

УДК 51-71

Поведение решения одного нелинейного уравнения теории гравитации¹

Е. И. Моисеев, В. А. Садовничий

§ 1. Введение

В настоящей работе исследуются свойства решений одного нелинейного уравнения теории гравитации. Данная задача была предложена авторам академиком А. А. Логуновым в связи с развитием нового подхода к описанию гравитационного взаимодействия в пространстве Минковского [1].

В одном из вариантов теории гравитационного поля, реализующем этот подход, используется неполностью геометризованная плотность лагранжиана

$$L = -\frac{c^4 \sqrt{-g}}{16\pi G} g^{ik} [\Pi_{il}^m \Pi_{km}^l - \Pi_{ik}^l \Pi_{lm}^m] + L_M(g_{ik}, \phi_A),$$

где выбрана связь $g_{ik} = \gamma_{ik} + \phi_{ik}$ метрического тензора риманова пространства-времени g_{ik} с метрическим тензором пространства Минковского и гравитационным полем ϕ_{ik} , G — гравитационная постоянная, c — скорость света, $L_M(g_{ik}, \phi_A)$ — плотность лагранжиана вещества, зависящая от метрического тензора g_{ik} и остальных полей материи ϕ_A , Π_{il}^m — тензор, получаемый из символов Кристоффеля заменой частных производных на ковариантные производные по метрике γ_{ik} . Кроме того, в данной теории были введены новые физические условия, позволяющие ограничить спинные состояния гравитационного поля.

В подходе, развитом А. А. Логуновым, имеют место законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения для замкнутой системы. В этой теории были получены десять уравнений

¹Е. И. Моисеев, В. А. Садовничий "О краевых задачах для одного нелинейного уравнения теории гравитации." М., Изд-во МГУ, 1986. 2,34 п.л.

гравитационного поля, первые шесть из которых являются уравнениями Гильберта–Эйнштейна, а четыре других отражают природу гравитационного поля. При анализе различных решений данной теории возникает задача определения функциональной зависимости координат риманова пространства-времени от координат пространства Минковского. Зная эту зависимость, можно получить ряд важнейших физических данных о распределении гравитационного поля в пространстве, о характере действующих на пробную частицу сил, о времени ее падения на силовой центр и т.п.

С математической точки зрения задача об определении функциональной зависимости координат риманова пространства-времени от координат пространства Минковского сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений. В частности, в случае статического сферического гравитационного поля эта система сводится к одному уравнению

$$y'' + \frac{2y'}{x} - \frac{(y')^2 m}{y(y-2m)} - \frac{(y-2m)}{y} \left[\frac{m}{y^2} + \frac{2y}{x^2} \right] = 0, \quad (1)$$

где m — масса сферически симметричного тела, x — его радиус.

Задача состоит в том, чтобы найти решение этого уравнения, которое удовлетворяет условию $\frac{y(x)}{x} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$, что необходимо для выполнения закона тяготения Ньютона (внешняя задача) и условию

$$y(0) = 2, \quad y(x) \geq 2 \quad \text{для всех } x \in [0, \infty), \quad (2)$$

причем $y(x) \in C[0, \infty) \cap C^2(0, \infty)$.

Теорема. Решение $y(x)$ задачи (1), (2) существует на всей полуоси $[0, \infty)$, причем $y(x)$ является возрастающей функцией на полупрямой $[0, \infty)$.

Был проведен численный расчет на ЭВМ решения $y(x)$, который показал, что решение $y(x)$ при больших x ведет себя как $x + 1$, т.е.

$$y(x) \sim x + 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

Естественно возникает вопрос о единственности глобального решения краевой задачи (1), (2), а также вопрос о более точном асимптотическом поведении решения $y(x)$.

В данной работе дается ответ на оба этих вопроса. А именно, мы доказываем следующие две теоремы ($m = 1$).

Теорема. Решение $y(x) \in C^2(a, +\infty)$ уравнения (1) на полуоси (a, ∞) , удовлетворяющее условию $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = 1$, где a — произвольное неотрицательное число, имеет следующее асимптотическое разложение при $x \rightarrow +\infty$:

$$y(x) = x + 1 + \frac{2}{x} + \frac{2 \ln x}{3x^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (3)$$

$$y'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{4 \ln x}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad (3')$$

$$y''(x) = 1 - \frac{4}{x^3} - \frac{4 \ln x}{x^4} + O\left(\frac{1}{x^4}\right), \quad (3'')$$

Из этой теоремы непосредственно получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Согласно формуле (3) первые четыре члена асимптотики функции $y(x)$ не зависят от краевого условия на левом конце.

Следствие 2. График решения уравнения (1) с условием

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = 1$$

имеет в качестве асимптоты при $x \rightarrow +\infty$ прямую $y = x + 1$.

Следствие 3. График этого же решения $y(x)$ при достаточно больших x имеет выпуклость, направленную вниз, то есть при достаточно больших x вторая производная $y''(x)$ положительна.

Справедливо также следующее утверждение.

Утверждение. Если условие $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = 1$ заменить на условие $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \beta > 0$, то формулы (3), (3') и (3'') примут следующий вид:

$$\begin{aligned} y(x) &= \beta x + \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{1}{2\beta x} \left(1 + \frac{4}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^4} \right) + \\ &+ \frac{\ln x}{24\beta^2 x^2} \left(2 - \frac{42}{\beta^2} + \frac{70}{\beta^4} - \frac{14}{\beta^6} \right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \\ y'(x) &= \beta - \frac{1}{2\beta x^2} \left(1 + \frac{4}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^4} \right) - \frac{\ln x}{12\beta^2 x^3} \left(2 - \frac{42}{\beta^2} + \frac{70}{\beta^4} - \frac{14}{\beta^6} \right) + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \\ y''(x) &= \frac{1}{\beta x^3} \left(1 + \frac{4}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^4} \right) - \frac{\ln x}{4\beta^2 x^4} \left(2 - \frac{42}{\beta^2} + \frac{70}{\beta^4} - \frac{14}{\beta^6} \right) + O\left(\frac{1}{x^4}\right). \end{aligned}$$

Перейдем теперь к формулировке теоремы единственности решения задачи (1), (2). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Решение краевой задачи (1), (2) на полуоси $[0, +\infty)$, удовлетворяющее условию $\frac{y(x)}{x} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$ существует и единственно.

В настоящей работе будет приведено доказательство существования решения, чему посвящены все три параграфа этой работы.

В первом параграфе производится замена функции y на новую функцию $z = z(y)$ с тем, чтобы устранить в уравнении нелинейность, связанную с первой производной. Аналогичные замены систематически применял в своих исследованиях по нелинейным уравнениям в частных производных А. В. Бицадзе [2]. В этом же параграфе изучаются основные свойства функции $z(y)$ и доказывается ряд неравенств, которые необходимы для дальнейшего.

Во втором параграфе краевая задача (1), (2) сводится к нелинейному интегральному уравнению с параметром K , выбор которого находится в нашем распоряжении. Доказательство существования решения интегрального уравнения проводится методом последовательных приближений. Доказывается непрерывная зависимость полученного решения от параметра K .

В третьем параграфе доказывается существование для любого положительного K конечного предела $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x}$, а также, что этот предел непрерывно зависит от параметра K . Далее доказывается, что при достаточно больших K предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x}$ больше единицы, а при значениях K близких к единице, этот предел меньше единицы. Эти два факта с учетом непрерывности по K предела $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x}$ позволяют утверждать существование решения краевой задачи (1), (2), удовлетворяющего условию $\frac{y(x)}{x} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$.

