

УДК 517.946

Об одной абстрактной теореме возмущений, о формулах регуляризованных следов и о дзета-функции операторов¹

В. А. Садовничий, В. В. Дубровский

Настоящая работа посвящена изучению асимптотик собственных чисел неограниченных операторов в гильбертовом пространстве — операторов, в определенном смысле, близких друг к другу, так что один из них получается в результате "малого" возмущения другого. Нас интересуют условия, при которых ряд из разностей собственных чисел таких операторов будет сходящимся (заметим при этом, что ряды из собственных чисел каждого оператора расходящиеся). Такого рода свойства операторов изучались в работах (см., например, [1] и др.), однако условия, которые налагались на операторы, иные чем у нас. Окончательная цель нашей работы получить формулы регуляризованных следов операторов. Теоремы из работ, о которых мы упоминали выше, не позволяют непосредственно получать формулы следов для операторов такого класса. Формулы следов операторов, о которых пойдет речь в данной работе, являются естественным обобщением формул следов для собственных значений матриц. Хорошо известно, что сумма собственных значений матрицы легко вычисляется и равна сумме диагональных элементов. Различным обобщениям таких тождеств и, в частности, формулам так называемых регуляризованных следов для обыкновенных дифференциальных операторов посвящено много работ. Наиболее общие результаты в этом направлении были получены в работах [2, 3], где рассматривались регуляризованные суммы корней некоторого класса целых функций. В качестве следствия из этих результатов можно получать формулы регуляризованных следов для самых общих задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих спектральный параметр сложным образом.

¹ Дифф. уравнения, № 7. т. 13, 1977. с.1264–1271

Однако эти методы, если говорить об их применении к дифференциальным уравнениям, существенно используют простую асимптотику решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Естественно попытаться обобщить эти результаты на классы операторов, содержащие дифференцирование по нескольким (более чем одной) переменным. Всякое продвижение в этом направлении связано с трудностями.

В настоящей работе сделана попытка получить такие формулы регуляризованных следов, но в случае, когда операторы в определенном смысле близки друг к другу. Эти формулы получены в качестве следствия одной, доказанной ниже, теоремы теории возмущений. В работе изучена дзета-функция таких операторов.

§ 1. Формулировка основных результатов

Всюду ниже T — самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве H с дискретным спектром $\{\lambda_n\}$, где $n = 1, 2, \dots$, причем $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lambda_n \rightarrow \infty$.

Область определения оператора T обозначается $D(T)$ и является всюду плотной в H . Пусть, кроме того, кратность каждого собственного числа оператора T конечна и $d_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, где d_n — расстояние от λ_n до спектра $\sigma(T)$ без точки λ_n и без всех λ_k , совпадающих с λ_n ($d_n = \rho(\lambda_n, [\sigma(T) \setminus \{\lambda_n\}])$).

Через P обозначим ограниченный, определенный всюду в H оператор такой, что оператор PT^ν при некотором $\nu \geq 0$ можно продолжить до ограниченного оператора, определенного по всем H . Здесь $T^\nu = \int \lambda^\nu dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T .

Ниже докажем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Оператор $T + P$ имеет дискретный спектр, состоящий из собственных значений, которые можно расположить по возрастанию к плюс бесконечности их действительных частей; существует такой круг радиуса R с центром в начале координат, что между собственными числами $\{\mu_k\}$ оператора $T + P$ и $\{\lambda_k\}$, лежащими вне этого круга, можно установить взаимно однозначное соответствие так, что выполняются неравенства $|\lambda_n - \mu_n| \leq c|\lambda_n|^{-\nu}$, $n = N(R) + 1, N(R) + 2, \dots$, где c — некоторая постоянная, не зависящая от n , $N(R)$ — некоторое целое положительное число, λ_n и μ_n — собственные числа операторов T и $T + P$, отвечающие друг другу при нашем соответ-

ствии, лежащие вне круга радиуса R , $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ $\operatorname{Re} \mu_n \leq \operatorname{Re} \mu_{n+1}$. (Числа λ_n и μ_n повторяются столько раз, какова их кратность и алгебраическая кратность соответственно).

