V}{l} dt , \quad (16)$$

безразмерная угловая скорость $\omega_{s_2}^*$ —

$$\omega_{s_2}^* = \frac{l}{V} \omega_{s_2}, \quad (17)$$

$c_1^* = lc_1$, $c_2^* = lc_2$, $k^* = l^2 k$ — безразмерные обобщенные аэродинамические параметры, $Fr = \sqrt{\frac{2V^2}{gl}}$ — число Фруда.

Как следует из анализа структуры правых частей (14), (15), слагаемые, учитывающие влияние силы тяжести, имеют множителем величины, обратные второй и четвертой степеней числа Фруда. Для класса малогабаритных ($gl \sim 1m^2/c^2$), высокоскоростных объектов ($V(t) \sim 10^3 m/c$) с эффективной аэродинамикой (низкое лобовое сопротивление, высокая производная аэродинамического качества, эффективный восстанавливающий момент) на конечном интервале времени величины $1/Fr^2$, $1/Fr^4$ имеют порядок 10^{-5} , 10^{-10} , что свидетельствует о слабом влиянии на динамику тела силы тяжести по сравнению с аэродинамическим воздействием.

Таким образом, для описания динамики свободного полета указанного класса объектов на конечном интервале времени достаточно корректной оказывается модельная динамическая система нулевого приближения, не содержащая в правых частях слагаемых с множителями $1/Fr^2$, $1/Fr^4$. Для таких систем удается построить точное или приближенное аналитическое решение. Сравнение решений полных уравнений, полученных численными методами, с аналитическими решениями модельной динамической системы нулевого приближения позволяет указать длину временного интервала, на котором эти решения совпадают с высокой точностью.

Из сказанного следует, что в нулевом по параметру Fr приближении уравнение (12) для пространственного угла атаки становится нестационарным однородным уравнением и может интегрироваться независимо от других уравнений, поскольку входящая в выражения для его коэффициентов функция $V(t)$ в нулевом приближении становится известной функцией времени в результате интегрирования уравнения

$$\dot{V} = -c_1 V^2. \quad (18)$$

Итак, исследованию подлежит уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{\chi} + [(c_2 - c_1)V(t) - i(2 - J_2/J_0)\omega_{s_2}]\dot{\chi} + \\ + [k^*V^2(t) - (1 - J_2/J_0)\omega_{s_2}^2 - i(c_2 - c_1)(1 - J_2/J_0)\omega_{s_2}V]\chi = 0, \quad (19) \\ V(t) = V_0/(1 + c_1 V_0 t), \end{aligned}$$

где $\omega_{s_2} = \omega_{s_2}(0) = \text{const}$ – параметр, а величина k^* введена для удобства записи и определяется по формуле

$$k^* = k - (c_2 - c_1)c_1. \quad (20)$$

II

Рассмотрим вначале случай движения тела в плоскости (плоское движение). Такое движение является некоторой идеализацией рассмотренного выше случая пространственного движения тела с малыми углами и угловыми скоростями и имеет место, если выполнены условия $\beta(0) = \gamma_c(0) = 0$, $\omega_{s_2}(0) = \omega_{s_3}(0) = 0$.

Для плоского движения соответствующая модельная динамическая система нулевого по параметру Fr приближения имеет более простой вид, что позволяет понять механизм взаимосвязи поступательного движения центра масс тела и его вращательного движения относительно центра масс. Эта система такова:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= V \sin \Theta, \\ \dot{\Theta} &= (c_2 - c_1)V\alpha, \\ \dot{V} &= -c_1V^2, \\ \ddot{\alpha} + (c_2 - c_1)V\dot{\alpha} + [k - (c_2 - c_1)]V^2\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Входящая в уравнение для угла атаки группа членов $(c_2 - c_1)V\dot{\alpha} - (c_2 - c_1)c_1V^2\alpha$ представляющая собой производную подъемной силы по времени t , характеризует вклад подъемной силы в динамику углового движения элемента. Если предположить, что путевая скорость $V(t) = \text{const}$, при определенных значениях обобщенных параметров c , c_2 , k первый член в этой группе обеспечивает демпфирование, а второй изменяет (сдвигает) частоту собственных колебаний. Ниже будет показано с получением ограничений на аэродинамические коэффициенты, что демпфирующий механизм воздействия подъемной силы имеет место и при нестационарном движении (торможении), когда путевая скорость $V(t)$ изменяется в соответствии с квадратичным законом сопротивления среды (18).

Уравнение для угла атаки α содержит дифференциальный оператор эйлеровского типа, который может быть приведен к дифференциальному оператору с постоянными коэффициентами с помощью замены независимой переменной вида

$$\tau = \int_0^t \sqrt{k^*} V(s) ds = \mu \ln(1 + c_1 V_0 t) \quad (22)$$

где параметр k^* определяется по формуле (20), а величина

$$\mu = \frac{\sqrt{k^*}}{c_1} \quad (23)$$

есть безразмерный параметр, характеризующий соотношение коэффициентов восстанавливающего аэродинамического момента и лобового сопротивления тела.

Для рассматриваемого класса объектов с малым лобовым сопротивлением значения параметра μ имеют порядок 10^3 .

Отметим, что гиперболическая зависимость путевой скорости от времени в (19) сменяется экспоненциальной зависимостью от новой независимой переменной

$$V(t) = \frac{V_0}{1 + c_1 V_0 t} = \frac{V_0}{\exp(\tau/\mu)} \quad (24)$$

Таким образом, замена (22) приводит уравнение для угла атаки α (21) к виду

$$\ddot{\alpha} + 2\delta^* \dot{\alpha} + \alpha = 0, \quad (') = \frac{d}{d\tau}, \quad (25)$$

где

$$\delta^* = \frac{c_2 - 2c_1}{2\sqrt{k^*}} = \frac{\left(\frac{c_2}{2c_1} - 1\right)}{\mu} = \frac{\delta}{\mu} \quad (26)$$

коэффициент демпфирования, определяемый аэродинамическими параметрами.

Из (25) с учетом (26), (23) следует, что для обеспечения эффективного затухания угловых движений летящее тело должно обладать как запасом статической устойчивости

$$k > (c_2 - c_1)c_1 \quad (k^* > 0) \quad (27)$$

так и достаточно высокими несущими свойствами

$$\delta = \frac{c_2}{2c_1} - 1 > 0 \quad (c_2 > 2c_1). \quad (28)$$

Для рассматриваемого класса объектов величина δ лежит в диапазоне $0 < \delta < 10$.

При выполнении условий (27), (28) решение уравнения (25) запишется следующим образом

$$\alpha(\tau) = A^* e^{-\delta^* \tau} \sin \left[\sqrt{1 - (\delta^*)^2} \right] \tau + \varphi^* . \quad (29)$$

Здесь

$$v = \sqrt{1 - (\delta^*)^2} \quad (30)$$

- нормированная частота собственных демпфируемых колебаний продольной оси тела s_2 . При значениях параметров δ и μ из указанных выше диапазонов условие

$$1 - (\delta^*)^2 > 0 \quad (31)$$

или эквивалентное условие

$$4k - c_2^2 > 0 \quad (32)$$

выполняются автоматически.

В (29) амплитуда A^* и фаза φ^* определяются через начальные значения $\alpha(0)$, $\dot{\alpha}_\tau(0)$ и параметры v , δ^* или, учитывая связь

$$\dot{\alpha}_\tau(0) = \frac{1}{\sqrt{k^* V_0}} \dot{\alpha}_t(0) , \quad \dot{\alpha}_t(0) = \omega_{s_1}(0) - (c_2 - c_1) V_0 \alpha(0) , \quad (33)$$

через начальные значения переменных α , ω_{s_1} , V и обобщенные параметры c_1 , c_2 , k .

Для амплитуды A^* имеем выражение

$$A^* = \frac{2}{\sqrt{4k - c_2^2}} \sqrt{k \alpha^2(0) + \left[\frac{\omega_{s_1}(0)}{V_0} \right]^2 - \frac{\omega_{s_1}(0)}{V_0} \alpha(0) c_2} . \quad (34)$$

Фаза φ^* определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{V_0 \alpha(0) \sqrt{4k - c_2^2}}{2 \omega_{s_1}(0) - c_2 V_0 \alpha(0)} . \quad (35)$$

Решение (29) в реальном времени t имеет вид

$$\alpha(t) = A^* (1 + c_1 V_0 t)^{1 - \frac{c_2}{2c_1}} \sin [n \ln (1 + c_1 V_0 t) + \varphi^*] \quad (36)$$

где $n = \sqrt{4k - c_2^2} / 2c_1$.