§ 2. Сведение к уравнению с нелинейностью в младших членах

Рассмотрим следующую функцию $z(y)$:

$$z = \sqrt{(y-2)y} + 2 \ln \left[\frac{\sqrt{y-2} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right]. \quad (4)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Функция $z(y)$ возрастает при $y \geq 2$, при $y > 2$ является бесконечно дифференцируемой, причем

$$z'_y = \sqrt{\frac{y}{y-2}}. \quad (5)$$

У функции (2) при $z \geq 0$ существует обратная функция $y(z)$, которая при $z \geq 0$ является возрастающей, а при $z > 0$ — бесконечно дифференцируемой, причем

$$y'_z = \sqrt{1 - \frac{2}{y}}; \quad y''_z = \frac{1}{y^2}. \quad (6)$$

Кроме того,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{z(y)}{y} = 1. \quad (7)$$

Доказательство. Бесконечная дифференцируемость функции (4) следует из бесконечной дифференцируемости функций $\sqrt{y-2}$, \sqrt{y} при $y > 2$, $\ln u$ при $u \geq 1$ и теоремы о дифференцируемости суперпозиции двух функций [3]. Формула (5) непосредственно проверяется дифференцированием.

Из формулы (5) следует, что $z'_y > 0$ при $y > 2$, следовательно, функция $z(y)$ возрастает при $y \geq 2$ и при этом $z \in [0, +\infty)$.

Так как $z'(y) > 0$ при $y > 2$, то к функции $z = z(y)$ существует обратная $y = y(z)$ при $z \in [0, +\infty)$, которая является дифференцируемой и возрастающей функцией [3], причем

$$y'_z = \frac{1}{z'_y} = \sqrt{1 - \frac{2}{y}}. \quad (8)$$

Дифференцируя формулу (8) по z , получим, что

$$y''_{zz} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{2}{y}}} \frac{2}{y^2} y'_z = \frac{1}{y^2}. \quad (9)$$

Итак, формулы (6) доказаны.

Формулу (9) можно дифференцировать по z любое число раз; отсюда и следует бесконечная дифференцируемость функции $y = y(z)$.

Из формулы (4) легко следует, что $z(y) \rightarrow +\infty$ при $y \rightarrow +\infty$. Применяя правило Лопиталя, получим соотношение

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{z(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} z'_y(y) = 1.$$

Лемма 1 доказана.

Уравнение для функции $z(x)$ легко получается из уравнения (1) с использованием формул (6) и вытекающих из них формул

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_z z'_x = \sqrt{1 - \frac{2}{y}} z'_x; \\ y''_{xx} &= y'_z z''_{xx} + y''_{zz} (z'_x)^2 = \sqrt{1 - \frac{2}{y}} z''_{xx} + \frac{(z'_x)^2}{y^2}. \end{aligned}$$

Это уравнение для z имеет вид

$$\frac{(z'_x x^2)'}{x^2} = \sqrt{\frac{y-2}{y}} \left[\frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^2} \right]. \quad (10)$$

Заметим, что краевое условие $y(0) = 2$ для функции $z(x)$ принимает вид

$$z|_{x=0} = 0. \quad (11)$$

Задача (10), (11) будет рассмотрена в следующем параграфе. Сейчас же докажем некоторые оценки, необходимые для дальнейшего. Докажем, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Для функции $z(y)$, определенной по формуле (4) выполняются следующие неравенства при $y \geq 2$:

$$y \leq 2 + z; \quad (12)$$

$$y \leq 2 + \frac{z^2}{2}; \quad (13)$$

$$y^2 \geq \frac{z^2}{8} + 4. \quad (14)$$

Доказательство. Так как

$$\frac{\sqrt{y-2} - \sqrt{y}}{\sqrt{2}} \geq 1$$

при $y \geq 2$, то

$$\ln \left[\frac{\sqrt{y-2} - \sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right] \geq 0$$

и из формулы (4) следует, что

$$z \geq \sqrt{y-2} \sqrt{y}. \quad (15)$$

Возведя в квадрат это неравенство, получим соотношение

$$z^2 \geq y^2 - 2y.$$

Решая полученное неравенство для квадратного трехчлена, получим неравенство (12).

Действительно,

$$1 - \sqrt{1 + z^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1 + z^2}.$$

Выполнение левого неравенства очевидно из условия $y \geq 2$, а из правого неравенства имеем

$$y \leq 1 + \sqrt{1 + z^2} \leq 1 + 1 + z = 2 + z.$$

Итак, неравенство (12) доказано.

Из формулы (15) с учетом неравенства $y \geq 2$ имеем, что

$$z \geq \sqrt{y-2}\sqrt{y} \geq \sqrt{y-2}\sqrt{2}.$$

Возведя в квадрат полученное неравенство, получаем неравенство (13).

Используя соотношение $\sqrt{y-2}+2 \leq \sqrt{y-2} + \sqrt{2}$ при $y \geq 2$, из формулы (4) получаем

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{(y-2)y} + 2 \ln \left[\frac{\sqrt{y-2} + \sqrt{y-2} + 2}{\sqrt{2}} \right] \leq \\ &\leq \sqrt{(y-2)y} + 2 \ln \left[\frac{2\sqrt{y-2}}{\sqrt{2}} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Применяя неравенство $\ln(1+u) \leq u$ при $u \geq 0$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} z &\leq \sqrt{(y-2)y} + 2\sqrt{2}\sqrt{y-2} = \sqrt{y-2}(\sqrt{y} + 2\sqrt{2}) \leq \\ &\leq 2\sqrt{y-2}(\sqrt{y} + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Возведя в квадрат полученное неравенство, имеем, что

$$z^2 \leq 4(y-2)(\sqrt{y} + \sqrt{2})^2 \leq 8(y-2)(y+2) = 8(y^2 - 4).$$

Неравенство (14) доказано. Тем самым доказана и лемма 2.

§ 3. Существование решения задачи для z

Будем искать решение задачи в классе функций $z \in C[0, \infty) \cap C^2(0, \infty)$. Вместо функции z введем новую функцию $\Psi(x)$ по формуле

$$z = \Psi x^{\alpha_0},$$

где $\alpha_0 = (\sqrt{5} - 1)/2$. Отметим для дальнейшего, что

$$\frac{1}{2} < \alpha_0 < 1. \quad (16)$$

Задача (10), (11) сводится к следующей задаче для функции $\Psi \in C[0, \infty) \cap C^2(0, \infty)$:

$$\frac{(\Psi'_x x^{2\alpha_0+2})'}{x^{\alpha_0+2}} = F(y, x); \quad \Psi(0) = K, \quad (17)$$

где

$$F(y, x) = \frac{I(y)}{x^2} + \frac{\sqrt{y-2}}{y^{5/2}}, \quad (18)$$

$$I(y) = \sqrt{(y-2)y} - 2 \ln \left[\frac{\sqrt{y-2} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right]. \quad (19)$$

Решение задачи (17) сводится к решению следующего нелинейного интегрального уравнения:

$$\Psi(x) = K + \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi F(y, t) t^{2+\alpha_0} dt, \quad (20)$$

где K — некоторое положительное число.

Основной целью этого параграфа будет доказательство существования решения нелинейного интегрального уравнения (20) для любого $K > 0$.