В дальнейшем область значений оператора P будем обозначать $H(P)$. Введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Линейный оператор P называется T -ядерным порядка n , если выполнены следующие условия:*

а) $H(P) \subset D(T^{n_1})$, где $0 \leq n_1 \leq n$, $T^0 = E$, n — целое положительное число;

б) для любых целых n_1, n_2 таких, что $n_1 + n_2 \leq n$, $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, $T^{n_1} P T^{n_2}$ можно продолжить до ядерного оператора.

Заметим, что если условия а) и б) определения выполнены для любого целого положительного n , то оператор P будем называть T -ядерным бесконечного порядка.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda_n \sim c_1 n^\alpha$, $n \rightarrow \infty$, $\alpha > 0$, $d_n > c_2 n^\beta$, β — вещественное число, d_n , вообще говоря, не стремится к бесконечности, c_1, c_2 — некоторые постоянные, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Оператор P является T -ядерным бесконечного порядка. Тогда для любого целого положительного k существуют суммы вида $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^k - \lambda_n^k)$ и

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) &= \operatorname{Sp} P, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^2 - \lambda_n^2) &= \operatorname{Sp} P^2 + \operatorname{Sp} P T + \operatorname{Sp} T P, \\ &\dots \\ \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^k - \lambda_n^k) &= \operatorname{Sp} [(T + P)^k - T^k], \\ &\dots \end{aligned}$$

где Sp означает след ядерного оператора в H .

Если $\lambda_n \sim c_1 n^\alpha$, то очевидно, для любого σ такого, что $\operatorname{Re} \sigma > \alpha^{-1}$, существует и является аналитической функцией дзета-функция оператора $Z(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\sigma}$.

Справедлива также следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 для любого $n > 0$ и пусть $\lambda_n \sim c_1 n^\alpha$, где $\alpha > 0$, $c_1 > 0$, тогда дзета-функция операторо-

ра $T + P(\hat{Z}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-\sigma})$, где $\mu_n^{-\sigma} = e^{-\sigma \text{Ln} \mu_n}$ (берется фиксированная ветвь логарифма), аналитически продолжается в ту область, куда можно аналитически продолжить дзета-функцию оператора T . Функция $Z(\sigma) - \hat{Z}(\sigma)$ продолжается на всю плоскость как целая функция.

ПРИМЕРЫ. 1) Рассмотрим задачу Дирихле в прямоугольном параллелепипеде Π с попарно соизмеримыми ребрами α_i для оператора Лапласа:

$$-\Delta u = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad u|_{\partial \Pi} = 0.$$

Пусть

$$(-\Delta)^l(\cdot) = \left(-\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^l (\cdot), \quad \Delta^k(\cdot)|_{\partial \Pi} = 0,$$

$k = 0, 1, \dots, l-1$, суть l -я степень оператора, задаваемого задачей Дирихле. Пусть P — интегральный оператор с бесконечно дифференцируемым ядром $K(x, y)$, обращающимся в нуль на $\partial \Pi$ вместе со всеми производными: $Pu = \int_{\Pi} K(x, y)u(y) dy$. Оператор P есть $\bar{\Delta}$ ядерный оператор бесконечного порядка, где $\bar{\Delta}$ означает замыкание оператора Δ . Справедливы теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть λ_n — собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа в Π , а μ_n — собственные числа задачи Дирихле для оператора $-\Delta + P$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) &= \int_{\Pi} K(x, x) dx, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^2 - \lambda_n^2) &= \int_{\Pi} K(x, y) K(y, x) dy dx - \\ &- \int_{\Pi} \Delta_{x_1} K(x_1, x)|_{x=x_1} dx - \int_{\pi} \Delta_x K(x, x_2)|_{x-x_1} dx, \\ &\dots \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5. Дзета-функция оператора $-\Delta + P$ аналитически продолжается на всю σ -плоскость как мероморфная функция с простым

полюсом в точке $\sigma = \frac{m}{2}$ и вычетом, равным

$$\left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \right]^{-1} (2\sqrt{\pi})^{-m} \prod_{i=1}^m a_i.$$

2) Пусть на отрезке $[0, 1]$ задан самосопряженный оператор L

$$l(y) = (-1)^\mu y^{(2\mu)} + (p_1(x)y^{\mu-1})^{\mu-1} + \dots + p_\mu(x)y = \lambda y, \\ U_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n = 2\mu,$$

где $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, \mu$ — вещественные бесконечно дифференцируемые функции, $U_i(y)$ — линейные формы, содержащие значения функций $y, y', \dots, y^{(n-2)}, y^{(n-i)}$ в точках 0 и 1.