Решение для угловой скорости ω_{s_1} и угла наклона траектории $\Theta(t)$ в реальном времени имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_{s_1}(t) - \omega_{s_1}(0) = & \frac{A_1}{\sqrt{a_1^2 + 1}} (1 + c_1 V_0 t)^{-(\delta+1)} \sin[n \ln(1 + c_1 V_0 t) + \\ & + \varphi^* + \varphi_1] - \frac{A_1}{\sqrt{a_1^2 + 1}} \sin(\varphi^* + \varphi_1), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \Theta(t) - \Theta_0 = & -\frac{A}{\sqrt{a^2 + 1}} (1 + c_1 V_0 t)^{-\delta} \sin[n \ln(1 + c_1 V_0 t) + \varphi^* + \varphi] + \\ & + \frac{A}{\sqrt{a^2 + 1}} \sin(\varphi + \varphi^*), \end{aligned} \quad (38)$$

где $\delta = (c_2/2c_1) - 1$.

Определение величин A_1 , a_1 , φ и A , a , φ не вызывает принципиальных трудностей.

Таким образом, для модельной динамической системы (21), описывающей движение тела в плоскости, получено аналитическое решение, по которому компоненты вектора состояния $V(t)$, $\alpha(t)$, $\Theta(t)$, $\omega_{s_1}(t)$ определяются, соответственно, по формулам (24), (36), (37), (38).

Анализируя это решение, естественно сделать следующий вывод. Диссипация энергии, возникающая при движении тела в сопротивляющейся среде, имеет два проявления. Первое связано с влиянием только силы лобового сопротивления и выражается в падении путевой скорости центра масс тела во времени τ по экспоненциальному закону с характеристическим показателем $\alpha_\nu = -1/\mu$. Второе связано с влиянием подъемной силы и выражается в демпфировании угловых колебаний продольной оси тела: во времени τ амплитуда колебаний угловой скорости ω_{s_1} убывает по экспоненциальному закону с характеристическим показателем $a_\omega = -(c_2/2c_1)/\mu$, а амплитуда колебаний угла атаки α — с характеристическим показателем $a_\alpha = -((c_2/2c_1) - 1)/\mu$. С характеристическим показателем a_α убывает и амплитуда отношения ω_{s_1}/V .

Из сказанного следует, что показателем "эффективности" или мерой диссипативного влияния подъемной силы по сравнению с силой лобового сопротивления является величина $\delta = (c_2/2c_1) - 1$.

Полученное аналитическое решение удобно использовать в качестве теста при анализе точности того или иного численного метода интегрирования на ЭВМ полных уравнений динамики полета.

Итак, в рамках линеаризованной модели аэродинамического воздействия, не содержащей "вращательных" производных (демпирующие

щих моментов), для нестационарного случая найдены ограничения на аэродинамические коэффициенты

$$k > (c_2 - c_1)c_1, \quad c_2 > 2c_1 \quad (39)$$

при выполнении которых механизм взаимосвязи поступательного движения центра масс и вращательного движения тела вокруг центра масс обеспечивает эффективное демпфирующее влияние подъемной силы на колебательное движение по углу атаки.

Отсюда следует, что принятая модель аэродинамического воздействия, не содержащая вращательных производных, для имитационного моделирования вполне приемлема при исследовании динамики класса объектов, обладающих высокими несущими свойствами.

III

Проведем аналитическое исследование решений уравнения (19) для пространственного угла атаки.

Для малогабаритных объектов с сильно вытянутым по оси s_2 эллипсоидом инерции отношение моментов инерции $\epsilon = J_2/J_0$, входящее параметром в коэффициенты уравнения (19), имеет порядок $10^{-3} - 10^{-2}$, что позволяет проводить исследование с учетом малости величины ϵ , рассматривая вначале порождающее уравнение при $\epsilon = 0$, а затем регулярно возмущенное при $\epsilon \neq 0$.

При построении аналитического решения уравнения (19) важным методическим приемом, существенно облегчающим задачу, является переход "вращением" $\chi' = \chi e^{i\omega t}$ в новое пространство, в котором порождающее уравнение оказывается приводимым, а возмущенное - уравнением с медленно меняющимися коэффициентами.

В системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг продольной оси s_2 относительно связанного трехгранника комплексный угол атаки определяется соотношениями

$$\chi' = \chi e^{-i\omega t} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\chi}' + (c_2 - c_1)V(t)\dot{\chi}' + k^*V^2(t)\chi' = \\ = -2i[\omega - (1 - \epsilon/2)\omega_2]\dot{\chi}' + \\ + [\omega - (1 - \epsilon)\omega_2][(\omega - \omega_2) - i(c_2 - c_1)V(t)]\chi' \\ (\omega_{s_2}(0) = \omega_2 - \text{параметр}). \end{aligned} \quad (41)$$

В случае $\epsilon = 0$, $\omega = \omega_2$ уравнение (41) становится однородным, а его левая часть содержит дифференциальный оператор эйлеровского типа, приводящийся с помощью замены независимой переменной

(22) к дифференциальному оператору с постоянными коэффициентами структуры, аналогичной (25),

$$\frac{d^2\chi'}{d\tau^2} + 2\delta^* \frac{d\chi'}{d\tau} + \chi' = 0, \quad (42)$$

где δ^* - коэффициент демпфирования, определяемый аэродинамическими параметрами в соответствии с формулой (26).

Структура уравнений (25), (42), соответственно, для угла атаки α (плоский случай движения) и для комплексного угла атаки χ (пространственный случай движения) одинакова и, следовательно, одинаковы и ограничения на аэродинамические параметры, при выполнении которых (см. (39)) в нестационарном случае механизм взаимосвязи поступательного и вращательного движений обеспечивает эффективное демпфирующее влияние подъемной силы на пространственные колебания продольной оси тела.

Следует отметить, что переход "вращением" из пространства χ в новое пространство χ' для поиска ограничений на аэродинамические параметры позволил свести пространственную задачу к плоской.

Используя полярную форму записи комплексных произвольных постоянных $K_1(0) = |K_1| \exp(\varphi_1 i)$, $K_2(0) = |K_2| \exp(\varphi_2 i)$, зависящих от начальных значений пространственного угла атаки и его производной по времени, представим решение уравнения (42) в виде

$$\chi'(\tau) = |K_1| e^{\varphi_1 i} e^{-\delta^* \tau} e^{v\tau i} + |K_2| e^{\varphi_2 i} e^{-\delta^* \tau} e^{-v\tau i}. \quad (43)$$

Здесь, как и в случае плоских колебаний (см. (30)), $v = \sqrt{1 - (\delta^*)^2}$ - нормированная частота собственных демпфируемых колебаний продольной оси тела s_2 .

Если $c_2 - 2c_1 = 0$, то соотношение (43) задает на плоскости α' , β' эллипс, главные оси которого повернуты относительно исходных осей на угол $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$, а большая и малая полуоси, соответственно, равны $|K_1| + |K_2|$ и $||K_1| - |K_2||$.

При $c_2 - 2c_1 > 0$ модули векторов $e^{-\delta^* \tau} K_1(0)$, $e^{-\delta^* \tau} K_2(0)$ при изменении аргумента τ меняются и эллиптическая спираль (43) стягивается к нулю.

Решение уравнения (19) на бесконечном интервале изменения переменной τ с использованием преобразования (40) и соотношений (22), (43) приводится к виду

$$\chi(\tau) = e^{-\delta^* \tau} \left[|K_1| e^{\varphi_1 i} e^{\Phi_1(\tau) i} + |K_2| e^{\varphi_2 i} e^{\Phi_2(\tau) i} \right], \quad (44)$$

где

$$\Phi_1(\tau) = \omega(\tau) + v\tau, \quad \Phi_2(\tau) = \omega(\tau) - v\tau, \quad (45)$$

$$\omega(\tau) = \frac{\omega_2}{c_1 V_0} \left(e^{\tau/\mu} - 1 \right) \quad (46)$$

(здесь и далее для определенности будем считать $\omega_2 > 0$).

На плоскости α, β для решения (44) возможна следующая геометрическая интерпретация. Если $c_2 = 2c_1$, кривая $\chi(\tau)$ при изменении аргумента τ прочерчивается на плоскости концом вектора $|K_2| \times \exp(\varphi_2 i)$, вращающегося с угловой скоростью $\dot{\Phi}_2(\tau)$ относительно совершающей поступательное движение системы координат, с началом в конце вектора $|K_1| \exp(\varphi_1 i)$, который, в свою очередь, вращается с угловой скоростью $\dot{\Phi}_1(\tau)$ относительно системы координат α, β . Если $c_2 > 2c_1$, дополнительно к сказанному, модули векторов будут экспоненциально затухать.

Анализируя решение (44), установим эффект смены знака медленной прецессии.

Движения продольной оси тела с круговыми частотами $\dot{\Phi}_1(\tau)$, $\dot{\Phi}_2(\tau)$ будем называть, соответственно, быстрой и медленной прецессиями. Эти движения реализуются при определенном задании начальных значений комплексного угла атаки и его производной.