§ 3.1. Оценка функции $I(y)$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Функция $I(y)$ положительна при $y > 2$. Для функции $I(y(z))$ справедлива следующая оценка

$$I(y(z)) \leq \frac{z^3}{4}; \quad z \geq 0, \quad (21)$$

где $y(z)$ — обратная к функции (2).

Доказательство. Из формулы (19) следует, что $I(2) = 0$. Далее, дифференцируя формулу (19), получим, что

$$I'_y = \sqrt{\frac{y-2}{y}} > 0 \quad (22)$$

при $y > 2$. Следовательно, $I(y) > 0$ при $y > 2$.

Докажем теперь неравенство (21). Используя равенства $y|_{z=0} = 2$, $I(2) = 0$ и формулу Лагранжа конечных приращений [3], получим, что

$$I(y) = I(y(z)) = I(y(z)) - I(y(z))|_{z=0} = \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \Big|_{z=z^*} z,$$

где $z^* \in (0, z)$.

Из формул (22) и (6) получаем, что

$$I(y(z)) = \left(1 - \frac{2}{y(z^*)}\right) z.$$

Применяя неравенство $y(z^*) < y(z)$ при $z^* < z$, которое следует из леммы 1, а также неравенство (13), окончательно получим ($y \geq 2$) следующее соотношение:

$$I(y(z)) = \left(1 - \frac{2}{y(z^*)}\right) z \leq \left(1 - \frac{2}{y(z)}\right) z = \frac{y-2}{y} z \leq \frac{z^3}{2y} \leq \frac{z^3}{4}.$$

Лемма 3 доказана.

§ 3.2. Метод последовательных приближений при решении интегрального уравнения

В качестве начального приближения $\Psi_0(x)$ берем постоянную K , то есть $\Psi_0 = K$, а последующие приближения определяем по формуле ($n = 1, 2, \dots$)

$$\Psi_n(x) = K + \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi F(y_{n-1}, t) t^{2\alpha_0+2} dt, \quad (23)$$

где y_{n-1} находится по z_{n-1} с помощью формулы (4), а $z_n - 1 = \Psi_{n-1} x^{\alpha_0}$. Метод последовательных приближений используется при доказательстве теорем существования различных классов задач для дифференциальных уравнений (см. работы [4], [5], [6]).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. Функции $\Psi_n(x, K)$, $n = 1, 2, \dots$, определенные формулой (23) существуют, являются непрерывными по $(x, K) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ и

$$\Psi_n(x, K) \geq K; \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \in [0, +\infty). \quad (24)$$

Доказательство. Доказательство леммы 4 будем вести по индукции. Для $\Psi_0 = K$ все утверждения леммы выполнены. Предположим теперь, что для Ψ_{n-1} они выполнены. Докажем, что тогда они будут выполнены и для функции $\Psi_n(x)$. Заметим прежде всего, что

$$z_{n-1} = \Psi_{n-1}x^{\alpha_0} \geq Kx^{\alpha_0} \geq 0.$$

Следовательно, из леммы 1 следует, что y_{n-1} , найденное по z_{n-1} в формуле (4), больше или равно двум, то есть

$$y_{n-1} \geq 2.$$

Кроме того, z_{n-1} непрерывно зависит от K , следовательно, и y_{n-1} по лемме 1 также непрерывно зависит от K ; поэтому и $F(y_{n-1}, t)$ непрерывно зависит от $K \in [0, M]$, где M — любое положительное число.

Для того, чтобы доказать сходимость интеграла (23) и его равномерную сходимость по $K \in [0, M]$, оценим функцию $F(y_{n-1}, t)$. Используя оценку (21) и неравенство $y_{n-1} \geq 2$ из формулы (18) для $F(y, t)$ получим

$$\begin{aligned} F(y_{n-1}, t) &= \frac{I(y_{n-1})}{t^2} + \frac{1}{y_{n-1}^2} \sqrt{1 - \frac{2}{y_{n-1}}} \leq \\ &\leq \frac{z_{n-1}^3}{4t^2} + \frac{1}{4} = \frac{\Psi_{n-1}^3}{4t^{2-3\alpha_0}} + \frac{1}{4} \leq \frac{C_{n-1}}{4t^{2-3\alpha_0}} + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

где $C_{n-1} = \max \Psi_{n-1}^3$ для $x \in [0, T]$, $K \in [0, M]$. Следовательно,

$$\int_0^\xi F(y_{n-1}, t)t^{2+\alpha_0} dt \leq \frac{C_{n-1}\xi^{4\alpha_0+1}}{4} + \frac{\xi^{3+\alpha_0}}{4}$$

или

$$\frac{1}{\xi^{2\alpha_0} + 2} \int_0^\xi F(y_{n-1}, t)t^{2+\alpha_0} dt \leq \frac{C_{n-1}\xi^{2\alpha_0-1}}{4} + \frac{\xi^{1-\alpha_0}}{4}. \quad (25)$$

Из последней оценки следует существование интеграла (23) и равномерная по K непрерывность $\Psi_n(x, K)$ по $x \in [0, T]$.

Из оценки (25) следует равномерная по $K \in [0, M]$ сходимости интеграла (23), а, следовательно, с учетом непрерывности $F(y_{n-1}, t)$ по K , и непрерывность Ψ_n по параметру $K \in [0, M]$.

Из этих двух фактов следует [3] непрерывность функции $\Psi_n(x, K)$ по $(x, K) \in [0, T] \times [0, M]$. Учитывая произвольность чисел T и M получаем, что $\Psi_n(x, K)$ непрерывна по $(x, K) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

Докажем теперь неравенство (24). В силу леммы 3 и неравенства $y_{n-1} \geq 2$ справедливо неравенство

$$I(y_{n-1}) \geq 0,$$

следовательно, из формулы (16) следует неравенство

$$F(y_{n-1}, t) \geq 0 \text{ при } t \geq 0.$$

Поэтому функция $\Psi_n(x)$ в силу формулы (23) и только что полученного неравенства удовлетворяет неравенству (24).

Лемма 4 доказана.

§ 3.3. Оценка $\Psi_n(x)$ в окрестности нуля

Для того, чтобы доказать сходимость метода последовательных приближений, необходимо оценить $\Psi_n(x)$ на некотором отрезке $[0, x_0]$

Докажем следующую лемму.