Пусть граничные формы порождают самосопряженную регулярную задачу и $\Theta_0^2 - 4\Theta_1 \cdot \Theta_{-1} \neq 0$ (см. [4]). Если $P y = \int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) d\xi$, где $K(x, \xi)$ — бесконечно дифференцируемая по обоим аргументам функция, обращающаяся в нуль со всеми производными в точках 0 и 1, то для оператора $L + P$ можно высказать теорему, аналогичную теореме 3, а также с незначительной переформулировкой теорему, аналогичную теореме 4.

§ 2. Доказательства теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть C_α — спрямляемый замкнутый контур в комплексной плоскости, D_α — область с границей C_α $\rho(C_\alpha, \sigma(T)) \geq k$, где $k > 0$ и не зависит от α , а ρ — расстояние от C_α до спектра $\sigma(T)$. Тогда число точек спектра $\sigma(T + P)$ в области D_α совпадает с числом точек спектра оператора T (учитывается алгебраическая кратность); спектр оператора $T + P$ также дискретен в области D_α , если длина контура C_α достаточно мала, а оператор P мал по норме:

$$\|P\| \leq \rho_\alpha, \quad \rho_\alpha = \frac{\delta_\alpha^2}{\delta_\alpha + l_\alpha/2\pi}, \quad \delta_\alpha = \frac{1}{\max_{\lambda \in C_\alpha} \|R(\lambda, T)\|},$$

l_α — длина контура C_α , $R(\lambda, T)$ — резольвента оператора T . Высказанное выше утверждение в случае, если оператор ограничен и определен на всем H , есть известный факт об устойчивости корневых

кратностей оператора. Рассматриваемый нами оператор T неограничен, но является дискретным (см. [5]). Поэтому при условиях теоремы 1 сказанное выше остается также справедливым для дискретного оператора T .

Заметим, что ρ_α ограничен снизу, если $\frac{1}{2}\delta_\alpha \geq \frac{l_\alpha}{2\pi}$

$$\rho_\alpha = \delta_\alpha - \frac{l_\alpha}{2\pi} + \frac{(l_\alpha/2\pi)^2}{\delta_\alpha + l_\alpha/2\pi} \geq \delta_\alpha - \frac{l_\alpha}{2\pi} \geq \frac{1}{2}\delta_\alpha,$$

а $\delta_\alpha \geq \text{const} \cdot k$, $\text{const} > 0$, и не зависит от α и k (см. неравенство далее). Неравенство $\frac{1}{2}\delta_\alpha \geq l_\alpha/2\pi$ выполняется, если $\max_{\lambda \in C_\alpha} \|R(\lambda, T)\|$ ограничен сверху величиной π/l_α на контуре C_α . Последнего всегда можно добиться, выбирая малой длину контура.

Используя оценки для резольвенты (см. [5]), можно записать, что

$$\frac{c}{\rho(\lambda, \sigma(T))} \leq \|R(\lambda, T)\| \leq \frac{1}{\rho(\lambda, \sigma(T))},$$

где $c > 0$.

Пусть $C_n = \{z : |z - \lambda_n| \leq d\}$, l_n — длина границы C_n . Если $d_n = \rho(\lambda_n, [\sigma(T) \setminus \{\lambda_n\}]) \rightarrow \infty$, то согласно оценки выше, величину $\delta_n = [\max \|R(\lambda, T)\|]^{-1}$ можно оценить сверху и снизу: $c_1 d \leq \delta_n \leq c_2 d$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$; тогда $\rho_\alpha|_{\alpha=n} \geq c_0 d$, $c_0 > 0$ для n достаточно больших и не зависит от d . Если n достаточно велико, то, за исключением конечного числа, все собственные числа оператора $T + P$ попадают внутрь кругов C_n .