Представим производные функций (45) по переменной τ в виде

$$\dot{\Phi}_1(\tau) = v(pe^{\tau/\mu} + 1), \quad (47)$$

$$\dot{\Phi}_2(\tau) = v(pe^{\tau/\mu} - 1) \quad (48)$$

Здесь безразмерный параметр

$$p = \omega_2 / \omega^* \quad (49)$$

характеризует скорость собственного вращения тела, нормированную начальной круговой частотой демпфируемых колебаний его продольной оси

$$\omega^* = c_1 V_0 \mu v \quad (50)$$

$$\omega^* = \frac{V_0}{2} \sqrt{4k - c_2^2}, \quad \text{если} \quad c_2 > 2c_1, \quad (51)$$

$$\omega^* = V_0 \sqrt{k - c_1^2}, \quad \text{если} \quad c_2 = 2c_1. \quad (52)$$

Функция $\dot{\Phi}_1(\tau, p)$ аргумента τ и параметра p при $p > 0$ положительна во всей области изменения аргумента. В то же время функция $\dot{\Phi}_2(\tau, p)$ с изменением аргумента обращается в нуль при его единственном значении

$$\tau = \tau^*(p) = \mu \ln \frac{1}{p}, \quad (53)$$

зависящем от параметра p , область изменения которого определяется неравенством $0 < p < 1$. При переходе через нуль функция $\Phi_2(\tau, p)$ меняет знак с минуса на плюс; $\tau^*(1) = 0$, если $\omega_2 = \omega^*$, ($p = 1$); $\tau^*(1/e) = \mu$, если $\omega_2 = \omega^*/e$, ($p = 1/e$).

Таким образом, при регулярном движении (медленной прецессии) продольной оси тела в том случае, когда скорость его собственного вращения ω_2 не превосходит значения ω^* , определяемого формулами (51), (52), в процессе движения возникает смена знака скорости медленной прецессии.

Используя соотношения (22), (49), (53), можно показать, что в реальном времени t скорость медленной прецессии обращается в нуль в момент

$$t = t^* = \frac{\omega^* - \omega_{s_2}(0)}{c_1 \omega_{s_2}(0) V_0} \quad (54)$$

В этот момент функция $k(t) = \omega_{s_2}(0)/V(t)$ — достигает значения $0,5\sqrt{4k - c_2^2}$, если $c_2 > 2c_1$, или значения $\sqrt{k - c_1^2}$, если $c_2 = 2c_1$. В этот же момент путевая скорость центра масс тела достигает значения $V(t^*) = V_0 \cdot (\omega_2/\omega^*)$.

Отмеченный эффект обусловлен нестационарным поведением путевой скорости тела и является одной из отличительных особенностей рассматриваемой задачи.

При отрицательном значении угловой скорости ω_2 сделанные выше утверждения относительно поведения функций $\dot{\Phi}_1$, $\dot{\Phi}_2$ корректируются следующим образом. В отличие от случая $\omega_2 > 0$ функция $\dot{\Phi}_2$ отрицательна во всей области изменения аргумента τ , а функция $\dot{\Phi}_1$ с изменением τ будет изменять знак с плюса на минус, обращаясь в нуль при единственном значении $\tau = \tau^*(p) = \mu \ln(1/p)$. Разумеется, это справедливо, если $|\omega_2| < \omega^*$.

Проведем классификацию типов эволюции пространственного угла атаки.

Описание поведения полученного аналитического решения при всевозможных начальных значениях комплексных постоянных $K_1(0)$,

$K_2(0)$ осложняется нелинейной зависимостью "фаз" $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_2(\tau)$ от независимой переменной τ . Заметим, что, если бы функции $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_2(\tau)$ линейно зависели от τ , то функции $\chi(\tau)$, по структуре подобные (44), представлялись бы на изображающей плоскости α , β при различных начальных условиях двумя классами плоских кривых: эпитрохоидами или гипотрохоидами (в частности, эпициклоидами или гипоциклоидами) [3].

При математическом моделировании решений уравнения (19) на ЭВМ и их графическом представлении на изображающей плоскости α , β было установлено, что последовательные фрагменты кривых $\beta(\alpha)$ достаточно близки в геометрических нормах к кривым названных выше классов. Это дало основание применить методику классического исследования кривых, задаваемых дифференциальными уравнениями движения гироскопа Фуко, для анализа эволюции пространственного угла атаки.

Используя замену независимой переменной (22), запишем (19) в виде

$$\ddot{\chi} + 2 \left[\delta^* - i \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) v p e^{\tau/\mu} \right] \dot{\chi} - \left[(1 - \varepsilon) v^2 p^2 e^{2\tau/\mu} - 1 + i(1 - \varepsilon) \left(2\delta^* + \frac{1}{\mu} \right) v p e^{\tau/\mu} \right] \chi = 0 \quad (55)$$

Здесь $(\dot{}) = \frac{d}{d\tau}$.

Для простоты изложения рассмотрим случай движения без демпфирования ($c_2 - 2c_1 = 0$).

Полагая в (55) $\varepsilon = 0$, имеем

$$\ddot{\chi} - 2i p e^{\varepsilon_1 \tau} \dot{\chi} - (p^2 e^{2\varepsilon_1 \tau} - 1) \chi = i \varepsilon_1 p e^{\varepsilon_1 \tau} \chi \quad (56)$$

где $\varepsilon_1 = 1/\mu$ — малый положительный параметр порядка 10^{-3} , а $\mu = \sqrt{k - c_1^2/c_1}$.

Для возможности применения асимптотического метода из [4,5] к построению приближенных решений уравнения (56) с медленно меняющимися коэффициентами ограничимся исследованием нестационарного процесса на интервале времени порядка $1/\varepsilon_1$. Введем новую медленную переменную τ_1 , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d\tau_1}{d\tau} = \varepsilon_1, \quad (57)$$

которая во времени τ изменяется на единичном отрезке $0 \leq \tau_1 \leq 1$, когда $\tau \in [0, \mu]$.

Полагая в (56), (57) $\varepsilon_1 = 0$, получим соответствующее уравнению (56) невозмущенное уравнение

$$\ddot{\chi} - 2iP(\tau_1)\dot{\chi} \pm Q(\tau_1)\chi = 0, \quad (58)$$

в котором коэффициенты

$$P(\tau_1) = p \exp \tau_1 > 0, \quad Q(\tau_1) > 0, \quad (59)$$

являются постоянными, зависящими от параметра τ_1 .

В уравнении (58) знак "-" выбирается, если $P(\tau_1) > 1$, при этом $Q(\tau_1) = P^2(\tau_1) - 1$. Знак "+" выбирается, если $0 < P(\tau_1) < 1$, при этом $Q(\tau_1) = 1 - P^2(\tau_1)$.

Невозмущенное уравнение (58) в двух его вариантах, приближенно описывающее пространственные колебания продольной оси тела в свободном полете, по структуре совпадает с уравнениями динамики известных механических моделей: "спящего волчка" (при $P(\tau_1) > 1$) и "гироскопа Фуко" (при $0 < P(\tau_1) < 1$).

В то же время отличительной особенностью исследуемой задачи оказывается зависимость коэффициентов от параметра τ_1 , что является следствием нестационарного поведения путевой скорости центра масс объекта.

Решение уравнения (58) для любых значений параметра $\tau_1 \in [0, 1]$ имеет вид

$$\chi(\tau) = K_1(0)e^{i(P(\tau_1)+1)\tau} + K_2(0)e^{i(P(\tau_1)-1)\tau} \quad (60)$$

где $K_1(0)$, $K_2(0)$ – произвольные комплексные постоянные, зависящие от начальных значений комплексного угла атаки $\chi(0)$ и его производной $\dot{\chi}(0)$.

Рассмотрим случай специальной структуры начальных условий

$$\chi(0) = a, \quad \dot{\chi}(0) = iab \quad (61)$$

Варьируемые параметры a , b – вещественные числа, i – мнимая единица. Параметр $a > 0$, параметр $b > 0$, если $P(\tau_1) > 1$, и может принимать отрицательные значения, если $0 < P(\tau_1) < 1$.

При начальных условиях (61) имеем представление комплексных постоянных

$$K_1(0) = \frac{a}{2}[b - (P(\tau_1) - 1)], \quad K_2(0) = \frac{a}{2}[(P(\tau_1) + 1) - b], \quad (62)$$

и решение уравнения (63) имеет вид

$$\chi(\tau) = \frac{a}{2} \left[[b - (P(\tau_1) - 1)] e^{i(P(\tau_1)+1)\tau} + [(P(\tau_1) + 1) - b] e^{i(P(\tau_1)-1)\tau} \right] \quad (63)$$

Для каждой конкретной пары параметров a, b соотношение (63) задает однопараметрическое (по параметру τ_1) семейство решений невозмущенного уравнения (58).

Траектории (63), представленные на изображающей плоскости Пуассона (α, β) , являются эпитрохоидами, если $P(\tau_1) > 1$, и гипотрохоидами, если $0 < P(\tau_1) < 1$.

