

УДК 51-74

Структурные линии и критические точки цифровых изображений¹

В. А. Садовничий, И. Антонио, О. Р. Мусин, О. В. Селезнев, В. М. Староверов

1. Введение

При анализе сигнала (функции одной переменной) во многих случаях достаточно иметь информацию о его точках локальных минимумов и максимумов. Расположение экстремальных точек определяет общее поведение функции. Обобщением этого подхода является добавление информации о критических точках высших производных функции.

В случае функции двух и более переменных критические точки функции не определяют ее поведения, так как они не определяют разбиения области на участки, внутри которых нет критических точек. Такое разбиение задают сепаратриссы градиентного векторного поля. Отметим, что впервые этот подход появился в работах выдающегося физика XIX века Дж. К. Максвелла [7], которые предвосхитили появление аналогичных современных теорий в гладком случае.

В прикладных задачах обычно функция задается дискретно. Например, цифровое изображение можно рассматривать, как функцию, заданную на конечной решетке. Если значение этой функции показывает уровень яркости изображения, то такое изображение называется *серым* (*gray-scale*) [4]. Обычно, множество значений функции тоже дискретно и принимает значения $0, \dots, 255$. В дальнейшем мы не будем разделять понятия дискретно—заданной функции и изображения, т.е. когда мы будем говорить *изображение*, то будем иметь в виду функцию, заданную в узлах плоской квадратной решетки $N_x \times N_y$.

Таким образом, для приложений возникает задача построения дискретного аналога гладкой теории анализа функции. В последние 20

¹В сб.: Избранные вопросы математики, механики и их приложений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999 г., с. 438-462.

лет появилась серия работ, преимущественно картографов и специалистов по обработке изображений, посвященных этой тематике ([2], [3], [5], [10], [11], [15] и др.). В этих работах приводятся некоторые подходы к решению указанной задачи, иногда без должного математического обоснования.

В последние годы нами был опубликован ряд теоретических и прикладных результатов по этой тематике [8], [9], [12], [13]. В частности, в работах [12], [13] были предложены алгоритмы по выделению критических точек и структурных линий, упрощению и сглаживанию изображений, восстановлению изображений по структурным линиям и т.д.

Целью данной работы является математическое описание и обоснование дискретного аналога теории Максвелла. Здесь не дается детального описания алгоритмов и экспериментальных результатов, так как они достаточно полно приведены в указанных выше работах.

В §2 дается краткое описание теории Максвелла в гладком случае. §3 посвящен определениям критических точек и областей в дискретном случае.

Далее в §§4–6 рассмотрены понятия *бассейнов* и *холмов*, *линий тока*, *водоразделов* и *тальвегов* в дискретном случае. Рассматриваются три основных подхода к их определению и показывается их взаимосвязь. Первое определение (§4) опирается на понятия *скатывания* или *дискретного градиента*.

Второй подход (§5) основан на работе Максвелла (см. §2). Его можно назвать дискретным аналогом алгоритма Максвелла. Также как и в гладком случае, структурные линии (тальвеги и водоразделы) определяются как “линии тока”, начинающиеся или заканчивающиеся в седлах.

Третий подход (§6) менее очевиден. В некотором смысле, он является комбинацией первого и второго подходов. Для этого узлы решетки, на которых определена функция, сортируются по возрастанию функции. Далее точки структурных линий ищутся, как точки “соприкосновения” различных связанных компонент линий уровня.

В последнем параграфе приведены некоторые приложения построенной теории для сжатия изображений. Данная задача является одной из наиболее важных и актуальных для обработки изображений. Проблема сжатия изображения состоит в отбрасывании избыточной информации, хранящейся в стандартном представлении изображения. При этом, оставшейся информации должно хватить для достаточно точного восстановления исходного изображения.

Имеется ряд подходов для сжатия изображения. Они разбиваются

на два класса: с потерей и без потери информации. Второй вариант сжатия широко используется, например, в разнообразных программах сжатия текстовой и другой информации.

Для изображений существует ряд форматов их хранения, использующих сжатие без потерь (PCX, TIFF, GIF и др.). Известные алгоритмы сжатия изображений с потерями основаны на отбрасывании несущественных гармоник преобразования Фурье (например, JPEG), использовании теории всплесков (wavelets), фрактальной геометрии и др.

В настоящей работе мы предлагаем оригинальный подход для сжатия изображения с потерями. Идея этого подхода состоит в выделении структурных линий упрощенного изображения и дальнейшего сжатия выделенных данных. Геометрическая идея этого метода является более ясной, чем в других подходах. Она заключается в отборе наиболее существенных точек и линий, определяющих поведение функции.

2. Теория Максвелла: структурные линии и критические точки гладких функций

На современных топографических картах помимо горизонталей (линий уровня) рельефа также отображены вершины, впадины, линии тальвегов (линии, проходящие по дну оврагов и долин) и водоразделов. Эти точки и линии не только улучшают качество изображения рельефа, но и чрезвычайно важны при его анализе. В ряде работ приведены алгоритмы построения этих объектов по цифровым изображениям и моделям рельефа ([2], [3], [5], [9], [10], [11], [15] и др.). В частности, в работе [3] не только дается описание некоторых алгоритмов и способов отображения рельефа, но и приводится интересный исторический обзор. Оказывается, что этими задачами интересовались такие известные ученые XIX века, как А. Кэли и Дж.К. Максвелл.

Максвелл в 1870 году [7] предложил метод построения тальвегов и водоразделов. Предположим для простоты, что на плоской области задана невырожденная (морсовская) функция $y = f(x)$. У этой функции имеется три типа критических точек: вершины (максимумы), впадины (минимумы) и седловые точки. Назовем *бассейном* $B(f, p)$ точки минимума p подмножество точек области определения функции f из которых двигаясь вниз по линиям тока (решение уравнения $\dot{x} = -\nabla f(x)$) можно попасть в точку p . Несложно показать, что $B(f, p)$ — односвязная область на плоскости, границу которой называют *водоразделом* (*линией водораздела*). Максвелл указал алгоритм

построения множества линий водораздела. Для этого из каждой седловой точки функции f “выпускаются” вверх линии тока (т.к. функция морсовская, то из каждого седла выходит ровно две линии тока). Линия тока, начинающаяся в седле обязательно закончится в точке максимума. Таким образом, граница любого бассейна состоит из набора линий тока, соединяющих седла и максимумы (Рис.1). На современном языке, такие линии называются сепаратриссами градиентного векторного поля функции f .

Для функции $y = -f(x)$ ее минимумы являются максимумами функции f , а максимумы — минимумами. Можно рассмотреть бассейны функции $-f$. Максвелл называет эти бассейны *холмами* (hills) функции f , как он пишет, из-за того, что не нашел лучшего названия для этого объекта. Тогда, границы холмов состоят из тальвегов — сепаратрисс, соединяющих седла и точки минимума (Рис.1).

Набор тальвегов и водоразделов (мы, вслед за картографами, будем его называть *структурными линиями функции f*), задает разбиение области определения функции на подобласти, внутри которых нет критических точек f . Наверное, справедливо называть эти подобласти — *ячейками Максвелла*. Имеются и другие названия, например, *топографическая структура поверхности* [5], [9], [15].

Статья выдающегося физика Дж.К. Максвелла появилась задолго до работ Морса, в которых заложены основы теории Морса, и современных работ по теории особенностей. Вместе с тем, в этой статье для функций двух переменных содержатся некоторые элементы современной теории. Интересно, что эту работу “открыли” не математики (см., например, [3], [10]) и справедливости ради следует ее включить в оборот современной математики.

