

УДК 531/534

О движении тела в верхних слоях атмосферы¹

Б. Я. Локшин, Ю. М. Окунев, В. А. Садовничий,
В. А. Самсонов

Обсуждается задача о торможении тела в однородной покоящейся среде с сопротивлением. Показано, что в случае тела произвольной формы режим поступательного прямолинейного торможения невозможен. Для тел симметричной формы он существует, но экспоненциально неустойчив. Для неоднородного шара проведен глобальный анализ траекторий соответствующей динамической системы.

В середине XVIII века Л. Эйлер [1] сформулировал и практически решил модельную задачу о движении тяжелой материальной точки в среде с квадратичным сопротивлением, положив тем самым начало разнообразным задачам внешней баллистики (полет артиллерийских ядер, снарядов, пуль и т.п.). В 1891 г. Н.Е. Жуковский [2] добавил в эту модель подъемную силу. Оказалось, что траектории движения точки в этом случае приобретают новые формы и могут быть даже похожими на траектории парения птиц. Так началось механико-математическое моделирование задач полета тел с несущими поверхностями, обладающими высоким аэродинамическим качеством. В 70-ые годы прошлого века возникли проблемы [3], связанные с возвращением из космоса отсеков и модулей космических аппаратов, в том числе неуправляемых, которые не имеют крыльев и поэтому обладают довольно низким аэродинамическим качеством. В последнее время обозначился интерес к аналогичным объектам — метеоритам [4]. Они представляют собой бесформенные тела (куски льда, камней, металлов и т.д.) и, как правило, обладают очень низким аэродинамическим

¹Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем. Процессы, модели, эксперимент. Казань, Дайтона Бич. 2007. Вып.1(23), том 12, с.68-75

качеством. Конечно, когда эти тела влетают в атмосферу Земли и других планет с высокой скоростью (свыше 10 км/сек), многие из них разрушаются в верхних слоях атмосферы. Однако некоторые осколки продолжают полет и даже достигают поверхности Земли. Необходимость оценки разлета осколков дает авторам повод обсудить общие свойства движения в сопротивляющейся среде тел, не имеющих специальных форм (так сказать, «неправильной» формы). Методическая сторона задачи о движении тела в сопротивляющейся среде в простейшей постановке обсуждена в учебном пособии [5].

В настоящей работе рассмотрена задача о торможении тела в покоящейся однородной среде (под действием сил со стороны среды, при отсутствии сил иной природы) как типовая задача теоретической механики о взаимовлиянии поступательного и вращательного движений тела.

1. Предположим, что неуправляемое твердое тело массы M , достаточно «бесформенное» (не имеющее ни осей симметрии, ни плоскостей симметрии) движется в покоящейся атмосфере и находится под действием только сил аэродинамического воздействия. Мгновенное состояние движения описывается вектором \mathbf{V} скорости центра масс G тела и вектором $\mathbf{\Omega}$ угловой скорости вращения тела вокруг точки G . Свяжем с телом некоторую систему координат $GXYZ$. Тогда мгновенная ориентация вектора \mathbf{V} относительно системы $GXYZ$ определится углами α и β .

На рис.1 изображены сфера Пуассона для рассматриваемого тела, на которой показаны эти углы.

При выборе расчетной схемы для аэродинамических сил приходится опираться на эвристические соображения о характере «ожидаемых» движений тела. Для движений тела с относительно малой угловой скоростью обычно используют так называемое квазистатическое представление [5].

Результирующую силу \mathbf{R} аэродинамического воздействия разложим на две составляющие (рис.1):

- силу \mathbf{S} лобового сопротивления, направленную против вектора \mathbf{V} скорости тела, $S = s(\alpha, \beta)V^2$, и
- боковую (или подъемную) силу \mathbf{P} , лежащую в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{V} ; направление этой силы в указанной плоскости зависит от значений углов α, β ориентации вектора \mathbf{V} в выбранной системе отсчета, $P = p(\alpha, \beta)V^2$.

Таким образом,

$\mathbf{R} = \mathbf{S} + \mathbf{P}$, где $\mathbf{S} \parallel \mathbf{V}$, а $\mathbf{P} \perp \mathbf{V}$.