Рассмотрим видоизменения траекторий, связанные с прохождением параметром b отрезка числовой прямой $[P-1, P+1]$, определяя тем самым все возможные типы движения продольной оси s_2 тела, которые могут возникать в свободном полете, если реализуется заданная структура начальных условий.

Четырем критическим значениям параметра b , при которых происходит качественная смена типа движения, присвоим номера 1, 3, 5, 7, оставив номера 2, 4, 6 для промежуточных ситуаций

$$1) \quad b = P - 1$$

$$K_1 = 0, \quad K_2 = a, \quad \chi(\tau) = a e^{i(P-1)\tau} \quad (64)$$

В случае 1) движение представляет собой медленную прецессию по окружности радиуса $r_1 = a$.

$$2) \quad P - 1 < b < P - 1/P \quad (65)$$

(65) В случае 2) имеет место либрация, ограниченная окружностями радиусов $r_1 = a$, $r_2 = (P - b)a$. При этом траекторией является укороченная эпициклоида (гипоциклоида).

$$3) \quad b = P - 1/P$$

$$K_1 = \frac{a(P-1)}{2P}, \quad K_2 = \frac{a(P+1)}{2P}, \quad \chi(\tau) = K_1 e^{i(P+1)\tau} + K_2 e^{i(P-1)\tau} \quad (66)$$

В случае 3) траекторией служит эпициклоида (гипоциклоида) с точками возврата на окружности радиуса $r_3 = a/P$.

$$4) \quad P - 1/P < b < P \quad (67)$$

(67) В случае 4) траектория представляет собой удлиненную эпициклоиду (гипоциклоиду) - кривую с петлями, заключенными между

окружностями радиусов $r_1 = a$, $r_2 = (P - b)a$, при этом петли не охватывают начала координат.

$$5) \ b = P$$

$$K_1 = \frac{a}{2}, \quad K_2 = \frac{a}{2}; \quad \chi(\tau) = \frac{a}{2} \left[e^{i(P+1)\tau} + e^{i(P-1)\tau} \right] \quad (68)$$

В случае 5) траекторией является эпитрохоида (гипотрохоида) с петлями, проходящими через начало координат. В полярных координатах уравнение этой кривой имеет вид $r = a \cos(\varphi/P)$, $\varphi = [2(P + 1)/a]\tau$.

$$6) \ P < b < P + 1 \quad (69)$$

В случае 6) вновь имеет место либрация, ограниченная окружностями радиусов $r_1 = a$, $r_2 = (b - P)a$. Траекторией является удлиненная эпициклоида (гипоциклоида) - кривая с петлями, которые, касаясь окружности радиуса $r_2 = (b - P)a$, охватывают ее снаружи.

$$7) \ b = P + 1,$$

$$K_1 = a, \quad K_2 = 0, \quad \chi(\tau) = ae^{i(P+1)\tau} \quad (70)$$

В случае 7) движение представляет собой быструю прецессию оси тела по окружности радиуса $r_1 = a$.

В каждом из описанных случаев при фиксированных значениях параметров a , b и $p = \omega_2/\omega^*$, варьируя значения параметра $\tau_1 \in [0, 1]$, можно построить однопараметрическое семейство траекторий $\chi(\tau, \tau_1)$.

Рассмотрим как изменяется поведение траектории при изменении параметра τ_1 в случаях 1), 7), отвечающих медленной и быстрой прецессиям.

Если величина ω_2 скорости собственного вращения тела вокруг оси s_2 больше значения ω^* , то параметр $p > 1$ и, следовательно, $P(\tau_1) = p \exp(\tau_1) > 1$ при всех τ_1 . Однопараметрическое семейство траекторий (64), (70) состоит из окружностей радиуса a , которые описываются изображающей точкой, движущейся против часовой стрелки. При этом продольная ось s_2 прецессирует в положительном направлении с периодом $T(\tau_1) = 2\pi/\Omega(\tau_1)$ вокруг вектора путевой скорости объекта.

В случае медленной прецессии

$$\Omega(\tau_1) = pe^{\tau_1} - 1 > 0 \quad (71)$$

В случае быстрой прецессии

$$\Omega(\tau_1) = pe^{\tau_1} + 1 > 0 \quad (72)$$

Если величина ω_2 скорости собственного вращения тела вокруг продольной оси меньше значения ω^* , то параметр $p < 1$, и в зависимости от значений параметра τ_1 функция $P(\tau_1) = p \exp(\tau_1)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\text{при } 0 \leq \tau_1 < \tau_1^*, \quad P(\tau_1) < 1 \quad (73)$$

$$\text{при } \tau_1 = \tau_1^* \quad P(\tau_1) = 1 \quad (74)$$

$$\text{при } \tau_1^* < \tau_1 \leq 1 \quad P(\tau_1) > 1 \quad (75)$$

Здесь $\tau_1^* = \ln(\omega^*/\omega_2)$ - критическое значение параметра, соответствующее смене знака скорости медленной прецессии.

Как следует из соотношений (73)-(75), в случае 1) вариация параметра τ_1 вызывает следующие качественные изменения в поведении траекторий семейства (64), отвечающих медленной прецессии.

При выполнении соотношения (73) семейство траекторий состоит из окружностей и дуг окружностей радиуса a , которые описываются изображающей точкой, движущейся по часовой стрелке. При этом продольная ось s_2 тела прецессирует в отрицательном направлении вокруг вектора путевой скорости объекта с периодом $T(\tau_1) = -2\pi/\Omega(\tau_1)$. При $\tau_1 \rightarrow \tau_1^*$ дуга окружности стягивается в точку, угловая скорость прецессии стремится к нулю, а период колебаний $T(\tau_1)$ неограниченно возрастает.

При выполнении соотношения (74) семейство траекторий состоит из единственной точки $(a, 0)$, расположенной на оси α . Скорость прецессии продольной оси тела при τ_1^* обращается в нуль. При этом реализуется плоское движение продольной оси с постоянным углом атаки.

При выполнении соотношения (75) семейство траекторий состоит из дуг окружностей и окружностей радиуса a , которые проходятся изображающей точкой против часовой стрелки. При этом продольная ось s_2 тела прецессирует в положительном направлении вокруг вектора путевой скорости объекта с периодом $T(\tau_1) = 2\pi/\Omega(\tau_1)$.

Таким образом, в случае 1) при $\omega_2 < \omega^*$ вариация параметра τ_1 сопровождается сменой знака скорости прецессии.

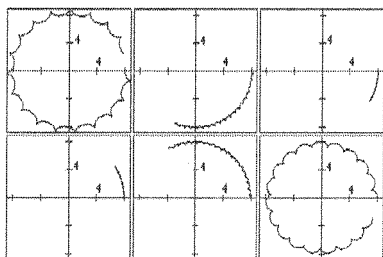


Рис. 1

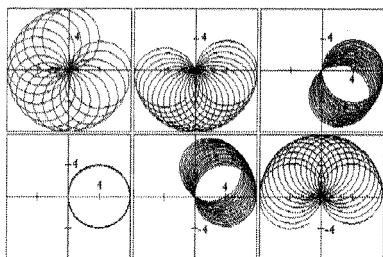


Рис. 2

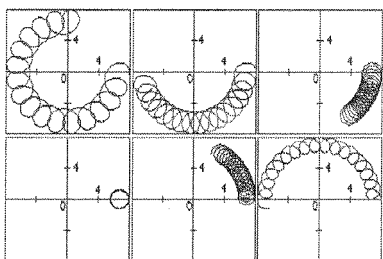


Рис. 3

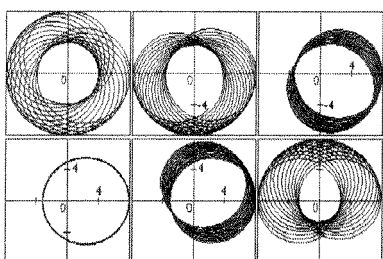


Рис. 4

В случае 7) при $\omega_2 < \omega^*$ вариация параметра τ_1 не приводит к качественным изменениям в поведении траекторий семейства (73), отвечающих быстрой прецессии. Семейство траекторий всегда состоит из окружностей радиуса a , которые проходятся изображающей точкой против часовой стрелки.

Геометрическая картина эволюции траекторий в случаях 3), 5), 4), 6) представлена на рис.1-4.

Предельными траекториями, отвечающими критическому значению параметра $\tau_1 = \tau_1^*$, являются окружности, не охватывающие, проходящие через и охватывающие начало координат.