Лемма 5. Пусть число x_0 определено по формуле

$$x_0 = \min \left\{ \left[\frac{(4\alpha_0 + 1)\alpha_0}{8} \right]^{1/2\alpha_0} \frac{1}{K^{1/\alpha_0}}; 2\sqrt{2(3 + 2\alpha_0)} \right\}. \quad (26)$$

Тогда для $x \in [0, x_0]$ справедливо неравенство

$$\Psi_n(x) \leq 4K. \quad (27)$$

Доказательство. Пусть $x \in [0, x_0]$ и пусть

$$\|\Psi_n\| = \max_{x \in [0, x_0]} |\Psi_n(x)|.$$

Тогда из (23) с учетом неравенств $y_{n-1} \geq 2$ и (21) будем иметь следующую оценку

$$\begin{aligned} \|\Psi_n\| &\leq K + \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi \left[I(y_{n-1})t^{\alpha_0} + \frac{\sqrt{(y_{n-1}-2)y_{n-1}}}{y_{n-1}^3} t^{2+\alpha_0} \right] dt \leq \\ &\leq K + \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi \left[\frac{\Psi_{n-1}^3 t^{4\alpha_0}}{4} + \frac{\sqrt{(y_{n-1}-2)y_{n-1}}}{y_{n-1}^3} t^{2+\alpha_0} \right] dt. \end{aligned}$$

Используя неравенство

$$\sqrt{(y_{n-1} - 2)y_{n-1}} \leq z_{n-1} = \Psi_{n-1} t^{\alpha_0},$$

которое сразу следует из равенства (4), получим

$$\begin{aligned} \|\Psi_n\| &\leq K + \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi \left(\frac{t^{4\alpha_0}}{4} \|\Psi_{n-1}\|^3 + \frac{\|\Psi_{n-1}\| t^{2+2\alpha_0}}{2^3} \right) dt = \\ &= K + \int_0^{x_0} \frac{\xi^{2\alpha_0-1}}{4(4\alpha_0+1)} \|\Psi_{n-1}\|^3 + \int_0^{x_0} \xi \frac{d\xi \|\Psi_{n-1}\|}{8(3+2\alpha_0)} = \\ &= K + \frac{x_0^{2\alpha_0}}{8\alpha_0(4\alpha_0+1)} \|\Psi_{n-1}\|^3 + \frac{x_0^2 \|\Psi_{n-1}\|}{16(3+2\alpha_0)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\|\Psi_n\| \leq K + \frac{x_0^{2\alpha_0}}{8\alpha_0(4\alpha_0+1)} \|\Psi_{n-1}\|^3 + \frac{x_0^2 \|\Psi_{n-1}\|}{16(3+2\alpha_0)}. \quad (28)$$

Далее доказательство будем вести по индукции. Для $\Psi_0 = K$ оценка (27) очевидно выполнена. Пусть теперь оценка (27) выполнена для Ψ_{n-1} , т.е.

$$\|\Psi_{n-1}\| \leq 4K.$$

Докажем, что оценка (27) справедлива для $\Psi_n(x)$. Действительно, из (28) с учетом оценки для $\|\Psi_{n-1}\|$ имеем, что

$$\|\Psi_n\| \leq K + \frac{x_0^{2\alpha_0}}{8\alpha_0(4\alpha_0+1)} 4^3 K^3 + \frac{x_0^2 4K}{16(3+2\alpha_0)}. \quad (29)$$

Далее, во втором слагаемом правой части неравенства (29) заменим $x_0^{2\alpha_0}$ на большее выражение из (26)

$$x_0^{2\alpha_0} \leq \frac{(4\alpha_0+1)\alpha_0}{8} \frac{1}{K^2},$$

а в третьем слагаемом (29) заменим x_0^2 на следующее большее выражение из (26):

$$x_0^2 \leq 4 \cdot 2(3+2\alpha_0).$$

В результате получим оценку

$$\|\Psi_n\| \leq K + K + 2K = 4K.$$

Тем самым лемма 5 доказана.

§ 3.4. Сходимость метода последовательных приближений

Докажем следующее утверждение.

Лемма 6. Функциональная последовательность, определенная с помощью рекуррентной формулы (23), сходится равномерно по $x \in [0, T]$ и по параметру $K \in [0, M]$ для любых конечных T и M к непрерывной на $[0, \infty)$ по x и параметру K функции $\Psi(x)$, которая удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению (20). Для функции $\Psi(x)$ справедливы следующие оценки:

$$\Psi(x) \geq K; \quad x \in [0, +\infty); \quad (30)$$

$$\Psi(x) \leq 4K; \quad x \in [0, x_0), \quad (31)$$

где x_0 находится по формуле (24).

Доказательство. Рассмотрим разность $\Psi_{n+1} - \Psi_{n+2}$. Используя формулу (21) для Ψ_{n+1} и Ψ_{n+2} , получим, что

$$\Psi_{n+1} - \Psi_{n+2} = \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi [F(y_n, t) - F(y_{n+1}, t)] t^{2+\alpha_0} dt.$$

Оценим теперь следующую разность, используя теорему Лагранжа о конечных приращениях:

$$\begin{aligned} F(y_n, t) - F(y_{n+1}, t) &= \left. \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=z^*} (z_n - z_{n+1}) = \\ &= \left. \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=z^*} (\Psi_n - \Psi_{n+1}) t^{\alpha_0}, \end{aligned}$$

где $z^* \in (z_n, z_{n+1})$. Дифференцируя F по y , получим

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\sqrt{y-2}}{t^2 \sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{y-2} y^{5/2}} - \frac{5\sqrt{y-2}}{2y^{7/2}}.$$

Используя (6), имеем равенство

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1 - \frac{2}{y}}{t^2} + \frac{1}{2y^3} - \frac{5\left(1 - \frac{2}{y}\right)}{2y^3}. \quad (32)$$

Оценим $\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z}$ в точке $z^* \in (z_n, z_{n+1})$. Из леммы 1 известно, что $y(z)$ — монотонная функция по z , поэтому $y(z^*) \in (y_n, y_{n+1})$, где

$y_n = y(z_n)$, $y_{n+1} = y(z_{n+1})$, а $z^* \in (z_n, z_{n+1})$. Покажем теперь, что $y_n \geq 2$ для $n = 1, 2, \dots$. Действительно, из неравенства (24) получаем

$$z_n = \Psi_n t^{\alpha_0} \geq K t^{\alpha_0} \geq 0.$$

Заметим, что в силу леммы 1 при $z \geq 0$ выполняется неравенство $y(z) \geq 2$, то есть

$$y_n = y(z_n) \geq 2.$$

Из этого неравенства с учетом того, что $y(z^*) \in (y_n, y_{n+1})$, следует, что

$$y(z^*) \geq 2. \quad (33)$$

Используя равенство (32) и оценку (33), оценим $\left. \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=z^*}$ при $t \geq x_0$, где x_0 определяется по формуле (26)

$$\left| \left. \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=z^*} \right| \leq \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2 \cdot 2^3} + \frac{5}{2 \cdot 2^3} \leq \frac{1}{x_0^2} + \frac{3}{8}. \quad (34)$$

При $t \in (0, x_0)$ оценим выражение (32), используя неравенство (33), следующим образом:

$$\left| \left. \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=z^*} \right| \leq \frac{y(z^*) - 2}{y(z^*)t^2} + \frac{1}{2 \cdot 2^3} + \frac{5}{2 \cdot 2^3} \leq \frac{y(z^*) - 2}{2t^2} + \frac{3}{8}. \quad (35)$$

Применяя неравенство (13), запишем

$$y(z^*) - 2 \leq \frac{(z^*)^2}{2}.$$

Далее, из неравенства (25) имеем при $t \in (0, x_0]$, что

$$z_n(t) = \Psi_n(t)t^{\alpha_0} \leq 4Kt^{\alpha_0}.$$

Однако по условию $z^* \in (z_n, z_{n+1})$, поэтому

$$z^* \leq 4Kt^{\alpha_0}.$$

Следовательно,

$$y(z^*) - 2 \leq \frac{(4Kt^{\alpha_0})^2}{2} = 8K^2 t^{2\alpha_0}.$$

Из формулы (35), используя только что полученное неравенство, имеем при $t \in (0, x_0]$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=z^*} \leq 4K^2 t^{2\alpha_0-2} + \frac{3}{8}. \quad (36)$$

Учитывая неравенство (36) при $t \in (0, x_0]$ и неравенство (34) при $t \geq x_0$, окончательно получим для $t \in (0, \infty)$, $K \in [0, M]$, где M — произвольное положительное число, что

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=z^*} \leq At^{2\alpha_0-2} + B, \quad (37)$$

где постоянные A и B зависят лишь только от M .