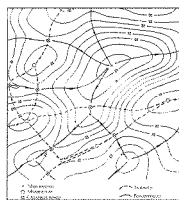


Рис. 1

3. Критические точки дискретных функций

Для построения дискретного аналога теории Максвелла необходимо определить понятие критической точки для функции заданной дискретно. Под дискретно-заданной функцией f на многообразии M мы понимаем некоторое клеточное разбиение этого многообразия в каждой вершине v которого задано число $f(v)$. В работе [8] приводятся определения дискретного векторного поля, критических точек функции и их индексов, доказаны дискретные аналоги теоремы о

топологической инвариантности суммы индексов. Проведем сначала краткую выдержку из этой работы.

Пусть t — триангуляция в n -мерном многообразии M , и f — функция заданная в вершинах. Значения функции в вершинах триангуляции позволяют однозначно (по линейности) продолжить эту функцию на все многообразие. Предположим для простоты, что значения f на соседних вершинах различны (т.е. если вершины v и u соединены в триангуляции t ребром, то $f(v) \neq f(u)$). Из этого условия следует, что все критические точки будут изолированными. Обозначим через $St(v)$ звезду вершины v в триангуляции t , т.е. объединение всех симплексов у которых среди вершин имеется v . Заметим, что полиэдр $St(v)$ гомеоморфен n -мерному шару D^n , а его граница гомеоморфна, соответственно, $n - 1$ -мерной сфере S^{n-1} . Рассмотрим ограничение функции f на границе $St(v)$ и обозначим через $F_-(v)$ ее подмножество на котором значение функции меньше чем $f(v)$. Тогда, по определению, *точка v не является критической если и только если $F_-(v)$ гомеоморфно шару D^{n-1} .*

Несложно описать все типы критических точек в двумерном случае, $n = 2$. Если множество $F_-(v)$ — пустое множество, то вершина v — точка минимума, а если гомеоморфно окружности, то v — точка максимума. Если же $F_-(v)$ состоит m интервалов и $m > 1$, то v — седловая точка *индекс* которой равен $1 - m$. Заметим, что если $m = 1$, то точка не критическая и ее индекс равен 0, а для локальных минимумов и максимумов — индекс равен 1.

Более сложная ситуация в трехмерном случае. Вершина v не является критической если множество $F_-(v)$ гомеоморфно кругу D^2 . Если множество $F_-(v)$ — пусто, то вершина v — точка минимума, а если гомеоморфно сфере S^2 , то v — точка максимума. В остальных случаях тип критической точки определяется взаимным расположением “овалов” на сфере — границ множества $F_-(v)$, состоящего из набора окружностей.

Мы не будем более подробно останавливаться на случае высших размерностей, так как для обработки изображений нас интересует случай размерности два. Под изображением мы будем понимать функцию f , заданную в узлах плоской решетки $N_x \times N_y$.

Для определения критических и не критических вершин цифрового изображения рассмотрим вершины соседние с v . (Если v находится внутри решетки, то соседних вершин ровно 4.) Пометим соседнюю вершину u знаком “+” если $f(v) > f(u)$ и знаком “−” в противном случае. Граница $St(v)$ гомеоморфна окружности, если v лежит внутри решетки, и гомеоморфна интервалу для граничных вершин. Обо-

значим через n_- число связных компонент множества F_- , т.е. число связных компонент вершин со знаком $-$ на границе $St(v)$, соответственно через n_+ число вершин со знаком $+$. Тогда вершина v не является критической если и только если $n_+ + n_- = 2$, и вершина является седлом если $n_+ + n_- > 2$. Заметим, что если число $n_+ + n_-$ меньше чем 2, то вершина либо является точкой минимума ($n_- = 0$), либо точкой максимума ($n_+ = 0$). Таким образом, все узлы решетки могут быть разбиты на четыре класса: максимумы, минимумы, седла и некритические точки.

Несложно расширить эти определения на случай, когда значения у соседних вершин одинаковые. Для этого рассматривается связное множество V — узлов решетки, значение функции на котором постоянно. Можно также определить множество $St(V)$ — объединение звезд вершин, входящих в V , и числа n_+, n_- , как число связных компонент вершин со знаком $+$ и $-$ на границе $St(V)$. Определение типа критической точки по числам n_+ и n_- аналогично предыдущему случаю. Ниже приведены примеры некритических точек и областей.

$$\begin{array}{cccccc}
 + & & + & + & & + & & - \\
 - & o & + & - & o & o & + & + & o & - & - & o & + \\
 & - & & & - & + & & + & & & & - &
 \end{array}$$

Для проверки корректности наших определений для цифровых изображений рассмотрим решетку $N \times N$ в узлах которой в шахматном порядке расставлены числа 0 и 1. Всякий узел решетки такой функции является экстремальным, т.е. локальным минимумом если узлу приписан 0 и локальным максимумом, если в узле стоит 1.

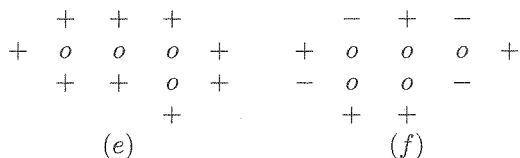
$$\begin{array}{ccccc}
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array}$$

Мы уже касались понятия индекса градиентного векторного поля в дискретном случае. Если функция задана на триангуляции, то верна теорема, что *сумма индексов ее критических точек является топологическим инвариантом и равна эйлеровой характеристике многообразия M* . Посмотрим, что происходит в нашем примере. Так как любой узел решетки является экстремумом, то его индекс равен 1. Стало быть, сумма индексов больше чем $(N - 1) \times (N - 1)$. Заметим,

что эйлерова характеристика односвязного компактного множества на плоскости равна 1. Получаем противоречие с теоремой о сумме индексов критических точек.

Этот пример показывает, что не только вершины, но и ячейки (грани) разбиения могут быть критическими. Более строго это означает, что грань C является критической, если у ограничения функции на вершины C более одного минимума. Здесь вершина v — локальный минимум, если $f(v) < f(u)$ и $f(v) < f(w)$, где u и w — две соседние вершины v многоугольника C . Индекс грани C может быть корректно определен как величина равная $1 - k$, где k — число локальных минимумов этой грани. При таком определении оказывается, что сумма индексов критических точек и граней равна эйлеровой характеристике M [8]. Из этой теоремы вытекает, что любое гладкое продолжение функции с границы C внутрь грани обязано иметь особенность (множество особенностей) индекса $1 - k$. В частности, в нашем примере внутри любой грани должно быть седло индекса -1 . Например, билинейное продолжение функции будет иметь седло в середине грани.

Ниже приведены примеры различных типов критических точек и областей: (a) и (e) — минимумы, (b) — максимум; (c), (d), (f) — седла. В примере (c) получается изолированная седловая точка с $n_+ = n_- = 2$, в (d) — особая грань, где направлениями стрелок указан рост функции и в (f) — “толстое” седло с $n_+ = n_- = 4$ и индексом равным -3 .



4. Дискретные аналоги градиента

Рассмотрим понятия *бассейнов* и *холмов*, *линий тока*, *водоразделов* и *талвегов* в дискретном случае. Мы рассмотрим три основных подхода к их определению. Первое определение опирается на понятие

скатывания или *дискретного градиента*. Во избежание двусмысленностей, следует отметить, что термин *дискретный градиент* здесь не имеет ничего общего с аппроксимацией градиента, рассматриваемого, например, в численных методах решения дифференциальных уравнений с частными производными. В случае дискретно-заданной функции изображения, каждая точка изображения имеет только 4 (или 8 — в зависимости от определения) соседа и под *дискретным градиентом* понимается направление наибо́льшего (в каком-то смысле) возрастания функции среди этих 4 (8) направлений.