Проведем на отрезке времени $0 \leq \tau \leq \mu$ сравнение приближенного решения (63) и точного решения (44), которое в случае $c_2 = 2c_1$ при принятой структуре начальных условий (61) и с учетом соотношений

$$\begin{aligned} \chi'(0) &= \chi(0) \\ \dot{\chi}'(0) &= -ip\chi(0) + \dot{\chi}(0), \quad (p = \omega_2/\omega^*) \end{aligned} \quad (76)$$

представимо в форме

$$\chi(\tau) = \frac{a}{2} \left[[b - (p - 1)]e^{i\Phi_1(\tau)} + [(p + 1) - b]e^{i\Phi_2(\tau)} \right]. \quad (77)$$

Здесь функции $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_2(\tau)$ определяются формулами

$$\Phi_1(\tau) = \omega(\tau) + \tau, \quad \Phi_2(\tau) = \omega(\tau) - \tau, \quad \omega(\tau) = \frac{\omega_2}{c_1 V_0} \left(e^{\frac{\tau}{\mu}} - 1 \right). \quad (78)$$

Используя приведенный выше “классификатор получим

$$1) \ b = p - 1, \quad \chi(\tau) = ae^{i\Phi_2(\tau)} \quad (79)$$

$$3) \ b = p - \frac{1}{p}, \quad \chi(\tau) = \frac{a}{2p} \left[(p-1)e^{i\Phi_1(\tau)} + (p+1)e^{i\Phi_2(\tau)} \right] \quad (80)$$

$$5) \ b = p, \quad \chi(\tau) = \frac{a}{2} \left[e^{i\Phi_1(\tau)} + e^{i\Phi_2(\tau)} \right] \quad (81)$$

$$7) \ b = p + 1 \quad \chi(\tau) = ae^{i\Phi_1(\tau)} \quad (82)$$

Подробное сравнение решений проведем для случая медленной прецессии при выполнении условия $\omega_2 < \omega^*$.

Как было показано выше, приближенное решение (64) описывает однопараметрическое семейство кривых, представляющее собой окружности радиуса a , или состоящее из ее дуг, которые изображающая точка проходит с постоянной угловой скоростью $\Omega(\tau_1) = p \exp(\tau_1) - 1$, зависящей от параметра τ_1 . А точное решение (79) представляет собой единственную траекторию, которую изображающая точка проходит, двигаясь по окружности радиуса a с переменной угловой скоростью

$$\Omega(\tau) = \dot{\Phi}_2(\tau) = pe^{\tau/\mu} - 1 \quad (83)$$

Особенность движения, состоящая в смене знака скорости прецессии, выявляется при анализе приближенного решения (64) при вариации параметра τ_1 в окрестности его критического значения $\tau_1^* = \ln(\omega^*/\omega_2)$. Эта же особенность в точном решении проявляется на малом временном интервале, когда текущее время τ проходит через критическое значение $\tau^* = \mu \ln(\omega^*/\omega_2)$.

Развитие траектории во времени может быть описано следующим образом. Из начального положения $A(a, 0)$ изображающая точка начинает двигаться по окружности по часовой стрелке, замедляясь при $\tau \rightarrow \tau^*$, и останавливаясь в положении $B(\alpha(\tau^*), \beta(\tau^*))$. При $\tau > \tau^*$ изображающая точка двигается против часовой стрелки, постепенно ускоряясь.

На конечном временном интервале $0 \leq \tau \leq T \leq \mu$, содержащем критическое значение τ^* , из кривых однопараметрического семейства описанных выше приближенных решений (64) “склеивается” траектория, которая с некоторой погрешностью воспроизводит точное решение. Построение такой траектории осуществляется путем разбиения временного интервала $[0, \mu]$ на n равноотстоящих друг от друга отрезков, и траектории однопараметрического семейства, отвечающие значениям параметра τ_1 , поставленным в соответствие дискретным значениям переменной τ , припасовываются друг к другу. Погрешность такого построения оценивается величиной, обратно пропорциональной числу точек разбиения рассматриваемого временного интервала.

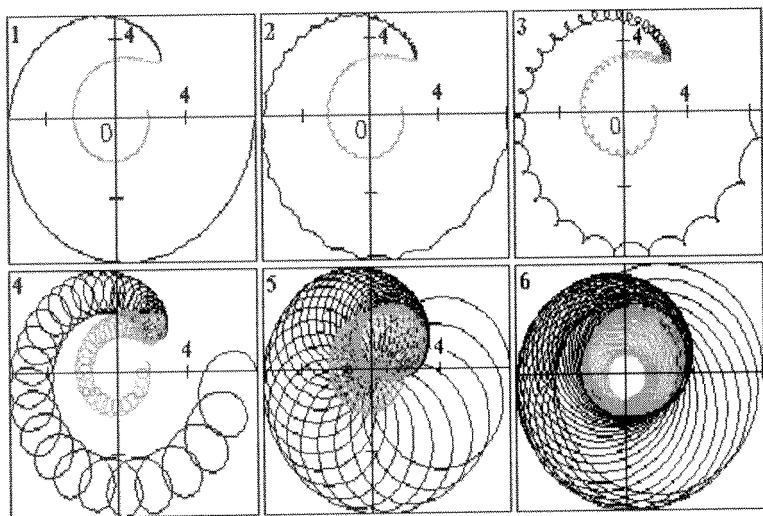


Рис. 5

Итак, показано, что в случае медленной прецессии траектория, воспроизводящая на изображающей плоскости точное решение, может быть с оцениваемой погрешностью составлена из специальным образом сконструированного множества траекторий однопараметрического семейства, которые соответствуют решению невозмущенного уравнения. Это утверждение переносится и на другие описанные выше типы движения. Таким образом, решение (44) уравнения (19) представляет собой на изображающей плоскости траекторию, последовательные фрагменты которой принадлежат двум классам кривых: эпитрохоидам и гипотрохоидам. При $\omega_2 < \omega^*$ на траектории, соответствующей точному решению, всегда существует фрагмент, отвечаю-

щий малому временному интервалу $\tau^* - \Delta \leq \tau \leq \tau^* + \Delta$, $\Delta \ll 1$, содержащему критическую точку, весьма близкий в геометрических нормах к критическим траекториям, рассмотренным выше в случаях 1), ..., 6) (см. рис.5).

IV

Свободный полет тел нетрадиционной компоновки (например, тел звездообразной формы) при значительных начальных возмущениях может происходить на больших углах атаки и скольжения.

В этих условиях линеаризованная модель аэродинамического воздействия, корректная при малых углах, не пригодна для описания силовых и моментных характеристик и, следовательно, модельная динамическая система не будет описывать особенности реального движения.

Аналитическое исследование модельных динамических систем с нелинейными моделями аэродинамического воздействия имеет весьма ограниченные возможности. Однако в некоторых случаях, допускающих определенные упрощения, не приводящие к потере качественной достоверности, исследование может быть доведено до конечного результата, важного для приложений. При этом оказываются эффективными методы качественной теории дифференциальных уравнений. В качестве примера рассмотрим одну из таких задач. Речь идет о случае "плоского" движения тела (при скольжении $\beta = 0$) при нелинейной модели аэродинамического момента \mathbf{M}_s , являющегося в отличие от (2), стабилизирующим лишь на некотором интервале значений угла атаки, представленном в виде

$$\mathbf{M}_s = M_{s_1}(\alpha, V, \dots) \mathbf{s}_1 \quad (84)$$

\mathbf{s}_1 — орт трехгранника (\mathbf{M}_s) .

Воспользуемся следующим возможным представлением проекции M_{s_1} как функции переменных α, V и некоторых параметров, определяемых геометрией тела

$$M_{s_1}^* = \frac{M_{s_1}}{J_0} = V^2 m_{s_1}(\alpha, \dots) . \quad (85)$$

Величина m_{s_1} как функция угла атаки α и при фиксированных значениях упомянутых параметров графически представлена на рис.6, 9, 12. Из вида функции на рис.6 следует, в частности, что момент является стабилизирующим на некотором интервале значений угла атаки $-\alpha^- < \alpha < \alpha^+$. Функция m_{s_1} линейна (коэффициент линеаризации $-k$) в окрестности нуля на малом интервале значений α ; функция

несимметрична относительно нулевого значения α и похожа на несимметричную кубическую параболу - восстанавливающий момент в области отрицательных значений угла атаки более эффективен, чем в области его положительных значений. Подобный стабилизирующий момент, в частности, имеют тела звездобразной формы не обладающие осевой симметрией (модель Н.А. Остапенко [1]).