Возвращаясь к оценке $|\Psi_{n+1} - \Psi_{n+2}|$, воспользуемся оценкой (37). В результате получим, что

$$\begin{aligned} |\Psi_{n+1} - \Psi_{n+2}| &\leq \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi |F(y_n, t) - F(y_{n+1}, t)| t^{2+\alpha_0} dt = \\ &= \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi \left| \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=z^*} |\Psi_n - \Psi_{n+1}| t^{2+\alpha_0} dt \leq \\ &\leq \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi (At^{4\alpha_0} + Bt^{2\alpha_0+2}) |\Psi_n - \Psi_{n+1}| dt \leq \\ &\leq \int_0^x \frac{A\xi^{4\alpha_0} + B\xi^{2\alpha_0+2}}{\xi^{2\alpha_0+2}} d\xi \int_0^x |\Psi_n - \Psi_{n+1}| dt \leq \\ &\leq D \int_0^x |\Psi_n - \Psi_{n+1}| dt, \end{aligned}$$

при $x \in [0, T]$, где $D = \int_0^T (A\xi^{2\alpha_0-2} + B) d\xi$.

Итак, при $x \in [0, T]$

$$|\Psi_{n+1} - \Psi_{n+2}| \leq D \int_0^x |\Psi_n - \Psi_{n+1}| dt, \quad (38)$$

где постоянная D зависит лишь от T и M .

Заметим, что функция $\Psi_1 = \Psi_1(x, K)$ по лемме 4 непрерывна на $[0, \infty) \times [0, \infty)$ по (x, K) , следовательно, Ψ_1 равномерно ограничена при $x \in [0, T]$, $K \in [0, M]$. Поэтому существует такая постоянная N , зависящая только от T и M , что

$$|\Psi_0 - \Psi_1| \leq N \quad (39)$$

для $x \in [0, T]$, $K \in [0, M]$ (при этой оценке было учтено, что $\Psi_0(x_0) \equiv K$).

Применяя неравенство (39) и итерируя неравенство (38), получим, что

$$|\Psi_n - \Psi_{n+1}| \leq D^n \frac{Nx^n}{n!} \leq \frac{D^n NT^n}{n!}. \quad (40)$$

Следовательно, из признака Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов [3] следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\Psi_n - \Psi_{n+1}) = f(x) \quad (41)$$

сходится равномерно по $x \in [0, T]$ и $K \in [0, M]$.

Из равномерной сходимости ряда (41) следует равномерная по x и K сходимость функциональной последовательности $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ к функции $\Psi(x)$. В силу леммы 4 функции $\Psi_n(x)$ непрерывны по x и параметру K , поэтому предельная функция $\Psi(x)$ непрерывна по $(x, K) \in [0, T] \times [0, M]$.

Поскольку числа T и M произвольны, получаем, что $\Psi(x, K)$ непрерывна по $(x, K) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$.

Докажем теперь, что $\Psi(x, K)$ удовлетворяет уравнению (20). Отметим, во-первых, что интеграл (20) от функции $\Psi(x, K)$ существует. Это доказывается точно также, как в лемме 4 доказывалось существование интеграла (20) от функции $\Psi_{n-1}(x)$ — при этом используются только непрерывность и неотрицательность функции $\Psi_{n-1}(x)$ и неравенство $y_{n-1} \geq 2$. Непрерывность и неотрицательность функции $\Psi(x, K)$ известна, а неравенство $y(z) \geq 2$ следует из леммы 1, так как $z = \Psi x^{\alpha_0} \geq 0$.

Рассмотрим теперь разность

$$\int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi [F(y, t) - F(y_{n-1}, t)] t^{2+\alpha_0} dt.$$

Оценивая эту разность точно также как было оценено выражение

$$\int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi [F(y_n, t) - F(y_{n+1}, t)] t^{2+\alpha_0} dt,$$

получаем, что

$$\left| \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi [F(y, t) - F(y_{n-1}, t)] t^{2+\alpha_0} dt \right| \leq D \int_0^x |\Psi - \Psi_{n-1}| dt.$$

Следовательно, для фиксированного x справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi [F(y, t) - F(y_{n-1}, t)] t^{2+\alpha_0} dt = \\
 &= \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi F(y, t) t^{2+\alpha_0} dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi F(y_{n-1}, t) t^{2+\alpha_0} dt = \\
 &= \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi F(y, t) t^{2+\alpha_0} dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(x) + K = \\
 &= \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0+2}} \int_0^\xi F(y, t) t^{2+\alpha_0} dt - \Psi(x) + K.
 \end{aligned}$$

Следовательно, функция $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению (20). Переходя к пределу в неравенствах (24) и (27) при $n \rightarrow \infty$, получим, соответственно, неравенства (30) и (31).

Лемма 6 доказана.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 7. Функция $\Psi(x, K)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию (17) и условию

$$\Psi'(0) = 0. \quad (42)$$

Функция $z(x) = x^{\alpha_0} \Psi(x)$ удовлетворяет уравнению (10) и начальному условию (11), более того

$$z(x) \geq Kx^{\alpha_0}. \quad (43)$$

Функция $y(x)$, найденная по $z(x)$ с помощью формулы (4), удовлетворяет уравнению (1), начальному условию $y(0) = 2$ и неравенству

$$y(x) \geq 2. \quad (44)$$

Доказательство. Из уравнения (20) непосредственно следует, что $\Psi(0) = K$ и функция $\Psi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (17). Так как $z(x) = \Psi(x)x^{\alpha_0}$, то уравнение (10) для $z(x)$ получается заменой функции $\Psi(x)$ на $z(x)$ в уравнении (15). Далее, $z(0) = \Psi(0)0 = 0$, то есть выполнено начальное условие (11). Из неравенства (30) сразу следует неравенство (43).

В силу равенства (4), связывающего функции z и y , и леммы 1 получаем из уравнения (10) для $z(x)$, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению (1).

Из равенства $z(0) = 0$ следует, что $y(0) = 2$, а из неравенства (43) и леммы 1 следует, что

$$y(x) \geq 2,$$

то есть неравенство (44).

Осталось доказать равенство (40). С этой целью продифференцируем (20) по x :

$$\Psi'(x) = \frac{1}{x^{2\alpha_0+2}} \int_0^x F(y, t) t^{2+\alpha_0} dt. \quad (44')$$

Оценим функцию $F(y, t)$, используя неравенства (21) и (44). Получаем

$$F(y, t) = \frac{I(y)}{t^2} + \frac{1}{y^2} \sqrt{1 - \frac{2}{y}} \leq \frac{z^3}{4t^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{\Psi^3 t^{3\alpha_0-2}}{4} + \frac{1}{4},$$

то есть,

$$\begin{aligned} |\Psi'(x)| &\leq \frac{1}{x^{2\alpha_0+2}} \int_0^x \left(\frac{\Psi^3 t^{4\alpha_0}}{4} \frac{t^{2+\alpha_0}}{4} \right) dt \leq \\ &\leq x^{2\alpha_0-2} \int_0^x \frac{\Psi^3}{4} dt + \frac{x^{-\alpha_0}}{4} \int_0^x dt. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства с учетом непрерывности $\Psi(t)$ при $t \in [0, \infty)$ и неравенства (16) следует, что $\Psi'(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

Тем самым лемма 7 доказана.