Здесь и далее под *соседними* точками к точке изображения $p_{i,j}$ будем подразумевать четыре точки: $p_{i+1,j}$, $p_{i-1,j}$, $p_{i,j+1}$, $p_{i,j-1}$. С помощью этого понятия легко ввести термин *связной области* изображения.

Занумеруем все локальные минимумы изображения (связные под-области изображения с одинаковым значением функции изображения на них и с большим значением функции во всех соседних точках) и обозначим их D_1, D_2, \dots, D_m . Если мы будем скатываться (в каком-то разумном смысле) из произвольной точки изображения, то мы неизбежно должны будем попасть в какой-либо минимум D_i . При различных вариантах скатывания мы можем, вообще говоря, попадать в различные локальные минимумы изображения. Будем называть *бассейном* локального минимума множество точек, из которых в него можно скатиться. *Водоразделом* изображения будем называть объединение множества точек, из которых можно скатиться хотя бы в два различных минимума и множества граничных точек бассейнов. Отметим, что в некоторых случаях множество граничных точек бассейнов добавлять не обязательно.

Аналогичным способом легко ввести понятия *холмов* и *тальвегов*. Для функции изображения f холмом локального максимума будем называть бассейн функции $-f$, относящийся к соответствующему минимуму. Пересечения холмов вместе с их граничными точками, соответственно, будем называть тальвегами.

Существуют различные варианты определения понятия *скатывания*. Далее мы будем говорить, что из одной точки можно скатиться в другую, если существует последовательность соседних точек, соединяющая рассматриваемые точки, такая что из каждой точки последовательности можно скатиться в следующую. Описанную последовательность точек мы будем называть *последовательностью скатывания*. Таким образом, понятие *скатывания* необходимо определить только для соседних точек. Рассмотрим первое определение.

Определение 1. Из точки (i, j) можно скатиться в соседнюю

точку (k, l) если $f_{k,l} \leq f_{i,j}$.

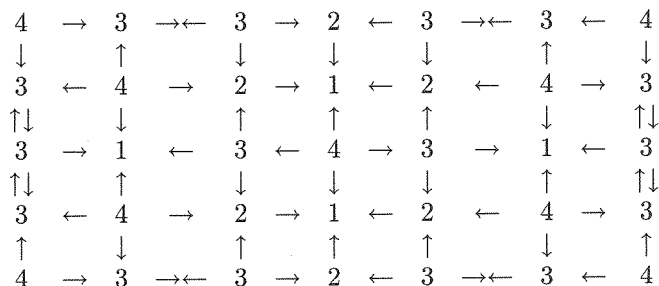
Отметим, что, на самом деле, легко воспринимаемое понятие *скатиться* мы подменили на понятие *возможности скатиться* из одной точки в другую, т.е. на задание некоторого отношения соседних точек. В каком-то смысле нас оправдывает следующее свойство, которое легко доказать от противного.

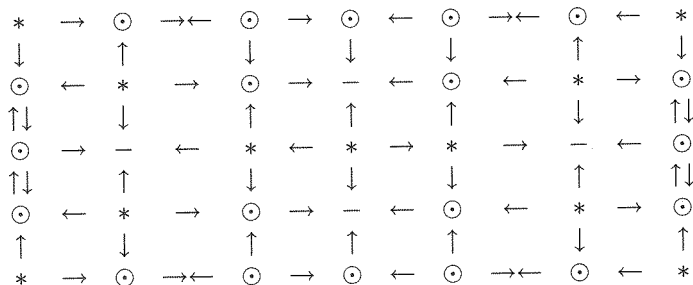
Утверждение 1. *Рассмотрим вещественно-значную функцию на конечной решетке $f_{i,j}$, тогда для любой последовательности (возможно бесконечной) соседних точек, такой что из каждой точки можно скатиться в следующую верно одно из следующих утверждений:*

- 1) либо начиная с некоторого номера все элементы последовательности находятся в одном локальном минимуме,
- 2) либо из последней точки последовательности можно скатиться еще в какую-то точку.

Практически, это означает, что если выбрать некоторый путь скатывания, то, в конце концов, мы скатимся в локальный минимум, из которого нельзя уже “выбраться”.

По Определению 1 из одной точки, вообще говоря, можно скатиться в несколько точек. Отметим, что если бы это было не так, то нашлись бы точки, отличные от точек максимума, в которые нельзя бы было ниоткуда скатиться. Проиллюстрируем данное определение на примере функции на сетке 7×5 . Стрелками отмечены направления по которым можно скатываться, звездочками помечены водоразделы, минусом — минимумы.





Из Определения 1 возможности скатывания из одной соседней точки в другую мы сразу получаем, что если из одной точки нельзя скатиться в некоторую ее соседнюю точку, то из этой соседней точки можно скатиться в исходную. Из этого следует утверждение

Утверждение 2. Для любой положительной функции $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ с ограниченным носителем все граничные точки бассейнов, определенных через Определение 1, принадлежат более, чем одному бассейну.

Отсюда следует, что в случае данного определения скатывания водоразделы можно определять просто как пересечения различных бассейнов.

Определение 1 дает бассейны слишком больших размеров, что увеличивает размеры водоразделов. Для уменьшения числа точек в бассейнах мы можем дать определение возможности скатывания, исходя из направления наибо́льшего убывания функции. Данный подход более подходит к наименованию *дискретный градиент*.

Определение 2. Из точки (i, j) можно скатиться в соседнюю точку (k, l) если

- 1) $f_{k,l} \leq f_{i,j}$,
- 2) $f_{k,l}$ не превосходит значений функции f во всех точках, соседних с точкой (i, j) .

Отметим, что в данном случае линии скатывания могут начинаться уже не только в точках максимумов. Другой проблемой является то, что бассейны могут уже не пересекаться и их границы приходится добавлять в водоразделы.

Весьма важным свойством определения возможности скатывания из одной точки в другую является свойство *обратимости*, заключающееся в следующем

Если для функции f мы можем скатиться из точки (i, j) в точку (k, l) , то для функции $-f$ мы можем скатиться из точки (k, l)

в точку (i, j) .

Легко увидеть, что Определение 1 обладает свойством обратимости, а Определение 2 — нет. Именно поэтому для Определения 1 все линии скатывания начинаются в максимумах рассматриваемой функции (что следует из Утверждения 1 и обратимости), а для Определения 2 это не верно. Более приемлемым оказывается Определение 3, которое является обратимым и так же обладает достоинствами Определения 2.

Определение 3. Из точки (i, j) можно скатиться в соседнюю точку (k, l) если

$$1) f_{k,l} \leq f_{i,j},$$

2) $f_{k,l}$ не превосходит значений функции f во всех точках, соседних с точкой (i, j) или $f_{i,j}$ больше или равно значений функции f во всех точках, соседних с точкой (k, l) .

Для приведенного примера функции все точки максимумов принадлежат водоразделам, однако легко привести пример, на котором точка максимума не входит в водоразделы. Пример такой функции приводится на следующем рисунке.

2	→←	2	→←	2	→←	2	→←	2
↑↓		↓		↓		↓		↑↓
2	→	1	→←	1	→←	1	←	2
↑↓		↑↓		↑		↑↓		↑↓
2	→	1	←	3	→	1	←	2
↑↓		↑↓		↓		↑↓		↑↓
2	→	1	→←	1	→←	1	←	2
↑↓		↑		↑		↑		↑↓
2	→←	2	→←	2	→←	2	→←	2

Максимум со значением 3 окружен всего одним локальным минимумом, что исключает его из множества бассейнов изображения. Легко видеть, что проблема не связана с краевыми эффектами изображения. Для того чтобы максимумы содержались в водоразделах функции нам придется конструировать их существенно более сложным способом. Далее, для простоты, мы будем формулировать утверждения и теоремы только для Определения 1. Введем несколько определений.