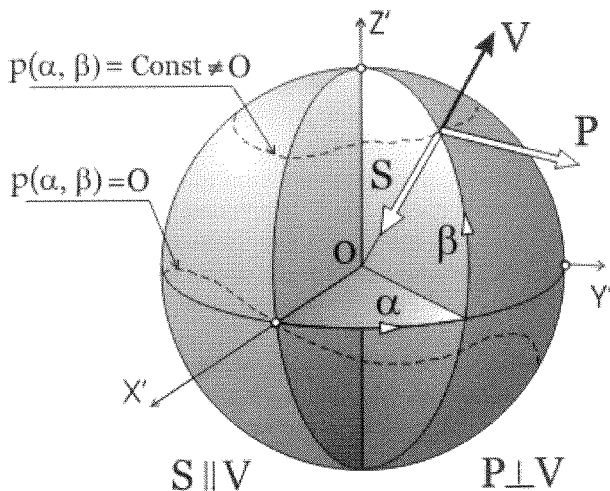


Рис.1

Аналогичным образом представим и момент \mathbf{Q} аэродинамических сил, так что $\mathbf{Q} = \mathbf{K} + \mathbf{N}$, где $\mathbf{K} \parallel \mathbf{V}$, а $\mathbf{N} \perp \mathbf{V}$, $K = k(\alpha, \beta)V^2$ и $N = n(\alpha, \beta)V^2$.

Отметим два характерных свойства, которые сразу следуют из указанного представления аэродинамического воздействия.

- а) Коэффициент $s(\alpha, \beta)$ всегда положителен ($s(\alpha, \beta) \geq s_0 > 0$), что отражает свойство сопротивляемости среды. Уравнение движения центра G масс в проекции на касательную к его траектории в рамках принятой модели имеет вид

$$M\dot{V} = -s(\alpha, \beta)V^2$$

Отсюда, очевидно, следует, что функция $V(t)$ монотонно убывает со временем.

- б) Коэффициенты $p(\alpha, \beta)$ и $n(\alpha, \beta)$ — неотрицательные функции, в общем случае обращающиеся в нуль не менее двух раз за период по каждому из аргументов. На рис.1 пунктирными линиями

представлены геометрические места точек, в которых имеет место равенство $p(\alpha, \beta) \equiv \text{const}$. На одной из таких линий имеет место равенство $p(\alpha, \beta) = 0$. Для определенности будем считать, что ось GX проходит через одну из точек множества $p(\alpha, \beta) = 0$, так что $p(0, 0) = 0$.

Таким образом, связанная с телом система координат $GXYZ$ несет в себе и некоторую информацию об аэродинамическом воздействии.

Аналогичным образом может быть изображено и геометрическое место точек, в которых выполняется условие $n(\alpha, \beta) = 0$ (рис.1). В зависимости от взаимного расположения линий $p(\alpha, \beta) = 0$ и $n(\alpha, \beta) = 0$ на сфере Пуассона из общего многообразия тел общего положения выделяются два «грубых» семейства: T_1 — тела, у которых эти линии не пересекаются, и T_2 — тела, у которых такое пересечение есть, например, для определенности, — в точке $(0, 0)$, так что для таких тел имеем $n(0, 0) = 0$.

2. Возникает естественный вопрос о существовании режима прямолинейного поступательного торможения тела, при котором выполняются соотношения:

$$\alpha(t) \equiv \alpha_* = \text{const}, \quad \beta(t) \equiv \beta_* = \text{const}, \quad \Omega(t) \equiv \mathbf{0} \quad (1)$$

Заметим, что при нарушении условия $\Omega(t) \equiv \mathbf{0}$ движение тела не поступательное, а при $\Omega(t) \equiv \mathbf{0}$ и нарушении условий $\alpha(t) \equiv \text{const}$, $\beta(t) \equiv \text{const}$ траектория точки G криволинейна.

Обычно в литературе о метеоритах влиянием боковой силы пренебрегают, считая $\mathbf{P} \equiv \mathbf{0}$. В этом случае независимо от характера вращения тела траектория точки G прямолинейна. Однако, для осуществления режима (1) необходимо выполнение условий

$$p(\alpha_*, \beta_*) = 0, \quad n(\alpha_*, \beta_*) = 0.$$

Если рассматриваемое тело относится к множеству T_1 , то эти условия не могут быть выполнены, так что режим поступательного прямолинейного движения для тел этого множества невозможен.

Если тело относится к множеству T_2 , то эти необходимые условия могут быть выполнены, но их недостаточно. Требуется, чтобы и другая составляющая аэродинамического момента равнялась нулю: $k(0, 0) = 0$. Однако, в общем случае трудно ожидать, что нули трех функций $p(\alpha, \beta)$, $n(\alpha, \beta)$ и $k(\alpha, \beta)$ от двух аргументов совпадают

(рис.1), так как эти функции независимы: функция $p(\alpha, \beta)$ определяется лишь внешней формой тела, а $n(\alpha, \beta)$ и $k(\alpha, \beta)$ — еще и распределением масс (точнее, расположением центра G масс тела в теле).