§ 4. Поведение решения на бесконечности

Отметим, что в силу неравенства (41)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} z(x) = +\infty.$$

В силу леммы 1 при $z \rightarrow +\infty$ функция $y(z) \rightarrow +\infty$, поэтому из равенства (7) следует, что если будет доказано соотношение

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{z(x)}{x} = 1, \quad (45)$$

то тем самым будет доказано соотношение

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = 1.$$

Этот параграф будет посвящен доказательству утверждения о том, что существует число $K = K^*$, при котором выполнено соотношение

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{z(x)}{x} = 1.$$

С этой целью сделаем замену $z(x) = C(x)x$. Тогда для $C(x)$ получим из (10) уравнение

$$\frac{C'x^4}{x^3} = Q(y, x), \quad 0 < x < \infty, \quad (46)$$

где

$$Q(y, x) = -\frac{4}{x^2} \ln \left[\frac{\sqrt{y-2} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right] + \frac{1}{y^2} \sqrt{1 - \frac{2}{y}}. \quad (47)$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 8. Для функций $C'(x)$ и $C(x)$ справедливы равенства

$$C'(x) = \int_0^x t^3 Q(y, t) dt; \quad (48)$$

$$\begin{aligned} C(x) = C(x_0) - 4 \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^\xi t \ln \left[\frac{\sqrt{y-2} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right] dt + \\ + \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^\xi \frac{t^3}{y^2} \sqrt{1 - \frac{2}{y}} dt, \end{aligned} \quad (49)$$

где $x \in [0, +\infty)$.

Доказательство. Отметим, что

$$C' = \left(\frac{z}{x} \right)' = \left(\frac{\Psi}{x^{1-\alpha_0}} \right)' = \frac{\Psi'}{x^{1-\alpha_0}} - \frac{(1-\alpha_0)\Psi}{x^{2-\alpha_0}}.$$

Из этого равенства с учетом равенства (42) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} C'x^4 = 0. \quad (50)$$

Интегрируя уравнение (46) в пределах от 0 до x и учитывая равенство (50) получаем равенство (48).

Интегрируя равенство (48) в пределах от x_0 до x и подставляя вместо $Q(x, y)$ его выражение из формулы (47), получим равенство (49). Тем самым лемма 8 доказана.

§ 4.1. Оценка сверху функции $C(x)$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 9. Пусть $K \in [\varepsilon, M]$, где ε, M — произвольные положительные числа, $\varepsilon < M$, тогда для всех $x \geq x_0$, где x_0 определяется равенством (26), выполнено неравенство

$$C(x) \leq \theta(\varepsilon, M); \quad x \geq x_0,$$

где число $\theta(\varepsilon, M)$ зависит лишь от ε и M .

Доказательство. Отметим, что в силу неравенств (43) и (14) имеем оценку

$$y^2 \geq \frac{z^2}{8} + 4 \geq \frac{K^2 x^{2\alpha_0}}{8} + 4, \quad x \geq 0. \quad (51)$$

Далее

$$C(x_0) = \frac{z(x_0)}{x_0} = \frac{\Psi(x_0)}{x_0^{I-\alpha_0}}$$

и с помощью неравенства (31) получаем, что

$$C(x_0) \leq \frac{4K}{x_0^{I-\alpha_0}}. \quad (52)$$

С помощью формулы (49), неравенств (51) и (52) получаем оценку для $C(x)$ при $x \geq x_0$:

$$\begin{aligned} C(x) &\leq C(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^\xi \frac{t^3}{y^2} \sqrt{1 - \frac{2}{y}} dt \leq \\ &\leq \frac{4K}{x_0^{1-\alpha_0}} + \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^\xi \frac{8t^3}{K^2 t^{2\alpha_0}} dt \leq \frac{4K}{x_0^{1-\alpha_0}} + \\ &+ \frac{8}{K^2} \int_{x_0}^x \frac{1}{\xi^{2\alpha_0}} d\xi \leq \frac{4K}{x_0^{1-\alpha_0}} + \frac{8}{K^2(2\alpha_0-1)x_0^{2\alpha_0-1}} \leq \\ &\leq \frac{4K}{x_0^{1-\alpha_0}} + \frac{8}{\varepsilon^2(2\alpha_0-1)x_0^{2\alpha_0-1}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Из равенства (26) следует, что

$$x_0 \geq \left[\frac{(4\alpha_0 + 1)\alpha_0}{8} \right]^{1/2\alpha_0} \frac{1}{M^{1/\alpha_0}},$$

если M достаточно велико; из (53) получаем, что

$$C(x) \leq \theta(\varepsilon, M) \quad (54)$$

для $x \geq x_0$. Лемма 9 полностью доказана.

§ 4.2. Существование предела функции

$C(x)$ при $x \rightarrow +\infty$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 10. Существует равномерный по $K \in [\varepsilon, M]$, где ε и M — произвольные положительные числа, предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x, K) = C^*(K), \quad (55)$$

причем функция $C^*(K)$ непрерывна по $K \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Для доказательства существования равномерно-го предела (55) оценим по критерию Коши интегралы в формуле (49). Оценим вначале второй интеграл в формуле (49). Используя неравенство (51), получим для $x'' > x' > 0$, $K \in [\varepsilon, M]$ соотношения

$$\begin{aligned} \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^\xi \frac{t^3}{y^2} \sqrt{1 - \frac{2}{y}} dt &\leq \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^\xi \frac{8t^{3-2\alpha_0}}{K^2} dt \leq \\ &\leq \frac{8}{\varepsilon^2} \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha_0}} \leq \frac{8}{\varepsilon^2(2\alpha_0-1)(x')^{2\alpha_0-1}}. \end{aligned}$$

Следовательно, второй интеграл в (49) сходится равномерно по $K \in [\varepsilon, M]$ при $x \rightarrow +\infty$.

Оценим теперь первый интеграл в формуле (49). Пусть $x'' > x' \geq x_0$. Тогда, используя неравенства

$$\begin{aligned} \sqrt{2+y-2} &\leq \sqrt{2} + \sqrt{y-2} && \text{для } y \geq 2; \\ \ln(1+u) &\leq u && \text{для } u \geq 0, \end{aligned}$$

получим оценку

$$\begin{aligned} \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^\xi t \ln \left[\frac{\sqrt{y-2} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right] dt &\leq \\ &\leq \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^\xi t \ln \left[\frac{\sqrt{y-2} + \sqrt{2+y-2}}{\sqrt{2}} \right] dt \leq \\ &\leq \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^\xi t \ln \left[\frac{2\sqrt{y-2}}{\sqrt{2}} + 1 \right] dt \leq \sqrt{2} \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^\xi \sqrt{y-2} t dt \end{aligned}$$

Применяя неравенство (12) для $\sqrt{y-2}$, неравенство (54) для $C(t)$

при $t \geq x_0$ и неравенство (52) для $C(t)$ при $t = x_0$ получим, что

$$\begin{aligned} & \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^\xi t \ln \left[\frac{\sqrt{y-2} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right] dt \leq \sqrt{2} \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^\xi \sqrt{zt} dt = \\ & = \sqrt{2} \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^\xi \sqrt{C(t)} t^{3/2} dt \leq \sqrt{2} \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_0^{x_0} \sqrt{z(x_0)t} dt + \\ & \sqrt{2} \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_{x_0}^\xi \sqrt{C(t)} t^{3/2} dt \leq \sqrt{\frac{2K}{x_0^{1-\alpha_0}}} \frac{x_0^{5/2}}{3(x')^3} + \\ & \sqrt{2\theta(\varepsilon, M)} \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_{x_0}^\xi t^{3/2} dt \leq \\ & \frac{\sqrt{2M} x_0^{2+\frac{\alpha_0}{2}}}{3(x')^3} + \frac{2\sqrt{2\theta(\varepsilon, M)}}{\sqrt{x''}}. \end{aligned} \quad (56)$$

Из формулы (26) следует, что $x_0 \leq 2\sqrt{2(3+\alpha_0)}$, следовательно, из неравенства (56) следует, что первый интеграл в формуле (49) сходится равномерно по $K \in [\varepsilon, M]$. Итак, предел (55), равномерный по $K \in [\varepsilon, M]$, существует.