Максимальной последовательностью скатывания из точки p мы будем называть такую последовательность скатывания, начинающуюся в точке p , что из ее последней точки нельзя никуда скатиться.

Бесконечную последовательность скатывания мы так же будем называть максимальной. Как уже было доказано (Утверждение 1), любая максимальная последовательность скатывания заканчивается в некотором минимуме функции.

Пусть есть некоторое множество точек изображения s . Определим множество точек \bar{s} рекурсивно:

- 1) $s \in \bar{s}$;
- 2) точка $p \in \bar{s}$ если у нее есть соседняя точка $r \in \bar{s}$, такая что $f_p = f_r$.

Пусть есть две максимальные последовательности скатывания s_0, s_1 , начинающиеся в одной точке p и заканчивающиеся в одном минимуме. Будем говорить, что *точка x лежит между s_0, s_1* , если она находится в области, ограничиваемой \bar{s}_0, \bar{s}_1 и вышеупомянутым минимумом (вышеописанные \bar{s}_0, \bar{s}_1 , минимум в область входят). Будем обозначать эту область $P(s_0, s_1)$.

Две максимальные последовательности скатывания s_0, s_1 , начинающиеся в одной точке p , эквивалентны если они обе завершаются в одном минимуме и для любой точки x между ними найдется последовательность скатывания s_x , начинающаяся на $\partial P(s_0, s_1)$ и проходящая через x .

Далее нам понадобится следующее тривиальное свойство последовательности скатывания.

Утверждение 3. *Рассмотрим последовательность скатывания s из точки p , то s не содержит точек локальных максимумов функции f , кроме, быть может, точек максимума, которому принадлежит p (если p принадлежит какому-либо максимуму).*

Смысл определения эквивалентных последовательностей скатывания становится ясным из следующего утверждения.

Утверждение 4. *Пусть есть две максимальные последовательности s_0 и s_1 , начинающиеся в одной точке p и заканчивающиеся в одном минимуме, то они эквивалентны \iff между ними нет точек локальных максимумов, кроме, быть может, точек максимума, из которого s_0 и s_1 скатываются.*

Доказательство. Действительно, допустим, что внутри $P(s_0, s_1)$ найдется точка y , в которую нельзя скатиться с $\partial P(s_0, s_1)$. Рассмотрим тогда множество точек, с которых можно скатиться в точку y и максимум функции на этом множестве — M . Вообще говоря, максимум есть некоторое множество точек, рассмотрим тогда M_0 — неко-

торую связную компоненту M . По предположению, $M \in P(s_0, s_1)$, то получаем, что $M_0 \in P(s_0, s_1)$ и легко увидеть, что M_0 — максимум функции.

Доказательство в другую сторону очевидно. Если в $P(s_0, s_1)$ есть точки максимумов, то легко показать, что единственно возможный максимум, куда можно скатиться из p это — максимум, которому p принадлежит (если p принадлежит некоторому максимуму). Что и требовалось доказать.

Наконец, мы можем дать определение водораздела.

Определение. *Водоразделом называется множество точек, таких что для каждой из них существует не менее двух неэквивалентных максимальных последовательностей скатывания из данной точки.*

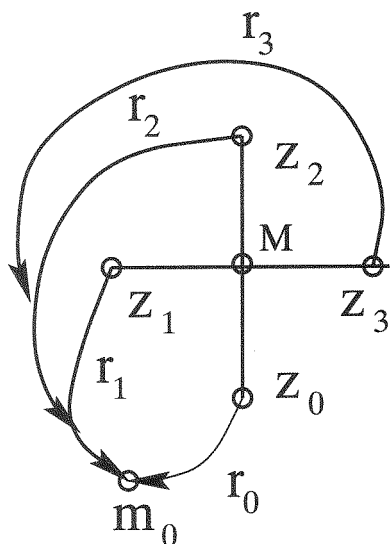
Для водоразделов, определенных данным образом, верно утверждение

Утверждение 5. *Рассмотрим любую положительную функцию $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ с ограниченным носителем, то все максимумы и седловые точки функции принадлежат ее водоразделам.*

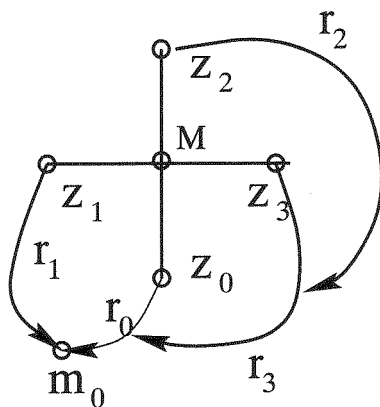
Доказательство. Принадлежность водоразделам седловых точек очевидна. Действительно, у седла должны существовать две соседние седлу точки r_0, r_1 , в которые из него нельзя скатиться, а между ними (в смысле обхода границы седла, например, по часовой стрелке) обязаны быть как минимум две точки s_0, s_1 , (разделенные, в свою очередь, r_0, r_1) в которые скатиться можно. Тогда любые две максимальные последовательности скатывания из седла, такие что одна проходит через s_0 , а другая — через s_1 , обязаны быть не эквивалентны. Действительно, даже если они заканчиваются на одном минимуме, то между ними обязана быть либо точка r_0 либо r_1 .

Пусть M — локальный максимум f . Если из него можно скатиться в два минимума, то теорема доказана. Осталось рассмотреть случай, когда из M можно скатиться только в один минимум m . Для простоты, проведем доказательство лишь для случая, когда M состоит из одной точки. В случае “толстого” максимума доказательство проводится аналогично.

Итак, пусть M — простой локальный максимум, то у него есть четыре соседние точки, в которые можно скатиться. Занумеруем их по часовой стрелке: z_0, z_1, z_2, z_3 . Пусть r_0 — некоторая последовательность скатывания из z_0 в некоторую точку $m_0 \in m$. Пусть r_1 — некоторая последовательность скатывания из z_1 в m_0 , такая, что после первого пересечения r_1 с r_0 эти последовательности совпадают. Аналогично определяются r_2 и r_3 , как последовательности скатыва-



Вариант с одинаковой ориентацией $r_{1,0}, r_{2,0}, r_{3,0}$



Вариант с различной ориентацией $r_{1,0}, r_{2,0}, r_{3,0}$

ния из соответствующих z_i в m_0 , такие, что после первого пересечения с предыдущими последовательностями они совпадают.

Для каждой пары r_i и r_j определим последовательность $r_{i,j} = \{M, r_i^0, \dots, r_i^{k_{max}}, r_j^{k_{max}}, \dots, r_j^0, M\}$. В силу своего определения, последовательность $r_{i,j}$ имеет порядок обхода *по* или *против* часовой стрелке (так как в последовательности есть хотя бы три различные точки — M, r_i^0, r_j^0 и гарантируется отсутствие “петель”). Возможны два варианта: 1) $r_{1,0}, r_{2,0}, r_{3,0}$ одной ориентации; 2) среди $r_{1,0}, r_{2,0}, r_{3,0}$ есть пары различной ориентации. Без ограничения общности, эти случаи приведены на следующем рисунке.

Рассмотрим в первом случае $P = P(r_3, r_0)$, а во втором — $P = P(r_1, r_2)$ (см. рисунок).

В любом случае $M \in P$, $M \notin \partial P$, M — максимум, следовательно в M нельзя скатиться из ∂P , что завершает доказательство теоремы.