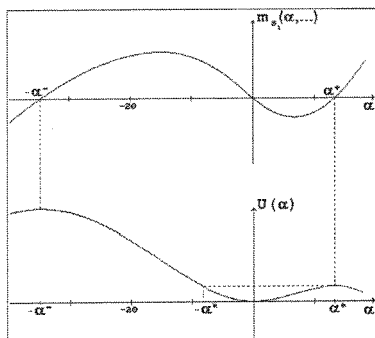


Рис. 6

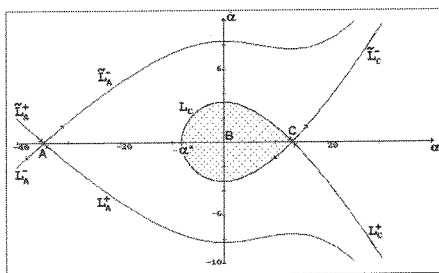


Рис. 7

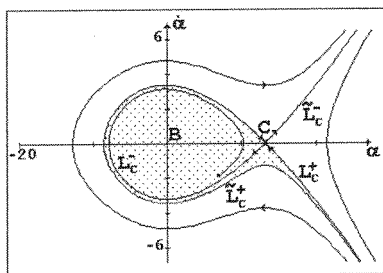


Рис. 8

Для вектора полной аэродинамической силы \mathbf{f}_s , отнесенной к единичной массе, сохраним соотношение (1) при нулевом значении угла скольжения β :

$$\mathbf{f}_s = -c_1 V^2 \mathbf{s}_2 + c_2 V^2 \alpha \mathbf{s}_3 . \quad (86)$$

Модель аэродинамического воздействия, введенная соотношениями (84)-(86), вполне оправдана для целей имитационного моделирования динамики полета определенного класса пространственных аэродинамических форм, для которых экспериментально установлено, что

(как минимум - при $\beta = 0$ нормальная аэродинамическая сила является линейной функцией угла атаки α на интервале, содержащем внутри себя интервал $(-\alpha^-, \alpha^+)$, где функция $m_{s_1}(\alpha, \dots)$ имеет явно выраженную нелинейность.

Для принятой модели аэродинамического воздействия уравнение, описывающее колебания тела по углу атаки в нулевом по параметру Fr приближении в отличие от (25) имеет вид

$$\ddot{\alpha} + (c_2 - 2c_1)\dot{\alpha} = m_{s_1}(\alpha, \dots) + (c_2 - c_1)c_1\alpha, \quad (\cdot) = \frac{d}{d\tau}, \quad (87)$$

$$\tau = \int_0^t V(s)ds = \ln(1 + c_1 V_0 t)^{1/c_1} \quad (88)$$

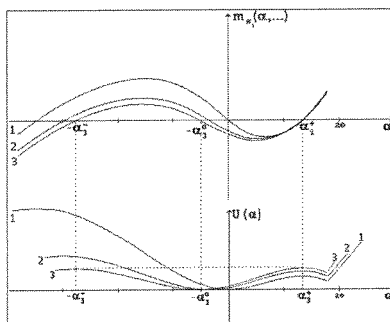


Рис. 9

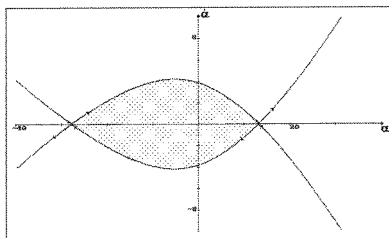


Рис. 10

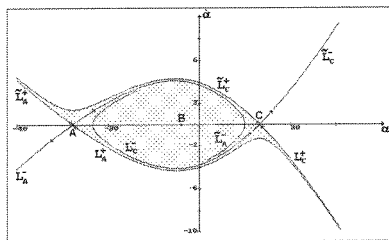


Рис. 11

Напомним, что в (87) члены $(c_2 - 2c_1)\dot{\alpha}$, $(c_2 - c_1)c_1\alpha$ обусловлены взаимосвязью вращательного движения вокруг центра масс и движения центра масс и характеризуют влияние подъемной силы и лобового сопротивления на угловое движение тела. Их вид отвечает принятому допущению о линейной зависимости нормальной силы от угла атаки в области его значений $-\alpha^- < \alpha < \alpha^+$ и предположению, что

в этой области корректна аппроксимация тригонометрических функций: $\cos \alpha \sim 1$, $\sin \alpha \sim \alpha$.

Для тел с малым лобовым сопротивлением добавление к функции $m_{s_1}(\alpha, \dots)$ линейной функции $(c_2 - c_1)c_1\alpha$ практически не меняет ее вида из-за малости коэффициента $(c_2 - c_1)c_1$, имеющего порядок величины c_1^2 . Это обстоятельство позволяет вместо (87) рассматривать уравнение

$$\ddot{\alpha} + (c_2 - 2c_1)\dot{\alpha} = m_{s_1}(\alpha, \dots) \quad (89)$$

для всех рассматриваемых вариантов представления функции $m_{s_1}(\alpha, \dots)$.

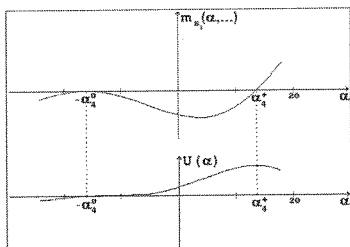


Рис. 12

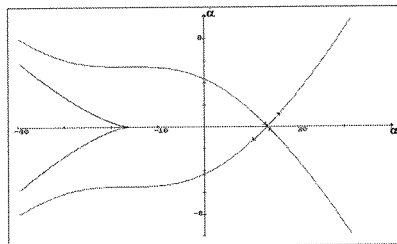


Рис. 13

Таким образом, в свободном полете колебания продольной оси тела по углу атаки можно трактовать как колебания маятника под действием консервативной “силы” $m_{s_1}(\alpha)$ и диссипативной “силы” $(c_2 - 2c_1)\dot{\alpha}$.

Рассмотрим на фазовой плоскости

$$\begin{aligned} T &= \frac{\dot{\alpha}^2}{2} - \text{кинетическая энергия,} \\ U &= - \int_{\alpha_0}^{\alpha} m_{s_1}(\xi, \dots) d\xi - \text{потенциальная энергия,} \\ E &= T + U - \text{полная механическая энергия.} \end{aligned} \quad (90)$$

Используя (90), запишем (89) в виде

$$\frac{dE}{d\tau} = (c_2 - 2c_1)\dot{\alpha}. \quad (91)$$

Очевидно, в любой момент “времени”

$$\frac{dE}{d\tau} \leq 0, \quad (92)$$

причем, равенство имеет место только для тех значений τ , для которых $\dot{\alpha} = 0$.

Изучим вначале фазовые кривые уравнения

$$\ddot{\alpha} = m_{s_1}(\alpha, \dots), \quad c_2 = 2c_1, \quad (93)$$

для которого полная механическая энергия является первым интегралом, а множество уровня энергии

$$\left\{ (\alpha, \dot{\alpha}) \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + U(\alpha) = E \right\} \quad (94)$$

является гладкой кривой в окрестности каждой своей точки, исключая лишь положения равновесия, т.е. точки $(\alpha, \dot{\alpha})$, где $m_{s_1}(\alpha, \dots) = 0$, $\dot{\alpha} = 0$. Каждая фазовая кривая целиком лежит на одном множестве уровня энергии.

Рассмотрим первый вариант (рис.6) графического представления функции $m_{s_1}(\alpha, \dots)$ и соответствующей ей (формула (90)) функции $U(\alpha)$. Точки α ($\alpha = -\alpha^-$, $\alpha = 0$, $\alpha = \alpha^+$), где $m_{s_1}(\alpha, \dots) = 0$ – критические точки потенциальной энергии U . Точки $(-\alpha^-, 0)$, $(0, 0)$, $(\alpha^+, 0)$ – стационарные точки уравнения (93); они же являются критическими точками полной энергии $E(\alpha, \dot{\alpha})$.

Таким образом, имеются три критических линии уровня энергии, отвечающих значениям E равным критическим значениям потенциальной энергии U : $E = U(-\alpha^-)$, $E = 0$, $E = U(\alpha^+)$. Указанные критические линии уровня содержат стационарные точки: $A(-\alpha^-, 0)$, $B(0, 0)$, $C(\alpha^+, 0)$ (рис.7), каждая из которых уже является фазовой кривой.

Критическая линия уровня энергии $E = U(-\alpha^-)$ состоит из пяти траекторий: неустойчивого состояния равновесия A (седло) и четырех сепаратрис седла (двух α -, двух ω - сепаратрис). Незамкнутые траектории L_A^+ и L_A^- , представленные на рис.7, соответственно ω – сепаратриса и α – сепаратриса [6], стремящиеся к A при $t \rightarrow +\infty$ и при $t \rightarrow -\infty$. Критическая линия уровня энергии $E = U(\alpha^+)$ состоит из четырех траекторий: неустойчивого состояния равновесия C (седло), α – сепаратрисы \tilde{L}_c^- , ω – сепаратрисы L_c^+ и целой траектории L_c , стремящейся к седлу C как при $t \rightarrow -\infty$, так и при $t \rightarrow +\infty$ (одна из α – сепаратрис седла C является одновременно ω – сепаратрисой). Траектория L_c и точка C образуют простую замкнутую кривую, называемую петлей сепаратрисы L_c . Критическая линия уровня энергии $E = U(0) = 0$ над отрезком $-\alpha \leq \alpha \leq \alpha^+$ представлена одной траекторией, а именно, устойчивым состоянием равновесия B (центр).