Далее заметим, что функция $C(x, K) = \frac{z(x, K)}{x} = \frac{\Psi(x, K)}{x^{1-\alpha_0}}$ непрерывна по K при фиксированном x в силу леммы 6. В силу равномерной сходимости $C(x, K)$ при $x \rightarrow \infty$ следует, что $C^*(K)$ непрерывна по $K \in [\varepsilon, M]$. В силу произвольности ε и M следует, что $C^*(K)$ непрерывна на $(0, \infty)$.

Лемма 10 доказана.

§ 4.3. Оценка производной $C'(x)$

Докажем следующие утверждения.

Лемма 11. Для всех $x \in [0, 4]$ и для $K \in (0, \infty)$ справедливо неравенство

$$C'_x(x, K) \leq 0. \quad (57)$$

Доказательство. Продифференцируем функцию $Q(x, y)$ задаваемую формулой (47) по y . Получим, что

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{2}{\sqrt{(y-2)y}} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{y-5/2}{y^3} \right]. \quad (58)$$

Отметим, что в силу неравенства (44)

$$\frac{y-5/2}{y^3} \geq -\frac{1}{2y^3} \geq -\frac{1}{2 \cdot 2^3} = -\frac{1}{16},$$

а поэтому при $0 \leq x \leq 4$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{y - 5/2}{y^3} \geq \frac{1}{4^2} - \frac{1}{16} = 0.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\frac{\partial Q}{\partial y} \leq 0 \quad \text{при } x \in [0, 4]. \quad (59)$$

Из формулы (47) следует, что для $x > 0$

$$Q(2, x) = 0.$$

Это равенство с учетом неравенства (59) приводит к неравенству

$$Q(y, x) \leq 0; \quad x \in [0, 4].$$

Полученное соотношение вместе с формулой (48) позволяет утверждать, что $C'(x) \leq 0$ для $x \in [0, 4]$.

Тем самым лемма 11 доказана.

§ 4.4. Доказательство неравенства $C^*(K) < 1$ при некоторых числах K

Лемма 12. Существует функция $y(x, K_0)$, удовлетворяющая уравнению (1), начальному условию $y(0, K_0) = 2$ и возрастающая на $(0, \infty)$. Кривая $y(x, K_0)$ проходит через точку $(4, 5/2)$.

Доказательство. Рассмотрим семейство кривых для чисел $K \in (0, \infty)$, построенных в § 2. Заметим, что из леммы 6 следует, что функция

$$y(4, K) = \frac{\Psi(4, K)}{4^{1-\alpha_0}}$$

непрерывна по $K \in (0, \infty)$.

Далее, из неравенства (51) при $x = 4$ следует

$$[y(4, K)]^2 \geq \frac{K^2 4^{2\alpha_0}}{8} + 4.$$

Таким образом, если K достаточно велико, то значение $y(4, K)$ может быть достаточно большим.

Пусть теперь K достаточно мало. Тогда из формулы (24) следует, что

$$x = 2\sqrt{2(3 + 2\alpha_0)} > 4.$$

Но согласно неравенству (31)

$$\Psi(4, K) \leq 4K,$$

то есть

$$y(4, K) = \frac{\Psi(4, K)}{x_0^{1-\alpha_0}} \leq \frac{4K}{4^{1-\alpha_0}}.$$

Из последнего неравенства следует, что $y(4, K)$ может быть как угодно малым числом при достаточно малых K .

В силу непрерывности функции $y(4, K)$ по $K \in (0, \infty)$ и того, что $y(4, K)$ велико при больших K и $y(4, K)$ мало при малых K , следует [3], что существует такое число $K = K_0$, что

$$y(4, K_0) = 5/2.$$

Докажем теперь, что любая функция $y(x, K)$, построенная в § 2, возрастает по $x \in (0, \infty)$. Действительно, в силу формул (6) и (42)' получим, что

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_z \cdot z'_x = \sqrt{1 - \frac{2}{y}} (\Psi x^{\alpha_0})' = \\ &= \sqrt{1 - \frac{2}{y}} (\Psi' x^{\alpha_0} + \alpha_0 x^{\alpha_0-1} \Psi) > 0 \end{aligned} \quad (60)$$

при $x > 0$. Следовательно, $y(x, K)$ возрастает по $x \in (0, \infty)$.

Лемма 12 полностью доказана.

Лемма 13. Пусть $C(x) = z(x, K)/x$, функция z связана с y соотношением (4). Тогда для любого возрастающего решения $y(x, K)$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$y(0, K) = 2, \quad y(4, K) \geq 5/2$$

справедлива оценка $C'(x) \leq 0$ для $x \in (0, \infty)$.

Доказательство. Покажем, что функция $Q(y(x, K), x) \leq 0$ для всех $x \in (0, \infty)$. Действительно, в силу неравенства (59) $\frac{\partial Q}{\partial y} \leq 0$ для всех $x \in [0, 4]$. С другой стороны, при $x > 4$ справедливо неравенство

$$y(x, K) > y(4, K) \geq 5/2. \quad (61)$$

Поэтому из формулы (58) получим, что при $x > 4$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{2}{\sqrt{(y-2)y}} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{y-5/2}{y^3} \right] \leq 0.$$

Следовательно, $\frac{\partial Q}{\partial y} \leq 0$ для $x \in (0, \infty)$. Однако $Q(2, x) = 0$ при $x \in (0, \infty)$. Поэтому $Q(y(x, K), x) \leq 0$ при $x \in (0, \infty)$.

Из этого неравенства и формулы (48) следует, что $C'(x, K) \leq 0$ для $x \in (0, \infty)$.

Лемма 13 доказана.

Лемма 14 Справедливо следующее неравенство

$$C^*(K_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} C(x, K_0) < 1,$$

где K_0 — число, определенное в лемме 12.

Доказательство. Из лемм 12 и 13 следует неравенство

$$C'(x, K_0) \leq 0 \quad \text{для } x \in (0, \infty).$$

Поэтому

$$C(x, K_0) \leq C(4, K_0) = \frac{z(4, K_0)}{4}, \quad x \geq 4. \quad (62)$$

Используя формулу (4), а также то, что

$$y(4, K_0) = 5/2$$

в силу леммы 12 получим, что

$$C(4, K_0) = \sqrt{\sqrt{58} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)}.$$

Из этого равенства очевидно, что $C(4, K_0) < 1$.