Пусть μ — такое, что $c|\lambda_n|^{-\nu} \leq |\mu - \lambda_n| \leq d$. Вычислим $\max_{i \leq k \leq \infty} |\lambda_k|^{-\nu} |\mu - \lambda_k|^{-i}$. Имеем при $k \neq n$

$$\begin{aligned} \max_{\substack{i \leq k < \infty \\ k \neq n}} |\lambda_k|^{-\nu} |\mu - \lambda_k|^{-i} &\leq \text{const} \max_{\substack{i \leq k < \infty \\ k \neq n}} |\mu - \lambda_k|^{-i} \leq \\ &\leq \text{const} \max_{\substack{i \leq k < \infty \\ k \neq n}} (|\lambda_k - \lambda_n| - |\mu - \lambda_n|)^{-i} \leq \text{const} (d_n - d)^{-i}. \end{aligned}$$

$$(d_n - d)^{-i} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

Пусть $k = n$, тогда

$$|\lambda_n|^{-\nu} |\mu - \lambda_n|^{-i} \leq \frac{1}{c} \frac{1}{|\lambda_n|^{-\nu} |\lambda_n|^\nu} = \frac{1}{c}, \quad c \neq 0.$$

Значит, при μ из кольца $c|\lambda_n|^{-\nu} \leq |\mu - \lambda_n| \leq d$ при больших n

$$\max_{i \leq k < \infty} |\lambda_k|^{-\nu} |\mu - \lambda_k|^{-i} \leq \frac{1}{c}.$$

Тогда (см. [5]) выполняется оценка $\|T^{-\nu}R(\lambda, T)\| \leq \frac{\text{const}}{c}$.

Пусть $A = PT$, тогда

$$R(\lambda, T + P) = R(\lambda, T) \sum_{n=0}^{\infty} [AT^{-\nu}R(\lambda, T)]^n,$$

причем ряд сходится равномерно, если $\|T^{-\nu}R(\lambda, T)\| \leq \|A\|^{-i}$ (отсюда условие для выбора константы c , введенной выше). Ряд для $R(\lambda, T + P)$ является резольвентой для оператора $T + P$, что непосредственно легко проверить. Значит, при достаточно больших n ни одна точка μ из области $c|\lambda_n|^{-\nu} \leq |\mu - \lambda_n| \leq d$ не лежит в $\sigma(T + P)$, т. е. теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Не ограничивая общности, можно считать $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Если это не так, то оператор $T + P$ надо возвести в нужную степень. Применяя теорему 1, при $\nu = 2$ для T^2 получаем (так как $|\lambda_n^2 - \lambda_{n+1}^2| \rightarrow \infty$, т. е. $d_n \rightarrow \infty$): ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^2 - \lambda_n^2)$ абсолютно сходится, значит, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n)$.

Пусть

$$R_1(-r) = (T + rE)^{-1}, \quad R_2(-r) = (T + P + rE)^{-1}.$$

Тогда

$$R_2(-r) - R_1(-r) = -R_2(-r)PR_1(-r).$$

Дифференцируя это равенство, имеем

$$R_1^2(-r) - R_2^2(-r) = R_2^2(-r)PR_1(-r) + R_2(-r)PR_1^2(-r).$$

Взяв след от обеих частей равенства, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + r)^{-2} - \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n + r)^{-2} &= \text{Sp}\{R_2^2(-r)PR_1(-r)\} + \\ &+ \text{Sp}\{R_2(-r)PR_1^2(-r)\}. \end{aligned}$$

Взаимно однозначное соответствие между точками λ_n и μ_n существует только при достаточно больших номерах n ($n > N(R)$), этого соответствия может не быть лишь для конечного числа точек ($n \leq N(R)$).

Пусть точек $\{\mu_n\}$ из этого конечного числа больше, чем таких точек $\{\lambda_n\}$. Рассмотрим пределы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^3 \left\{ \sum_{n=1}^{N(R)} \frac{1}{(r + \mu_n)^2} - \sum_{n=N(R)+1}^{\infty} \frac{2(\lambda_n - \mu_n)r + \lambda_n - \mu_n}{(r + \lambda_n)^2(r + \mu_n)^2} \right\} =$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} r^3 [\text{Sp}\{R_2^2(-r)PR_1(-r)\} + \text{Sp}\{R_2(-r)PR_1^2(-r)\}].$$