Осталось сказать, что *структурными линиями* функции изображения мы называем объединение водоразделов функции f и функции $-f$. Легко видеть, что все критические точки f (экстремумы и седловые точки) принадлежат структурным линиям, определенным данным образом.

5. Дискретный аналог алгоритма Максвелла

Напомним основной результат работы Максвелла для гладких функций (см. §2). Для построений структурных линий рассматриваются седловые точки и из них выпускаются линии тока вниз (по направлению $-\nabla f$) и вверх (по направлению ∇f). В первом случае получаются тальвеги, а во втором — водоразделы.

В §2 были определены понятия критических точек для дискретного случая. В частности, были определены седла, состоящие, вообще говоря, из нескольких точек. Для получения дискретного аналога данного подхода зафиксируем одно из определений *скатывания* из §4.

Назовем *водоразделом* множество тех точек, из которых можно скатиться в одно из седел и, соответственно, *тальвегом* — точки, в которые можно скатиться из некоторого седла. Совокупность тальвегов и водоразделов, как и ранее, мы будем называть *структурными линиями Максвелла*. Наконец, области, границами которых являются водоразделы, называются *бассейнами*, а области, границами которых являются тальвеги, называются *холмами*.

Возникает вопрос о эквивалентности данного и предыдущего определений структурных линий.

Теорема 1. *Для определений скатывания 1 и 3 из §4 структурные линии, построенные в §4 совпадают со структурными линиями Максвелла.*

Приведем здесь только набросок доказательства этой теоремы, поскольку ее полное доказательство требует некоторых дополнительных определений (в частности, понятия *индекса граничных точек* и введения дополнительных тонкостей в определении индекса “толстых” критических точек), выходящих за рамки данной работы.

Если мы можем скатиться из некоторой точки в седло, то она лежит, с одной стороны, на водоразделе Максвелла (по его определению). С другой стороны, по Утверждению 4, седло принадлежит водоразделам, следовательно, из седла выходит две неэквивалентные последовательности скатывания, а значит и из исходной точки выходит две такие последовательности. Таким образом, точка, лежащая на водоразделе Максвелла принадлежит водоразделу §4.

Докажем теперь, что если точка x принадлежит водоразделу B из §4, то она лежит на водоразделе Максвелла. Если точка x принадлежит водоразделу B , то из точки x выходит две неэквивалентные цепочки скатывания. Возможны два варианта неэквивалентных последовательностей — либо они скатываются в один минимум, либо — в различные. Рассмотрим первый случай.

Пусть данные цепочки ограничивают некоторую область Ω , содержащую и эти цепочки. Докажем, что тогда внутри Ω найдется седло, в которое можно скатиться из x , что нам и требуется. Действительно, рассмотрим $\tilde{B} \subset B$, состоящую из точек B , в которые можно скатиться из точки x . Область \tilde{B} содержит $k > 0$ “дырок” (так как хотя бы в одну точку мы скатиться не можем), из чего следует, что ее эйлерова характеристика равна $1 - k \leq 0$. С другой стороны, найдется, по крайней мере, один локальный минимум на области Ω (не на всей области определения!), а его индекс равен 1 и если предположить, что область \tilde{B} не содержит седел, то получим, что эйлерова характеристика области положительна. Получаем противоречие. Таким образом, в области B есть хотя бы одно седло, в которое можно скатиться.

Во втором случае, когда цепочки скатываются в различные минимумы, достаточно рассмотреть множество точек, в которые можно скатиться из точки x , назовем это множество областью Ω (она связна!). Тогда Ω содержит хотя бы два минимума и если предположить, что в ней нет седел, то получим, что ее эйлерова характеристика не менее 2. С другой стороны, у области с k дырками эйлерова характеристика равна $1 - k$, получаем противоречие с условием отсутствия седел в области, что завершает доказательство теоремы.

Отметим, что здесь существенно используются понятия индекса для критических точек на границе. Одно из корректных определений может быть следующим. *Индекс локального минимума функции на границе области определения функции равен 1, а максимума равен 0.* Тогда оказывается верна теорема о равенстве суммы индексов критических точек эйлеровой характеристике области.

Для тальвегов доказательство аналогично.

6. Комбинированный подход

Рассмотрим функцию f определенную на ограниченной целочисленной решетке: $f : \{0, \dots, N_x\} \times \{0, \dots, N_y\} \rightarrow R$. Вся область определения f представляет собой объединение связных областей S_k , в которых значение функции равно константе. Область S_k вместе со значением функции на этой области мы будем называть *ячейкой* $P_k = (S_k, f_k)$. В случае функции, все значения которой в соседних точках различны, S_k состоит из одной точки и введенное понятие не отличается от стандартного определения пиксела. С другой стороны это определение позволяет нам говорить, что все особые точки любой функции состоят ровно из одной ячейки, что в дальнейшем окажется очень удобным.

Рассмотрим последовательность всех ячеек изображения $P = \{P_k\}$, упорядоченную по возрастанию значения функции f . Мы будем, последовательно перебирая элементы последовательности P , присваивать им номера бассейнов, которым ячейки принадлежат, или помечать точки, как точки водоразделов. Если занумеровать множество ячеек с локальным минимумом f в порядке возрастания значения функции в ячейках, то номер бассейна будет равен номеру ячейки в получившейся последовательности. Будем обозначать соответствующую последовательность минимумов $\{m_i\}$. Опишем алгоритм более подробно.

Изначально рассмотрим первую ячейку последовательности P . Эта ячейка является первым минимумом в последовательности $\{m_i\}$ и мы припишем P_1 номер бассейна 1. Далее, перебирая ячейки P_k , мы каждый раз будем сталкиваться с одной из следующих ситуаций:

1) у ячейки P_k нет занумерованных соседей. Это значит, что все соседние ячейки имеют большее значение функции, чем P_k . Следовательно P_k является минимумом и мы присваиваем ему номер соответствующего минимума;

2) у ячейки P_k есть ровно один занумерованный сосед или несколько соседей с одинаковым номером бассейна. Это значит, что P_k принадлежит бассейну с номером соседа. Этот номер мы ему и присваиваем;

3) у ячейки P_k есть соседи хотя бы с двумя различными номерами. В этом случае мы помечаем, что P_k принадлежит водоразделу. Будем называть такие точки точками *комбинированного водораздела*.

Во всем вышесказанном есть только одна погрешность — непонятно, номер какого бассейна (или — каких) приписывать точке водораздела? Отметим, однако, что для функции, приведенной выше в качестве примера, независимо от этого водоразделы, полученные по этому определению совпадают с водоразделами, полученными на основании Определения скатывания 1. Наиболее правильным кажется подход при котором ячейке приписываются номера сразу всех соседей. Тогда любая очередная ячейка P_k , имеющий своим соседом точку водораздела P_l автоматически становится точкой водораздела, так как у P_l есть не менее двух номеров. Но на языке Определения 1 это означает, что если мы можем скатиться в точку водораздела из P_k ($k > l$, следовательно $f_k \geq f_l$), то P_k принадлежит водоразделу. Теперь, если мы докажем, что все седла принадлежат водоразделам, то получим, что водораздел Максвелла принадлежит комбинированному водоразделу в случае использования Определения скатывания 1. К сожалению, это не верно. Седло на следующем примере со зна-

чением функции 5 принадлежит только одному комбинированному водоразделу минимума со значением 1.

6	6	6	6	6
6	4	5	4	6
6	3	6	3	6
6	2	1	2	6
6	6	6	6	6

Однако, если мы волевым образом припишем всем седлам перед применением алгоритма некоторый несуществующий номер (например -1), то легко видеть, что по достижении любого седла оно автоматически станет точкой водораздела и в этом случае водораздел Максвелла принадлежит комбинированному водоразделу. Будем в этом случае называть водораздел модифицированным комбинированным водоразделом.