Следовательно, с учетом (62) имеем, что

$$C(x, K_0) < 1$$

при $x > 4$, то есть

$$C^*(K_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} C(x, K_0) < 1.$$

Тем самым справедливость леммы 14 установлена.

§ 4.5. Оценка снизу $C^*(K)$ при больших K

В этом пункте будет доказано, что выражение $C^*(K)$ при больших K является достаточно большим.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 15. Для любого наперед заданного числа $L > 0$ существует такое достаточно большое $K > 0$, что

$$C^*(K) > L.$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что если K достаточно велико, то в силу неравенства (49) справедлива оценка

$$y(4, K) \geq 5/2$$

и поэтому в силу леммы 13

$$C'(x) \leq 0 \quad (63)$$

для $x \in (0, \infty)$.

Интегрируем теперь уравнение (46) в пределах от x_1 до ξ ; в результате получим равенство

$$C'(\xi) = C'(x_1) \frac{x_1^4}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^4} \int_{x_1}^{\xi} x^3 Q(y, t) dt.$$

Интегрируя полученное равенство в пределах от x_1 до x_2 , получим

$$C(x_2) = C(x_1) + \frac{C'(x_1)x_1^4}{(-3)} \left(\frac{1}{x_2^3} - \frac{1}{x_1^3} \right) + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_{x_1}^{\xi} t^3 Q(y, t) dt.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $x_2 \rightarrow +\infty$ с учетом леммы 10, имеем, что

$$C^*(K) = C(x_1) + \frac{C'(x_1)x_1}{3} + \int_{x_1}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_{x_1}^{\xi} Q(y, t) t^3 dt. \quad (64)$$

Оценим $C^*(K)$ снизу. В силу формулы (42') имеем, что $\Psi' \geq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} C' &= \left(\frac{\Psi}{x^{1-\alpha_0}} \right)' = \frac{\Psi'}{x^{1-\alpha_0}} - \frac{(1-\alpha_0)\Psi}{x^{2-\alpha_0}} \geq \\ &\geq -\frac{(1-\alpha_0)\Psi}{x^{2-\alpha_0}} = -\frac{(1-\alpha_0)C(x)}{x}. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу неравенств (30) имеем, что

$$\begin{aligned} C(x) + \frac{C'(x)x}{3} &\geq C(x) \left[1 - \frac{1-\alpha_0}{3} \right] \geq \\ &\geq \frac{2}{3} C(x) = \frac{2\Psi(x)}{3x^{1-\alpha_0}} \geq \frac{2K}{3x^{1-\alpha_0}}. \end{aligned} \quad (65)$$

Оценим теперь интеграл в формуле (64) снизу. Из формулы (47) следует, что

$$\int_{x_1}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_{x_1}^{\xi} Q(y, t) dt \geq -4 \int_{x_1}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_{x_1}^{\xi} \ln \left[\frac{\sqrt{y-2} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right] t dt. \quad (66)$$

Оценим сверху выражение

$$\ln \left[\frac{\sqrt{y-2}\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right] \leq \ln \left(\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right) = \ln \sqrt{2} + \frac{\ln y}{2}. \quad (67)$$

Из формулы (26), определяющей число x_0 , следует, что при больших K

$$x_0 = \left[\frac{(4\alpha_0 + 1)\alpha_0}{8} \right]^{1/2\alpha_0} \frac{1}{K^{1/\alpha_0}}.$$

Поэтому в силу равенства (31)

$$\begin{aligned} C(x_0) &= \frac{\Psi(x_0)}{x_0^{1-\alpha_0}} \leq \frac{4K}{K^{\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}}} \left(\frac{8}{(4\alpha_0+1)\alpha_0} \right)^{\frac{\alpha_0-1}{2\alpha_0}} = \\ &= K^{1/\alpha_0} 4 \left(\frac{8}{(4\alpha_0+1)\alpha_0} \right)^{\frac{\alpha_0-1}{2\alpha_0}} = K^{1/\alpha_0} a_1, \end{aligned}$$

где a_1 — постоянная, не зависящая от K .

Используя неравенство (12) и полученную оценку для $C(x_0)$, имеем в силу (63) при $x > x_0$, что

$$y(x) < 2 + z(x) = C(x)x + 2 \leq C(x_0)x + 2 \leq K^{1/\alpha_0} x a_1 + 2. \quad (68)$$

В дальнейшем будем полагать, что $x_1 \geq 1$. Тогда для $x \geq x_1$ получим из (68) неравенство

$$y(x) \leq K^{1/\alpha_0} a_2 x,$$

где a_2 — постоянная, не зависящая от K .

Используя неравенство (67) и только что полученное неравенство, имеем, что

$$\ln \left[\frac{\sqrt{y-2}\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right] \leq \ln \sqrt{2} + \frac{\ln a_2}{2} + \frac{\ln K^{1/\alpha_0}}{2} + \frac{\ln x}{2} \leq a_3 + \frac{\ln x}{2} + \frac{\ln K^{1/\alpha_0}}{2}$$

где $a_3 = \ln \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln a_2$.

Подставляя полученное неравенство в (66), получим

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_{x_1}^{\xi} Q(y, t) dt &\geq -4 \int_{x_1}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^4} \int_{x_1}^{\xi} t \left[a_3 + \frac{\ln t}{2} \right] dt - \\ &- \frac{\ln K^{1/\alpha_0}}{2} \int_{x_1}^{\infty} \int_{x_1}^{\xi} t dt \geq -(\ln K) a_4 - a_5, \end{aligned}$$

если $x_1 \geq 1$ и не зависит от K ; где a_4, a_5 — положительные постоянные, не зависящие от K .

Учитывая оценку (65) при $x = x_1$ и полученную оценку, имеем

$$C^*(K) \geq \frac{2K}{3x_1^{1-\alpha_0}} - a_4 \ln K - a_5.$$

Из этой оценки видно, что $C^*(K)$ при достаточно больших K будет больше любого наперед заданного числа.

Лемма 15 полностью доказана.

§ 4.6. Существование числа $K = K^*$ такого, что $C^*(K^*) = 1$

Согласно лемме 14 существует число $K = K_0 > 0$ такое, что $C^*(K_0) < 1$. В силу леммы 15 существует число $K = K_1 > 0$ такое, что $C^*(K_1) > 1$.

В силу леммы 10 функция $C^*(K)$ непрерывна по $K \in (0, \infty)$. Следовательно, существует такое число $K^* \in (K_0, K_1)$, что $C^*(K^*) = 1$.

Теперь уже имеются все предпосылки для доказательства основного результата.

Доказательство теоремы. Берем в качестве решения задачи (1), (2) функцию $y(x, K^*)$, где K^* выбрано, удовлетворяющим условиям п. 6. Тогда $y(x, K^*)$ в силу леммы 7 удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию $y(0, K^*) = 2$. Условие $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = 1$ функция $y(x, K^*)$ удовлетворяет в силу того, что

$$1 = C^*(K^*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{z(x, K^*)}{x}$$

а также согласно рассуждениям в начале § 3. Теорема полностью доказана.

Литература

1. *Логунов А. А., Власов А. А.* Пространство Минковского как основа теории гравитации, М.: Изд-во МГУ, 1984
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных, М.: Наука, 1981
3. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ, М.: Наука, 1979
4. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения, М.: Наука, 1980
5. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: Наука, 1974
6. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1964