Таким образом, для тела, так сказать, «общего положения» имеем

$$k(0, 0) \neq 0$$

Следовательно, режим прямолинейного поступательного торможения, вообще говоря, невозможен и для тел из множества T_2 .

3. Будем считать сначала, что (для упрощения выкладок) рассматриваемое тело все же может совершать плоско-параллельное движение. В принятых обозначениях имеем: $\beta \equiv 0$. Тогда сила \mathbf{P} лежит в плоскости GXY , момент $\mathbf{Q} = \mathbf{N}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{0}$), а вектор угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ направлен вдоль оси GZ , так что $\mathbf{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$.

Для описания этого движения перейдем к новой независимой переменной — длине σ дуги, пройденной точкой G , так что $d\sigma = Vdt$, и совершим замену $\Omega = V\omega$. В результате получим систему уравнений (для упрощения записи опустим в дальнейшем нулевой аргумент β в аэродинамических коэффициентах):

$$MV' = -s(\alpha)V, \quad (2)$$

$$M(\alpha' - \omega) = -p(\alpha), \quad (3)$$

$$J(\omega' - \omega s(\alpha)/M) = n(\alpha), \quad (4)$$

где введено обозначение $(\quad)' = d(\quad)/d\sigma$. В этой системе два уравнения (2)-(3) описывают движение центра масс тела в плоскости, а уравнение (4) — вращение тела. Нетрудно видеть, что два последних уравнения отделились от первого.

Рассмотрим вопрос о существовании режима установившегося торможения вида

$$\alpha(\sigma) \equiv \alpha_* = \text{const}, \quad \omega(\sigma) \equiv \omega_* = \text{const} \quad (5)$$

Из уравнений (3)-(4) следует необходимое условие

$$-Js(\alpha_*)p(\alpha_*) = M^2n(\alpha_*), \quad (6)$$

то есть значение α_* должно быть корнем уравнения (6). Отметим, что движение тела, отвечающее этому стационарному решению, протекает с уменьшением скорости V (в силу уравнения (2)), с убывающей угловой скоростью $\Omega(t) = V(t)\omega_*$, но с постоянным значением α_* угла

атаки. В этом и проявляется взаимовлияние поступательного и вращательного движений тела.

Для определения траектории точки G в режиме установившегося торможения представим уравнение (3) в традиционном виде

$$\frac{MV^2}{R} = |p(\alpha_*)|V^2,$$

где R — радиус кривизны траектории. Отсюда следует, что центр G масс тела движется по окружности постоянного радиуса

$$R = \frac{M}{|p(\alpha_*)|} \quad (7)$$

Дадим оценку этого искривления траектории. Примем во внимание, что $s(\alpha) = \frac{1}{2}\rho b^2 C_x(\alpha)$, $p(\alpha) = \frac{1}{2}\rho b^2 C_y(\alpha)$, где ρ — плотность среды, b — характерный размер тела (аэродинамическая хорда), $C_x(\alpha)$, $C_y(\alpha)$ — безразмерные коэффициенты силы лобового сопротивления и подъемной силы. Если тело не является шаром, то коэффициент $C_y(\alpha)$ отличен от тождественного нуля. Например, спускаемые модули космических аппаратов, не имея специальных лопастей, крыльев и т.п., относятся к телам, так сказать, низкого аэродинамического качества, для них $C_y(\alpha) < 0.3$, а $C_x(\alpha) \approx 1$. Для «бесформенных» же тел значения $C_y(\alpha)$ еще меньше. С учетом сделанных замечаний и, приняв $M \sim \rho_T b^3$, из (7) получаем

$$R \sim \frac{\rho_T b}{\rho C_y}$$

При $\rho \sim 0.1 \text{ кг/м}^3$, $C_y \sim 0.01$ имеем: для «железа» — $R \sim 7000000b$, а для «пористого льда» — $R \sim 700000b$, так что радиус кривизны траектории полета тела с размером $b \sim 0.1 \text{ м}$ не превышает тысячи километров (т.е. $R < 1000 \text{ км}$).