С другой стороны, наличие у P_k соседей с двумя различными номерами (даже если это один сосед с двумя номерами) означает, что из этой точки можно скатиться (по Определению 1) в два различных минимума. Получаем, что верна

Теорема 2. *При использовании Определения 1 комбинированные водоразделы принадлежат водоразделам Максвелла. Модифицированные комбинированные водоразделы совпадают с водоразделами Максвелла.*

7. Сжатие изображений с использованием его структурных линий

Рассмотрим задачу сжатия “серого” изображения на основе построения его структурных линий. Отметим, что задача сжатия цветных изображений существенно отличается от данной. Цветное изображение представляется как функция со значением в R^3 (в пространстве RGB — красной, зеленой и синей составляющих). При этом, значительные искажения в каждой компоненте могут привести к существенному искажению цвета. Способ приведения этих трех компонент к трем относительно независимым компонентам реализован, например, в алгоритмах JPEG компрессии [6] и в данной работе не рассматривается.

Мы хотим выделить в сером изображении некоторое подмножество ячеек (в обычном понимании этого слова, т.е. подмножество точек изображения со значением функции изображения на нем), знания которого было бы достаточно для удовлетворительного (в каком-то

смысле) восстановления всего изображения. Будем предполагать, что информация о форме области, в которой храниться данное подмножество изображения может быть записана в достаточно компактной форме и на этой проблеме мы останавливаться не будем. Так же не будем рассматривать весьма важный вопрос выбора определения степени близости двух изображений, адекватно отражающего визуальное восприятие похожести изображений. Тогда актуально рассмотрение двух проблем. Первая — это выбор, по возможности, минимального подмножества точек, по которым можно восстановить изображение с заданной точностью и вторая — способ интерполяции функции изображения по значениям функции в заданных точках.

Начнем со второй задачи. Мы имеем функцию f , определенную на сетке $G = \{0, \dots, N_x\} \times \{0, \dots, N_y\}$. На области G определена подобласть S (то, что мы ранее называли структурными линиями), на которой фиксируются значения f . Все, что мы априорно знаем, это то, что все критические точки f лежат на S и то, что f в каком-то смысле — гладкая функция. Причем первое утверждение верно по построению структурных линий S , а второе является, скорее, правдоподобным предположением. Простейшей функцией, удовлетворяющей данным пожеланиям является функция, удовлетворяющая для $(i, j) \in G \setminus S$ уравнению $-4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = 0$.

Задача нахождения такой функции хорошо известна в численных методах решения уравнений в частных производных (например, [1], [14]). В непрерывном случае ее аналогом является гармоническая функция (сумма вторых частных производных по всем направлениям равна 0). Доказано, что в данной задаче такая функция существует и единственна. Это является непосредственным следствием положительной определенности оператора Δ , задаваемого на ограниченной подобласти Ω прямоугольной сетки следующим образом:

$$\begin{aligned} (\Delta u|_{\Omega})_{i,j} &= 4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

Легко доказать, что для получающейся системы линейных уравнений в рассматриваемой задаче верен принцип максимума (т.е. все экстремумы получающейся функции лежат на S). В указанных работах доказана сходимость простейшего итерационного метода решения полученной системы линейных уравнений — метода Зейделя. Один из его наиболее удобных вариантов носит название *шахматного метода Зейделя*, одна итерация которого состоит из двух шагов.

Рассмотрим разбиение области $G \setminus S$ на два множества точек $S_0 = \{(i, j) \in G \setminus S \mid i + j \text{ — четно}\}$ и $S_1 = \{(i, j) \in G \setminus S \mid i + j \text{ — нечетно}\}$.

Легко видеть, что точки S_0 и S_1 лежат друг относительно друга в шахматном порядке. Пусть в начале алгоритма заданы некоторые (например, нулевые) значения функции u на S_1 . Для каждой точки S_0 все ее четыре соседа принадлежат либо S_1 , либо S , то на первом шаге алгоритма мы можем по значениям функции на S_1 и на S , используя формулу $u_{i,j} = (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})/4$, получить значения функции на S_0 . При этом, все получаемые значения $u_{i,j}$ зависят только от значений функции на S_1 и на S . Аналогично, на втором шаге по значениям функции на S_0 и на S , используя ту же формулу, получаем значения функции на S_1 .

Итерационный метод сходится с геометрической скоростью сходимости, зависящей от числа точек в рассматриваемой области и ее формы. В случае изображения, функция, как правило, принимает только целочисленные значения, поэтому алгоритм можно вести до момента, когда очередная итерация метода не изменяет ни одного значения функции u .

Для ускорения работы программы можно применять более сложные алгоритмы решения получаемой системы линейных уравнений, такие как метод сопряженных градиентов или же методы точного решения систем линейных уравнений (например, метод Гаусса). При этом, выбор метода должен зависеть от числа точек и формы каждой связанной подобласти, в которой решается задача.

Рассмотрим теперь вопрос выбора области S . Мы описали способы выделения структурных линий как “наиболее важных” точек изображения, но это, безусловно, не обеспечивает наперед заданной точности восстановления функции по ее значениям на структурных линиях. С другой стороны, структурные линии изображения содержат, как правило, большое количество точек, не обязательных для восстановления функции. Число точек в структурных линиях можно уменьшить, применяя различные варианты сглаживания изображения. Естественно, что при этом вместе с процессом “уменьшения” или “упрощения” структурных линий идет процесс их смещения. Для примера рассмотрим цифровую модель дна Черного моря. Приведем пример его комбинированных структурных линий (§6 при использовании Определения скатывания 3) и структурных линий для различных степеней сглаживания изображения (метод сглаживания приводится далее). Для каждого случая указывается — сколько процентов точек области относятся к структурным линиям и какова точность восстановления функции по ним.

Приведем алгоритм, который комбинирует структурные линии изображений, полученных в результате различных степеней сглаживания

исходного изображения. Множество точек, полученных в результате, мы будем называть *обобщенными структурными линиями*. Будем строить их по шагам.

На первом шаге рассматривается изображение максимальной степени сглаживания, его структурные линии назовем первой итерацией обобщенных структурных линий.

Далее, на каждом n -том шаге рассматривается предыдущая итерация обобщенных структурных линий, разбивающая G на подобласти. Будем называть эти подобласти *удовлетворительными*, если функция, восстановленная в этой подобласти приведенным выше способом достаточно близка (в некоторой норме) к исходной функции и *неудовлетворительными* — иначе. Обобщенные структурные линии на данной итерации строятся как объединение обобщенных структурных линий предыдущей итерации и структурных линий данной степени сглаживания (меньшей, чем использовалась ранее), взятых только на неудовлетворительных подобластях.

Если, после добавления структурных линий исходной функции (сглаживание = 0), остались неудовлетворительные подобласти, то процесс продолжается, при этом вместо структурных линий исходной функции берутся структурные линии разности исходной функции и восстановленной на предыдущем шаге.

Легко видеть, что в последних итерациях точки с максимальной ошибкой приближения попадают на структурные линии, добавляемые на следующей итерации, поэтому для любой наперед заданной точности на некоторой итерации мы получим обобщенные структурные линии, по которым можно восстановить функцию с этой заданной точностью. В крайнем случае, если нам очень не повезет, обобщенные структурные линии будут совпадать со всей областью G .

Построим обобщенные структурные линии изображения. В качестве одной итерации сглаживания берется свертка функции изображения с функцией

$$\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{array}$$

Для избежания краевых эффектов вместо исходной функции можно рассматривать ее периодическое продолжение во все стороны.