Предел справа существует и конечен. В этом мы убедимся ниже. С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} r^3 \sum_{n=1}^{N(R)} \frac{1}{(r + \mu_n)^2} = \infty, \\ & \lim_{r \rightarrow \infty} r^3 \left\{ \sum_{n=N(R)+1}^{\infty} \frac{(2\lambda_n - \mu_n)r}{(r + \lambda_n)^2(r + \mu_n)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_n^2 - \mu_n^2}{(r + \lambda_n)^2(r + \mu_n)^2} \right\} = 2 \sum_{n=N(R)+1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, получается противоречие. Таким образом, в нашем случае взаимно однозначное соответствие между λ_n и μ_n сохраняется всюду. Убедимся теперь, что предел справа существует и вычислим его. Имеем, что $r^2 R_1^2(-r)$ сходится к E сильно при $r \rightarrow \infty$ (см. [3]):

$$r^2 R^2(-r)f = \sum_{n=1}^{\infty} r^2(r + \lambda_n)^{-2}(E_{\lambda_n+0} - E_{\lambda_n})f.$$

Оценим остаток ряда по норме

$$\begin{aligned} & \sum_{n=N}^{\infty} \frac{r^4}{(r + \lambda_n)^4} ((E_{\lambda_n+0} - E_{\lambda_n})f, f) \leq \\ & \leq \sum_{n=N}^{\infty} ((E_{\lambda_n+0} - E_{\lambda_n})f, f) = ((E - E_{\lambda_n})f, f) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как $E_{\lambda} \rightarrow E$ сильно при $\lambda \rightarrow +\infty$. Поскольку $\lim_{r \rightarrow \infty} r^2(r + \lambda_n)^{-2} = 1$, то $r^2 R_1^2(-r) \rightarrow E$ сильно. Аналогично $r^2 R_2^2(-r) \rightarrow E$ сильно. Из непрерывности следа в ядерной норме можно заключить, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{Sp} r^3 \{R_1^2(-r)PR_2(-r)\} = \text{Sp} P,$$

поскольку $r^3 R_1^2(-r)PR_2(-r) \rightarrow P$ по ядерной норме. Учитывая все сказанное выше, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \text{Sp} P.$$

Аналогично устанавливаются остальные формулы. Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из теоремы 1 следует, что $|\lambda_n - \mu_n| \rightarrow 0$, причем стремление происходит быстрее любой степени n . Этот факт следует из оценки для разности $|\lambda_n - \mu_n|$. Пусть $\mu_n - \lambda_n = \alpha_n$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\sigma} - \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \alpha_n)^{-\sigma} &= Z(\sigma) - \hat{Z}(\sigma) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{\alpha_n}{\lambda_n})^{\sigma} - 1}{(\lambda_n + \alpha_n)^{\sigma}}. \end{aligned}$$

Пользуясь разложением числителя в ряд Тейлора, получаем мажоранту для написанного ряда

$$|Z(\sigma) - \hat{Z}(\sigma)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n| |\sigma|}{|\lambda_n| (\lambda_n + \alpha_n)^{\sigma}}.$$

Этот ряд равномерно сходится в любой конечной области комплексной плоскости σ , т. е. $Z(\sigma) - \hat{Z}(\sigma)$ продолжается как целая функция. Теорема 3 доказана.

1) ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Собственными числами оператора $-\Delta u = \lambda u$ и $u|_{\partial\Pi} = 0$ являются числа $\lambda_r = \sum_{i=1}^m \pi^2 a_i^{-2} r_i^2$, где r — мультииндекс, $r = (r_1 r_2, \dots, r_m)$, $r_i = 1, 2, \dots$, a_i — длина i -го ребра параллелепипеда. Очевидно, что если $\lambda_r \neq \lambda_{r'}$, то $|\lambda_r - \lambda_{r'}| > c > 0$, причем c в результате соизмеримости ребер не зависит от r и r' . Действительно, из соизмеримости ребер следует, что мы можем записать $a_i = \alpha \cdot p_i^{-1}$, $\alpha > 0$. p_i — натуральное число, $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда

$$|\lambda_r - \lambda_{r'}| = \frac{\pi^2}{\alpha^2} \left| \sum_{i=1}^m (r_i^2 - r_i'^2) p_i^2 \right| \geq \frac{\pi^2}{\alpha^2}, \quad \text{если } \lambda_r \neq \lambda_{r'}.$$