Сравним теперь эту величину с кривизной траектории центра масс тела под действием гравитационных сил. Например, в поле притяжения Земли со скоростями, превышающими первую космическую $V > 7 \text{ км/сек}$, траектория имеет радиус кривизны не меньше радиуса планеты (Земли), т.е. $R > 6700 \text{ км}$, а при $V \sim 20 \text{ км/сек}$ — $R \sim 40000 \text{ км}$.

Видно, что аэродинамическое воздействие влияет на кривизну полета с космическими скоростями в разреженной атмосфере заметно сильнее, чем гравитационное. Правда, следует учитывать, что величина скорости в соответствии с (2) убывает вдоль траектории практически по экспоненциальному закону, так что отрезок траектории, на

котором скорость полета уменьшается вдвое, имеет длину в несколько километров. При дальнейшем падении скорости следует, видимо, учитывать совместное действие на полет и аэродинамических сил, и сил гравитации.

Необходимо также учитывать еще немаловажное различие в действии этих сил. Гравитация «искривляет» траекторию, так сказать «вниз», в плоскости, проходящей через вектор V и центр Земли. Плоскость же действия аэродинамических сил определяется начальной ориентацией тела (носящей случайный характер) при входе в атмосферу. Следовательно, аэродинамическое воздействие может способствовать искривлению траектории даже «вверх», вплоть до «вылета» тела из атмосферы.

В обсуждаемой задаче, естественно, проигнорированы многие обстоятельства, сопутствующие движению метеоритов в атмосфере Земли, но искривление траектории их полета, обусловленное аэродинамическим воздействием, видимо, учитывать следует.

4. Обсудим вкратце влияние переменной плотности на полученные выводы. Из уравнения (2) видно, что характер изменения скорости V сохраняется: она убывает.

В левой части уравнения (6) переменная плотность входит во второй степени (через аэродинамические коэффициенты), а в правую — в первой, так что α_* как корень уравнения (6) изменяется вдоль траектории, то есть решение вида (5) не существует.

Заметим, что радиус кривизны траектории, как это следует из (7), при этом также изменяется вдоль траектории.

5. Перейдем к анализу устойчивости траектории «установившегося» торможения в рамках плоско-параллельного движения. Поскольку тела (метеориты) имеют различные формы, то проведение подробного анализа устойчивости всей совокупности возможных режимов установившегося торможения вряд ли целесообразно.

Поэтому рассмотрим вопрос об устойчивости для простейшего частного случая тела, для которого $n(0) = 0$. Тогда существует режим прямолинейного поступательного торможения $\alpha_* = 0$, $\omega_* = 0$.

Уравнения возмущенного движения [6] в линейном по α , ω приближении имеют вид:

$$\begin{aligned} M(\alpha' - \omega) &= -p\alpha \\ J(\omega' - s\omega/M) &= n\alpha, \end{aligned} \tag{8}$$

где: $s = s(0)$, $p = dp/d\alpha$ при $\alpha = 0$, $n = dn/d\alpha$ при $\alpha = 0$.

Несложным преобразованием система (8) приводится к одному уравнению второго порядка — «эквивалентному осциллятору»

$$M\alpha'' - (s - p)\alpha' - \left(\frac{Mn}{J} + \frac{sp}{M} \right) \alpha = 0 \quad (9)$$

Легко видеть, что для любого тела с достаточно «малым» аэродинамическим качеством ($|p| < s$) в модели (9) присутствует «антидемпфирование», то есть тривиальное решение этого уравнения экспоненциально неустойчиво независимо от знаков коэффициентов n, p .

Заметим, что экспоненциальный рост ω не означает обязательного роста Ω , так как $\Omega = \omega V$, а V экспоненциально убывает.

6. Анализ свойств «в большом» — далеко не простая задача, так как требует подробного описания заведомо нелинейного аэродинамического воздействия. Поэтому рассмотрим тело простой формы — шар, центр G масс которого не совпадает с геометрическим центром O (рис.2). В качестве фазовых координат математической модели движения выберем угловую скорость Ω тела, величину скорости V точки G и два угла (например, α, β), определяющие ориентацию вектора \mathbf{V} относительно связанной с шаром системы координат.

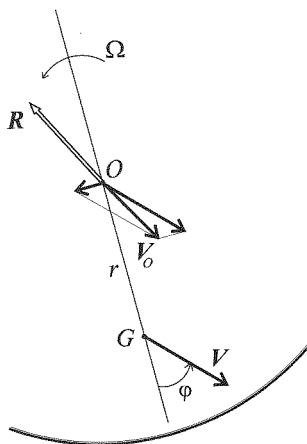


Рис.2

Предположим дополнительно, что одна из главных центральных осей инерции шара расположена ортогонально линии OG . В этом слу-

чае существует множество начальных условий движения, при которых шар совершает плоско-параллельное движение ($\beta = 0$), линия OG перемещается в одной и той же плоскости. Ограничимся изучением семейства таких траекторий. Отметим, что сформулированная задача относится к числу наиболее прозрачных по постановке задач теоретической механики о взаимном влиянии поступательного и вращательного движений тела.