В случае больших изображений для сильного сглаживания подобным образом требуется довольно большое количество итераций. На

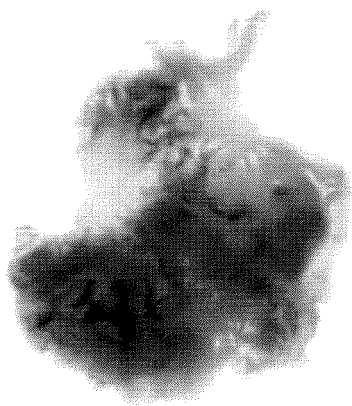


Рис. 3.1. Цифровая модель дна
Черного моря

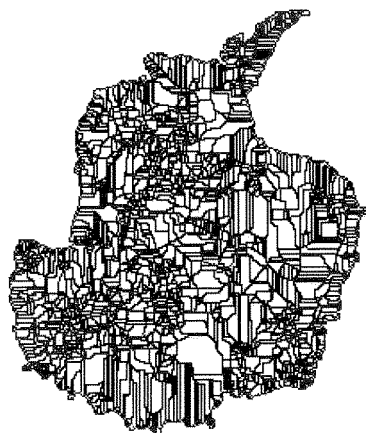


Рис. 3.2. Структурные линии

Стр. линии Занимают 33% области; точность восст.=1.3%

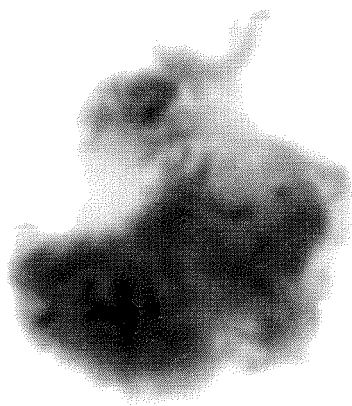


Рис. 4.1. Сглаженное изображе-
ние (20 итераций)

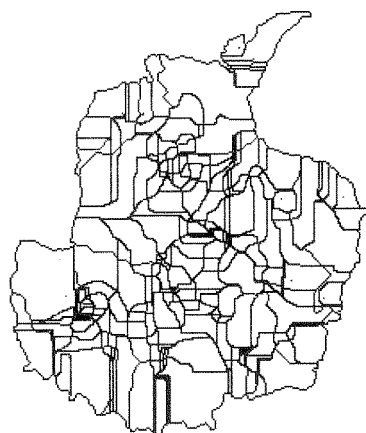


Рис. 4.2 Структурные линии
сглаженного изображения

Стр. линии Занимают 10% области; точность восст.=9.4%

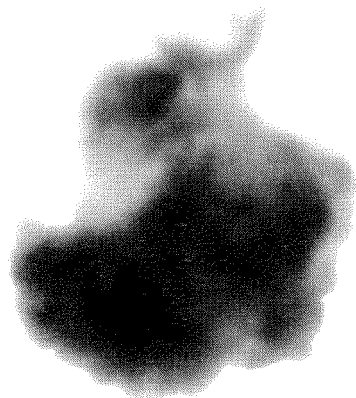


Рис. 5.1. Сглаженное изображение (40 итераций)

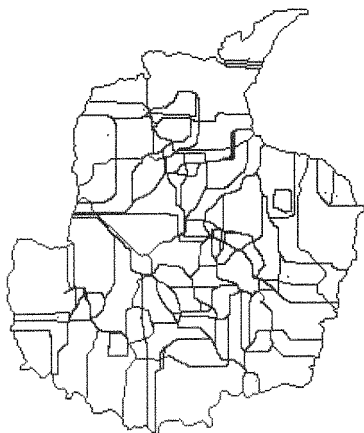


Рис. 5.2 Структурные линии сглаженного изображения

Стр. линии Занимают 8% области; точность восст.=12%

самом деле, известно, что с помощью преобразования Фурье (быстрого преобразования Фурье — в случае конкретной реализации), подобное сглаживание можно осуществлять с числом арифметических операций, не зависящим от необходимого количества применений свертки. Действительно, преобразование Фурье от свертки двух функций есть произведение преобразований Фурье от каждой функции. Тогда преобразование Фурье от n -кратной свертки одной функции с некоторой другой есть произведение преобразования Фурье исходной функции и n -той степени преобразования Фурье второй. При этом число арифметических операций пропорционально $(M \log M)(N \log N)$, где M , N — размер картинка.

Далее приведены примеры обобщенных структурных линий изображения и изображений, восстановленных по ним. Для каждого случая указывается — сколько процентов точек области относятся к структурным линиям и какова точность восстановления функции по ним (указана *относительная ошибка восстановления* = отношению l_2 -нормы ошибки к l_2 -норме функции).

Следующим этапом является сжатие значений функции на обобщенных структурных линиях. Существенным моментом здесь является то, что точки на обобщенных структурных линиях можно занумеровать так, что большинство из соседних членов получившейся последовательности будут соседями на изображении, т.е. задача сво-