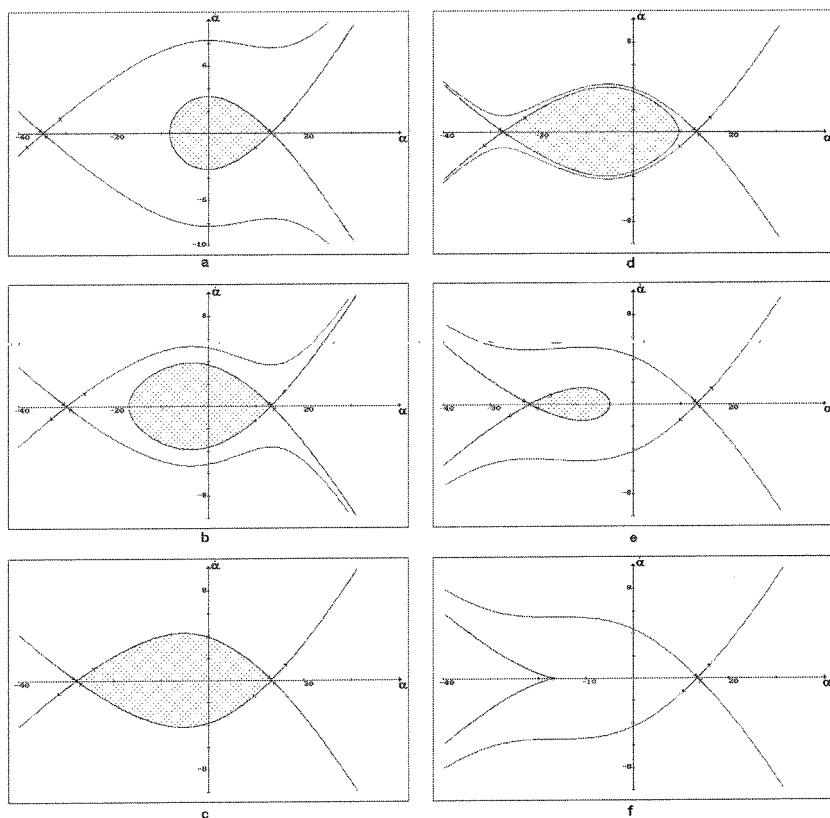


Рис. 14

Множество не критического уровня энергии состоит из конечного числа гладких фазовых кривых, диффеоморфных окружности или прямой (см. фазовый портрет, рис.15).

Замкнутым фазовым траекториям соответствуют периодические (колебательные) движения, незамкнутым - аperiodические (вращательные).

Петля сепаратрисы L_c ограничивает на фазовой плоскости область G_0 начальных значений $\alpha_0, \dot{\alpha}_0$, которым отвечают периодические движения (незатухающие колебания продольной оси элемента по углу атаки). Остальным значениям начальных данных $\alpha_0, \dot{\alpha}_0$ соответствуют незамкнутые траектории.

Рассмотрим фазовую плоскость уравнения (89), которое отличается от (93) диссипативным членом $-(c_2 - 2c_1)\dot{\alpha}$. Используя запись (89)

в виде (91), учитывая неравенство (92) и исходя из фазового портрета уравнения (93) (рис.7), нетрудно представить фазовый портрет уравнения (89).

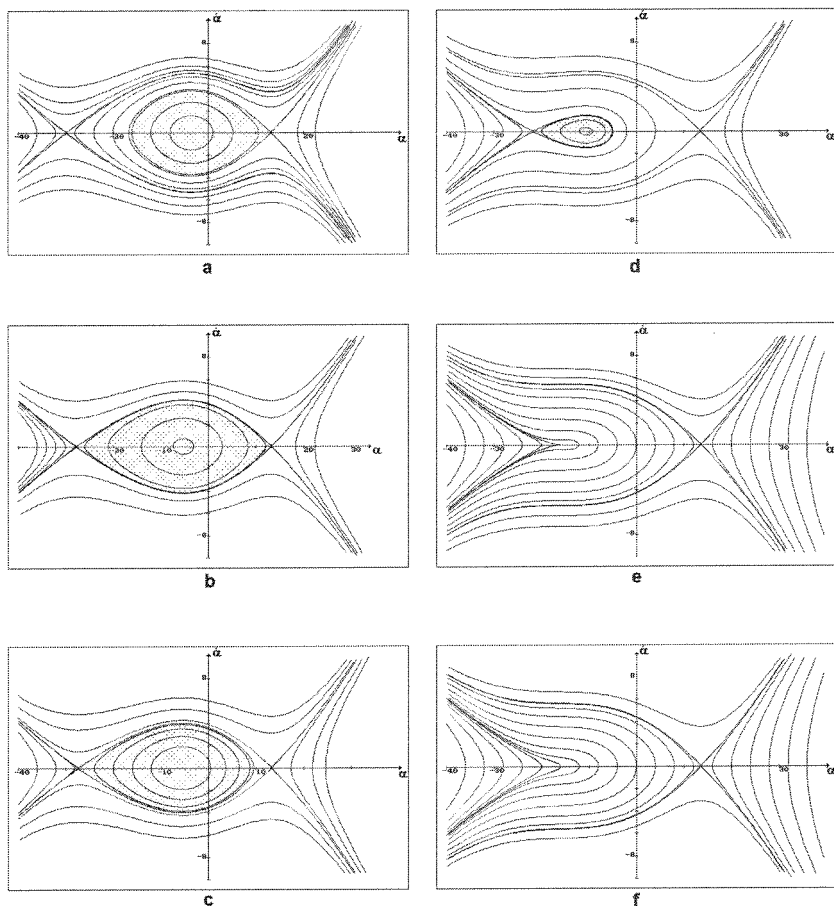


Рис. 15

Фазовый портрет уравнения (89) (в отличие от (93)) не содержит замкнутых траекторий. Из-за диссипации полной механической энергии петля сепаратрисы “разрушается” (рис.8). Точка B превращается в устойчивый фокус. Две ω – сепаратрисы L_c^+ , \tilde{L}_c^+ выделяют на фазовой плоскости “область притяжения” G_0^* устойчивого состояния равновесия, т.е. особой точки типа устойчивый фокус, расположенной в

начале координат (эта область заштрихована на рис.8); α – сепаратриса L_c^- наматывается на фокус. Если начальные данные $\alpha_0, \dot{\alpha}_0$ определяют на фазовой плоскости точку, лежащую внутри заштрихованной области, то с течением времени изображающая точка по фазовой траектории будет стремиться к началу координат; в противном случае изображающая точка по соответствующей фазовой траектории уйдет в бесконечность.

Таким образом, начальным значениям $\alpha_0, \dot{\alpha}_0$, принадлежащим области притяжения (устойчивости) G_0^* , отвечают затухающие колебания продольной оси тела по углу атаки.

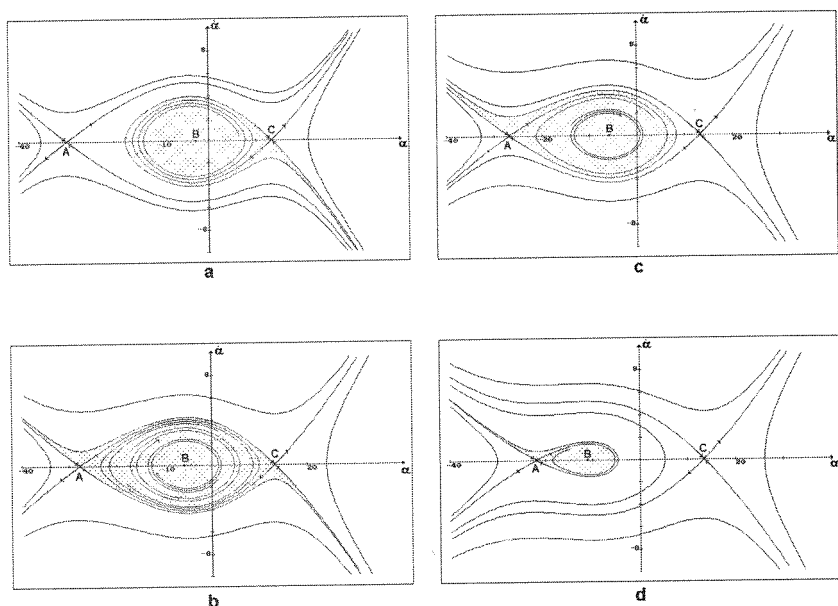


Рис. 16

Фазовые портреты уравнений (93), (89), соответствующие первому варианту представления функции $m_{s_1}(\alpha, \dots)$ (рис.6), приведены на рис. 15а, 16а.

Рассмотрим как изменяется структура области динамической устойчивости G_0^* при “деформации” функции $m_{s_1}(\alpha, \dots)$, связанной с изменением геометрии тела.