Введем обозначения: m, J — масса шара и его центральный момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости движения; V — скорость центра масс шара; V_o — скорость геометрического центра шара, R — величина результирующей аэродинамической силы, $R = sV_o^2$, где $s = \text{const}$; r — расстояние между центром масс и центром тяжести ($|OG|$); Ω — угловая скорость тела вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения; φ — угол между вектором \mathbf{V} скорости центра масс и линией OG , угол атаки. Уравнения плоскопараллельного движения имеют вид:

$$\begin{aligned} M\dot{V} &= -R(V - r\Omega \sin \varphi)/V_o \\ MV(\dot{\varphi} + \Omega) &= Rr\Omega \cos \varphi/V_o \\ J\dot{\Omega} &= Rr(V - r\Omega)/V_o \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что в случае шара имеем $p(\alpha) \equiv 0$, но сила R и опрокидывающий момент N зависят от угловой скорости шара.

Преобразуем систему уравнений (10). Введем новое безразмерное «время» τ с помощью формулы $d\tau = Vdt/r$, новые безразмерные переменные

$$\omega = r\Omega/V, \quad u = V/\bar{V} \quad (11)$$

где \bar{V} — некоторая характерная скорость, например, скорость звука; новые безразмерные параметры $a = sr/m$, $b = mr^2/J$. Тогда $V_o = V\sqrt{1 - 2\omega \sin \varphi + \omega^2}$, и первое уравнение из системы (10) — уравнение продольного движения — примет вид

$$u' = -au(1 - \omega \sin \varphi) \cdot \sqrt{1 - 2\omega \sin \varphi + \omega^2} \quad (12)$$

где u' — производная по новому времени τ .

Два других уравнения системы (10) представим в форме:

$$\begin{aligned} \varphi' &= -\omega(1 - a \cos \varphi \cdot \sqrt{1 - 2\omega \sin \varphi + \omega^2}) \\ \omega' &= a\sqrt{1 - 2\omega \sin \varphi + \omega^2} \cdot (\omega - \omega^2 \sin \varphi + b(\sin \varphi - \omega)) \end{aligned} \quad (13)$$

Система (13) является автономной, не содержит переменной u и может быть исследована отдельно от (12).

Очевидно, что эта система имеет два стационарных решения

$$1) \omega(\tau) \equiv 0, \quad \varphi(\tau) \equiv 0 \quad \text{и} \quad 2) \omega(\tau) \equiv 0, \quad \varphi(\tau) \equiv \pm\pi,$$

отвечающих вышеупомянутым режимам прямолинейного поступательного торможения. В первом из них центр масс движется впереди центра шара, а во втором - позади.

7. Исследуем вопрос об устойчивости первого из отмеченных режимов торможения. Уравнения линейного приближения имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi' &= -\omega(1-a) \\ \omega' &= a((1-b)\omega + b\varphi) \end{aligned} \quad (14)$$

Выпишем характеристическое уравнение системы (14):

$$\lambda^2 + a(b-1)\lambda + ab(1-a) = 0 \quad (15)$$

Учитывая положительность параметров a , b , заключаем, что для устойчивости исследуемого режима необходимо выполнение условий

$$a < 1, \quad b \geq 1 \quad (16)$$

В практически интересных случаях плотность тела во много раз превышает плотность среды, поэтому первое из условий (16) выполняется почти всегда. Второе условие может быть выполнено, если центр шара отстоит от центра масс на расстоянии, превышающем центральный радиус инерции шара, то есть при существенной неоднородности распределения масс в шаре.

Аналогичный анализ для второго режима торможения, когда центр шара (центр давления) движется впереди центра масс, показал, что этот режим всегда неустойчив, что и следовало ожидать.

Отметим, что полученные результаты аналогичны результатам в [6], хотя рассмотренные структуры аэродинамического воздействия несколько различаются.