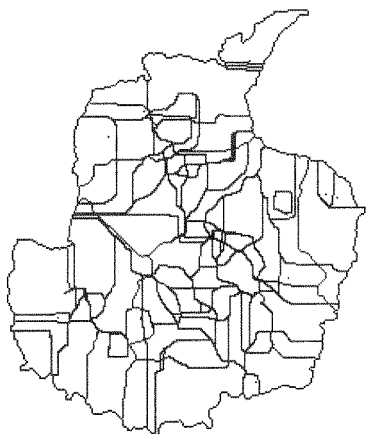


Рис. 6.1. Обобщенные структурные линии сглаженного изображения

Стр. линии Занимают 7.8% области; точность восст.=12%

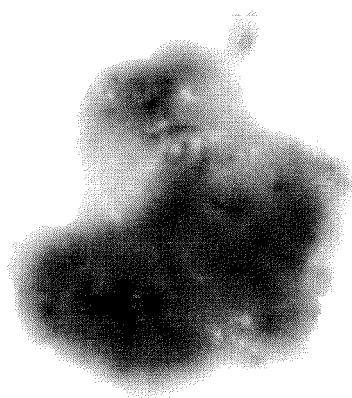


Рис. 6.2. Изображение, восстановленное по обобщенным структурным линиям

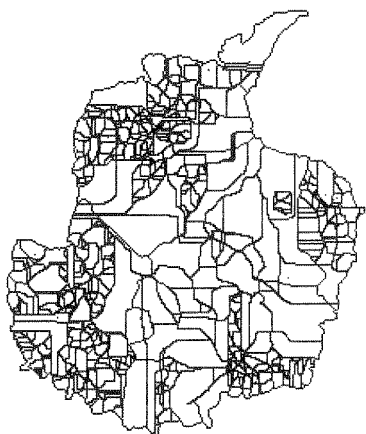


Рис. 7.1. Обобщенные структурные линии сглаженного изображения

Стр. линии Занимают 14% области; точность восст.=6%

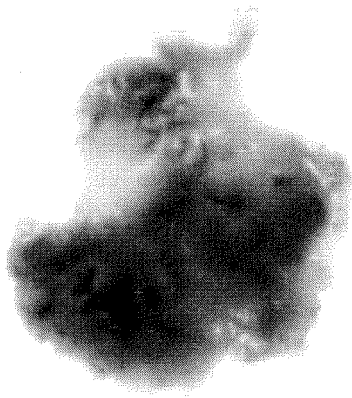


Рис. 7.2. Изображение, восстановленное по обобщенным структурным линиям

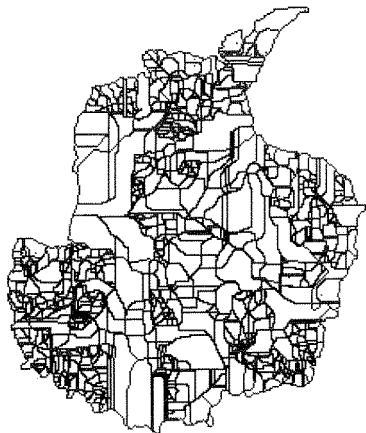


Рис. 8.1. Обобщенные структурные линии сглаженного изображения

Стр. линии Занимают 18% области; точность восст.=4%

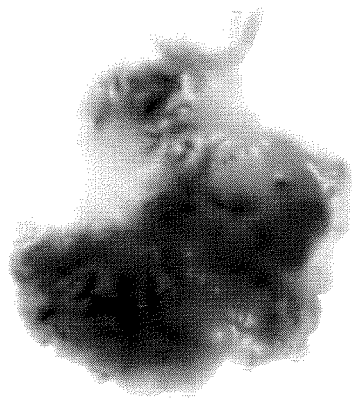


Рис. 8.2. Изображение, восстановленное по обобщенным структурным линиям

дится к сжатию дискретной функции одной переменной.

Мы рассмотрим только один подход к сжатию функции на структурных линиях, являющийся аналогом JPEG-сжатия. В стандартном алгоритме JPEG-сжатия область определения функции изображения G разбивается на квадраты (8×8), в каждом из которых производится \cos -преобразование Фурье. Все маленькие коэффициенты разложения отбрасываются и оставшиеся коэффициенты используются для сохранения информации о функции. При этом используется то, что ошибка в l_2 -норме, внесенная в коэффициенты разложения равна ошибке, вносимой при этом в исходную функцию.

В нашем случае можно произвести аналогичную процедуру с некоторым дополнением. Разобьем область определения функции на квадраты размера K . Для каждого квадрата рассмотрим стандартный процесс ортогонализации функций \cos -базиса Фурье на подобласти данного квадрата, образованной его пересечением с обобщенными структурными линиями. Получим базис на пересечении каждого квадрата со структурными линиями. На его основе проведем в точности тот же процесс, который используется в JPEG-компрессии. Отметим, что в случае JPEG-компрессии производится дальнейшее сжатие оставшихся коэффициентов. Данный вопрос в работе не рассматривается.

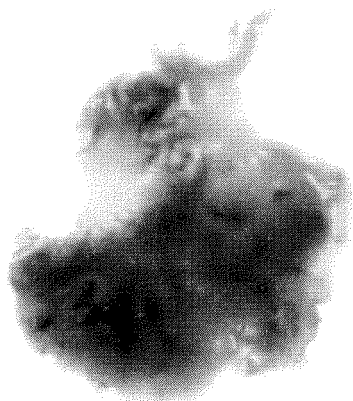


Рис. 9.1. Восстановление изображения по части коэффициентов разложения функции на структур.линиях (9.4%к-тов)

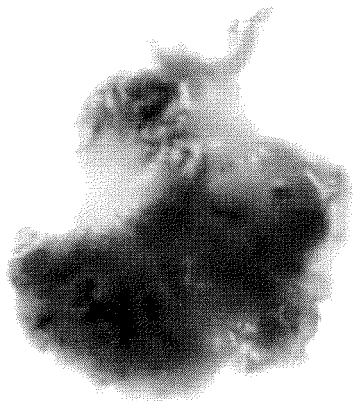


Рис. 9.2. Восстановление изображения по части коэффициентов разложения функции на структур.линиях (5.1%к-тов)

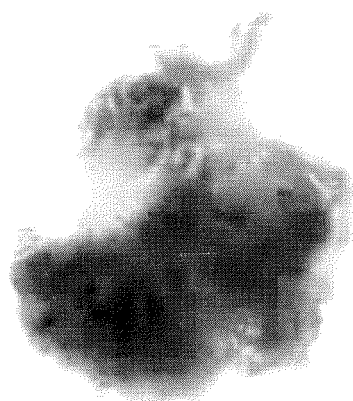


Рис. 9.3. Восстановление изображения по части коэффициентов разложения функции на структур.линиях (2.8%к-тов)



Рис. 9.4. Восстановление изображения по части коэффициентов разложения функции на структур.линиях (1.5%к-тов)

В качестве эксперимента, изображение разбивалось на квадраты со стороной 10 точек. Обобщенные структурные линии были взяты из Рис. 8.1. На рисунках представлены изображения, восстановленные по указанным структурным линиям с использованием указанного числа коэффициентов разложения функции на структурных линиях (указано процентное соотношение числа коэффициентов по отношению к общему числу точек области). Для каждого изображения указана относительная ошибка восстановления в l_2 -норме.

Для случая использования разложения функции на всей области (JPEG-сжатие) соответствующие цифры сжатия равны: 4.3, 2.4, 1.9, 1.0, соответственно. Заметим еще раз, что дальнейшее сжатие полученных коэффициентов не рассматривается в обоих случаях.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Москва. Наука. 1987.
2. O'Callaghan J. E., Mark D. M. The extraction of drainage networks from digital elevation data: Computer Vision, Graphics, and Image Processing, Vol. 28, pp. 299–311. 1984.
3. Douglas D. H. Experiments to locate ridges and channels to create a new type of digital elevation model: Cartographica, Vol. 23, № 4, pp. 29–61. 1986.
4. Gonzalez R. C. Image enhancement and restoration. Handbook of pattern recognition and image processing (Young T. Y., Fu K.-S., eds.), Academic Press, Orlando. 1986.
5. Jenson S. K., Domingue J. O. Extracting topographic structure from digital elevation model for geographic information system analysis: Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, Vol. 54, № 11, pp. 1593–1600. 1988.
6. Mitchell (J.L.) and Pennebaker (W.B.) Evolving JPEG Colour Data Compression Standards for Electronic Imaging Systems, M. Nier, M. E. Courtot, Editors, SPIE, Vol. CR37, pp. 68–97, 1991.
7. Maxwell J. C. On contour-lines and measurement of heights: The London, Edinburg, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. XL—fourth series, pp. 421–427. 1870.
8. Musin O. R. On some problems of computational geometry and topology: Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Vol. 1520, pp. 57–80. 1992.

9. *Musin O. R.* Topographic structure of image: Lecture Notes in Computer Sciences, Springer-Verlag, Vol. 719 (Computer Analysis of Images and Patterns, D. Chetverikov, W. G. Kropatch (Eds.)), pp. 24–30. 1993.
10. *Rosin P., Colchester A. C. F., Hawkes D. J.* Early image representation using regions defined by maximum gradient paths between singular points: Pattern Recognition, Vol. 25, № 7, pp. 695–711. 1992.
11. *Rosin P.* Early image representation by slope districts. J. of Visual Communication and Image Representation. Vol. 6. N 3. pp. 228–243. 1995.
12. *Sadovnichy V. A., Grinchuk M. I., Musin O. R., Seleznev O. V., Staroverov V. M.* Structures and singularities in the image processing. I. Moscow, Moscow University publishing. 1995.
13. *Sadovnichy V. A., I. Antoniou, Belokourov V. V., Grinchuk M. I., Musin O. R., Seleznev O. V., Staroverov V. M.* Structures and singularities in the image processing. II: Moscow, Moscow University publishing. 1996.
14. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. Москва. Наука. 1978.
15. *Wolf G. E.* A FORTRAN subroutine for cartographic generalization: Computers and Geoscience, Vol. 17, № 10, pp. 1359–1381. 1991.