Практический интерес представляет определенный вид деформации, иллюстрируемый рис.9 (кривые 1, 2, 3) и рис.12 (предельный случай). Из вида кривых (рис.9, $i = 1, 2, 3$) следует, что при отри-

цательных значениях угла атаки момент $m_{s_1}(\alpha, \dots)$ является стабилизирующим в области значений $-\alpha_i^- < \alpha < -\alpha_i^0$ и опрокидывающим в области $-\alpha_i^0 < \alpha < 0$, тогда как в рассмотренном выше случае (рис.6) момент является стабилизирующим во всей области отрицательных значений $-\alpha_i^- < \alpha < 0$; в предельном случае (рис.12) интервал $(-\alpha_i^-, -\alpha_i^0)$ стягивается в точку $-\alpha_4^0$ – момент $m_{s_1}(\alpha, \dots)$ становится опрокидывающим во всей области отрицательных значений угла атаки; при положительных значениях угла атаки момент $m_{s_1}(\alpha, \dots)$ является стабилизирующим в области $0 < \alpha < \alpha_i^+$ ($i = 1, \dots, 4$) – аналогично случаю рис.6.

Представленные графически на рис.9 функции $U_i(\alpha)$ построены в соответствии с (90) для всех изображенных кривых момента $m_{s_1}(\alpha, \dots)$ (нумерация та же). Критическими точками функции $U_i(\alpha)$ являются точки с $\alpha = -\alpha_i^-$, $\alpha = -\alpha_i^0$, $\alpha = \alpha_i^+$ ($i = 1, 2, 3$). При рассматриваемой деформации кривых $m_{s_1}(\alpha, \dots)$ локальный минимум потенциальной энергии смещается по оси α справа налево ($0 > -\alpha_1^0 > -\alpha_2^0 > -\alpha_3^0$), а локальные максимумы – слева направо ($-\alpha_1^- < -\alpha_2^- < -\alpha_3^- < 0$, $0 < \alpha_1^+ < \alpha_2^+ < \alpha_3^+$); смещение по оси α локальных максимумов $U(\alpha_i^+)$ существенно меньше, чем смещение локальных максимумов $U(\alpha_i^-)$ и локальных минимумов $U(-\alpha_i^0)$.

Интересной особенностью деформации кривых $U_i(\alpha)$ (рис.9, 12) является изменение в относительном расположении по оси ординат локальных максимумов функции $U_i(\alpha)$:

$$\begin{aligned} U(-\alpha_i^-) &> U(\alpha_i^+), \quad i = 1, 2, \\ U(-\alpha_3^-) &= U(\alpha_3^+), \quad i = 3, \\ U(-\alpha_i^-) &< U(\alpha_i^+), \quad i > 3, \\ U(-\alpha_1^-) &> U(-\alpha_2^-) > U(-\alpha_3^-) > U(-\alpha_4^-), \\ U(\alpha_1^+) &< U(\alpha_2^+) < U(\alpha_3^+) < U(\alpha_4^+). \end{aligned} \tag{95}$$

В предельном случае (рис.12) локальный максимум $U(-\alpha_i^-)$, $i > 3$ "разрушается" (сливается с локальным минимумом), превращаясь в точку перегиба $-\alpha_4^0$, $U(-\alpha_4^0)$.

Указанная деформация кривых $U_i(\alpha)$ применительно к модельному уравнению (93) приводит к деформации и перестройке критических линий уровня энергии (рис.14), что влечет за собой изменение структуры области динамической устойчивости.

Критические линии уровня энергии, представленные на рис.14а (детально – на рис.7), отвечающие функциям $m_{s_1}(\alpha, \dots)$, $U(\alpha)$ (рис.6), приводятся для сравнения; рис.14b иллюстрирует "расширение" правой петли сепаратрисы L_c вследствие деформации функций m_{s_1} , U

(кривые 2) на рис.9; рис.14с (см. также рис.10) иллюстрирует особый случай, отвечающий представлению функций m_{s1} , U (рис.9, кривые 3), при этом $U(-\alpha_3^-) = U(\alpha_3^+)$, когда петля сепаратрисы справа трансформируется в α – сепаратрису и ω – сепаратрису, идущие из седла в седло; область G_0^* динамической устойчивости, ограниченная этими сепаратрисами, имеет предельный размер (изменение ее конфигурации применительно к модельному уравнению (89) с диссипацией показано на рис. 11); рис. 14d, e показывают рождение петли сепаратрисы слева при переходе к неравенству $U(-\alpha_3^-) < U(\alpha_3^+)$, $i > 3$ и последующее ее сжатие; рис. 14f иллюстрирует вырождение петли сепаратрисы слева в точку возврата и отвечает предельному случаю представления функций m_{s1} , U .

Итак при изменении геометрии тела область динамической устойчивости G_0^* изменяется следующим образом: область ограничивается правой петлей сепаратрисы \rightarrow расширение правой петли сепаратрисы \rightarrow область ограничивается сепаратрисами, идущими из седла в седло (предельный размер области G_0^*), \rightarrow область ограничивается левой петлей сепаратрисы уменьшение левой петли сепаратрисы и вырождение ее в точку возврата (предельный случай - отсутствие области динамической устойчивости).

Фазовые портреты модельных уравнений (93), (89) представлены на рис. 15 и 16.

Заметим, что для тел с конечным порядком осевой симметрии область динамической устойчивости G_0^* является областью, ограниченной сепаратрисами, идущими из седла в седло (выполняется равенство $U(-\alpha^-) = U(\alpha^+)$; $(-\alpha^-, 0)$, $(\alpha^+, 0)$ – стационарные точки). Это дает основание сделать важный для приложений вывод о предпочтительности осесимметричных конфигураций по сравнению с несимметричными, имеющими меньшие размеры (внутренность петли сепаратрисы) области динамической устойчивости.

Проведенный качественный анализ деформации области динамической устойчивости позволяет утверждать, что при несимметричном восстанавливающем моменте, отвечающем пространственной форме без осевой симметрии, область статической устойчивости (область по углу атаки между двумя стационарными точками) шире области динамической устойчивости. Для симметричного восстанавливающего момента, каким является восстанавливающий момент у пространственных форм с осевой симметрией, имеет место совпадение по углу атаки областей статической и динамической устойчивости.

Из сказанного следует, что для тел, не обладающих осевой симметрией, оптимизация формы должна проводиться именно по критерию

расширения области динамической устойчивости.

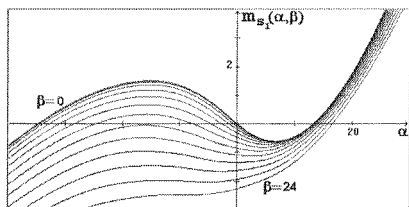


Рис. 17а

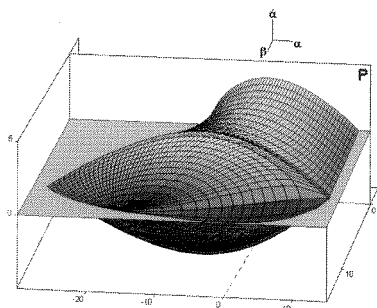


Рис. 17б

В заключение приведем еще одну модельную задачу, для которой анализ деформации критических линий уровня энергии, построенных для уравнения (93), оказывается полезным. Рассмотрим в потоке среды тело, закрепленное в центре масс и имеющее одну степень свободы в плоскости угла атаки. Исследуем движение продольной оси тела по углу атаки, изменяя принудительно его ориентацию в потоке по углу скольжения. Пусть скорость набегающего потока изменяется в соответствии с формулой (24), а восстанавливающий момент $m_{s_1}(\alpha, \beta)$ как функция угла α определяется однопараметрическим (по β) семейством кривых, представленным на рис.17а.

Очевидно, уравнение (93) с фиксированным β является модельным уравнением исследуемого движения.

Изменяя непрерывно параметр β , можно на основании проведенного выше анализа построить в пространстве $(\alpha, \dot{\alpha}, \beta)$ поверхность (рис.17б), ограничивающую область динамической устойчивости движения. Любое сечение этой поверхности плоскостью $\beta = \text{const}$ есть одна из описанных выше кривых критических линий уровня энергии. Такое представление области динамической устойчивости может быть использовано как наводящее соображение при исследовании динамики пространственного углового движения тела в свободном полете при нелинейной модели аэродинамического воздействия, если функции $m_{s_1}(\alpha, \beta)$, $m_{s_1}(\alpha, \beta)$ имеют структуру, подобную рассмотренной выше.

Литература

1. Окунев Ю.М., Остапенко Н.А. О демпфировании колебаний летящего тела около центра масс в условиях квазистационарной модели аэродинамики // Межвузовский сб. "Математическое моделирование нестационарных задач механики сплошной среды". М., 1985. С.67.
2. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика самолета. Пространственное движение. - М.: Машиностроение, 1983. 320с.
3. Парс Л.А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 636 с.
4. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. // Матем. сб. 31(73). 3. 1952. С. 575-586.
5. Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 431 с.
6. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 272 с.