8. Проведем теперь глобальный анализ траекторий динамической системы (13). Нетрудно видеть, что решения системы (13) обладают свойством определенной симметрии, а именно: наряду с решением $(\omega(\tau), \varphi(\tau))$ существует и решение $(-\omega(\tau), -\varphi(\tau))$. Вследствие этого и автономности системы (13) достаточно рассматривать поведение фазовых траекторий только в полуплоскости $\omega(\tau) \geq 0$. Более того, принимая во внимание, что угол φ входит в уравнения только

под знаком тригонометрических функций, можно ограничиться фазовым портретом только в области $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $\omega(\tau) \geq 0$, которая представляет собой так называемую «развертку фазового полуцилиндра».

Поиск нетривиальных стационарных решений (неподвижных точек) вида

$$\varphi(\tau) \equiv \text{const} = \varphi_* \neq 0, \quad \omega(\tau) \equiv \text{const} = \omega_* \neq 0$$

показал, что в выделенной области фазового пространства существует единственная неподвижная точка $W(\varphi_*, \omega_*)$. При малых значениях параметров a, b имеем: $\varphi_* \approx a$, $\omega_* \approx 1/a$.

Замечание. Следует помнить, что величина ω характеризует различие между направлениями скоростей точек O и G шара. Когда ω велико, то мгновенный центр скоростей находится внутри шара. В этих условиях принятую выше модель аэродинамического воздействия вряд ли можно считать корректной. Тем не менее, найденная неподвижная точка служит опорным образом при построении полного фазового портрета динамической системы (13).

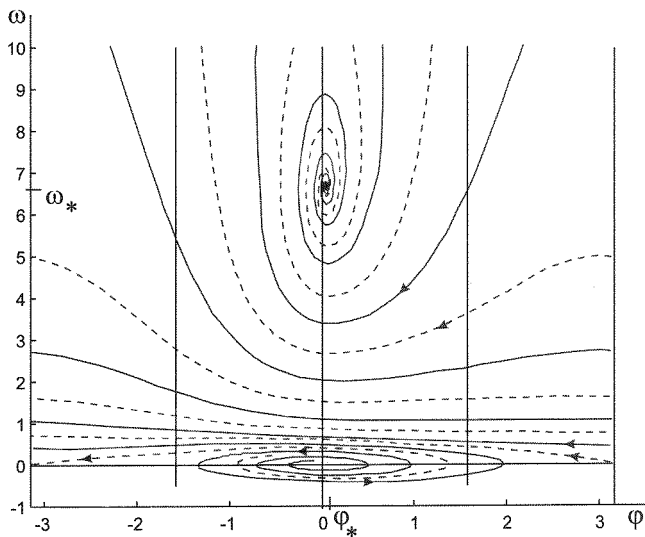


Рис.3

На Рис. 3 представлен типичный фазовый портрет системы (13):

начало координат - неустойчивый фокус, пунктиром отмечены траектории - сепаратриса, «выходящая» из точки $(\pi, 0)$, и сепаратриса, входящая в точку $(-\pi, 0)$, сплошной линией - траектория, «выходящая» из малой окрестности начала координат. Видно, что траектории стягиваются к указанной выше неподвижной точке $W(\varphi_*, \omega_*)$.

9. Обратимся теперь к уравнению (12). Нетрудно показать, что в точке W имеем: $u' < 0$, то есть неподвижная точка подсистемы (13) представляет собой проекцию прямолинейной траектории полной системы (12)-(13), вдоль которой изменяется лишь одна фазовая координата u (ее величина экспоненциально убывает). Поскольку $u' < 0$ в некоторой конечной окрестности точки $W(\varphi_*, \omega_*)$, а сама эта точка - притягивающая, то свойство монотонного убывания скорости u выполняется через некоторое конечное время на каждой траектории. Таким образом, вдоль почти любой траектории системы (12)-(13) прослеживается тенденция убывания скорости u центра масс, хотя возможны интервалы времени, в течение которых эта величина возрастает.

Литература

1. Эйлер Л. Исследования по баллистике. — М.: Физматгиз, 1961.
2. Жуковский Н.Е. О парении птиц. // Собр. соч. — Т. 4.— М.-Л.: Гостехиздат, 1940.— С. 5-34.
3. Кузмак Г.Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. — М.: Наука, Физматлит, 1970.
4. А.Н. Азовский, В.В. Шувалов. Влияние геометрической формы на движение фрагмента разрушенного метеороида. //Астрономический вестник. Т. 36. 2002. № 4. — С. 359-365.
5. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.
6. Окунев Ю.М. Сопоставление двух задач о движении тела в среде. // Сб. научно-методических статей «Теоретическая механика». — М.: Изд-во Моск. ун-та. 2003.— С. 133-137.