Известно, что если мы занумеруем λ_r по возрастанию их величин с учетом кратности и обозначим эти числа через λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, то $\lambda_n \sim cn^{2/m}$, $c > 0$, $\lambda_1 > 0$. Тогда для оператора $(-\Delta)^l u = \lambda u$, $\Delta^k u|_{\partial\Pi} = 0$, $k = 0, 1, \dots, l-1$, и для оператора $(-\Delta + P)^l u = \mu u$, $\Delta^k u|_{\partial\Pi} = 0$, $k = 0, 1, \dots, l-1$, выполнены условия теоремы 1 и 2 (для теоремы 2 с $\alpha = 2/m$, $\beta = 0$, когда $l = 1$). Оператор P есть Δ -ядерный бесконечного порядка ввиду гладкости ядра оператора P и обращения его и всех его производных в нуль на границе. Теорема 4 доказана.

Теорема 5 следует из теоремы 3 и известных результатов работы [6].

2) Пусть задан самосопряженный дифференциальный оператор L :

$$l(y) = (-1)^\mu y^{(2\mu)} + (p_1 y^{(\mu-1)})^{(\mu-1)} + \dots + P_\mu y = \lambda y,$$

$$U_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2\mu, \quad \mu > 0, \quad n = 2\mu, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $p_i(x)$ – бесконечно дифференцируемые действительные функции, линейные формы U_i задают регулярную задачу, причем (см. [4]) $\Theta_0^2 - 4\Theta_1\Theta_{-1} \neq 0$. Тогда у оператора есть две серии действительных собственных чисел $\{\lambda'_k\}$ и $\{\lambda''_k\}$, причем достаточно большие по модулю собственные числа однократны. Докажем, что при достаточно больших k_1, k_2 выполнено неравенство $|\lambda'_{k_1} - \lambda_{k_2}| \geq c > 0$, причем константа не зависит от k_1 и k_2 . Действительно, корни уравнения $\Theta_1 \xi^2 + \Theta_0 \xi + \Theta_{-1} = 0$ по модулю равны единице и различны, т. е. $\xi' = \exp(i\varphi')$, $\xi'' = \exp(i\varphi'')$, $0 < |\varphi' - \varphi''| < 2\pi$.

Пусть для определенности $n = 4q + 2$. Тогда первым приближением для $\sqrt[n]{\lambda_k}$ (здесь берется фиксированная ветвь корня, принимающая для положительных значений положительные значения) являются числа

$$\hat{\rho}_{k_1} = -i \ln_0 \xi' + 2k_1\pi = \varphi' + 2k_1\pi, \quad \hat{\rho}_{k_2} = \varphi'' + 2k_2\pi,$$

где $k_1 > 0, k_2 > 0$. Ясно, что $\hat{\rho}'_{k_1}$ и $\hat{\rho}''_{k_2}$ отделены ненулевой константой друг от друга. Сами корни из собственных значений для больших номеров k_1 и k_2 лежат в кругах $\Gamma'_{k_1}, \Gamma''_{k_2}$ постоянного радиуса с центрами в $\hat{\rho}'_{k_1}$ и $\hat{\rho}''_{k_2}$ соответственно. Радиус кругов берется достаточно маленьким, чтобы круги пересекались. Корни из собственных значений лежат на действительной прямой, и они, за исключением конечного числа, отделены ненулевой константой. Отображение $\lambda = -\rho^n$ только растягивает расстояние (при $\rho \geq 1$) между корнями из собственных чисел, и расстояние между соседними увеличивается до бесконечности. В условиях теоремы 1 мы предполагали, что $\lambda_n > 0$ для всех n . Этого можно добиться в случае примера 2) всегда, сдвинув спектральный параметр. Если оператор $P_y = \int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) d\xi$ удовлетворяет условиям, о которых говорилось выше, то все условия для применения теорем 1–3 выполнены, поэтому справедливы теоремы, аналогичные теоремам, сформулированным выше.

ТЕОРЕМА 6. *Дзета-функция оператора $L + P$ аналитически продолжается в ту область, куда можно аналитически продолжить дзета-функцию оператора L . Разность дзета-функции оператора $L + P$ и оператора L , продолжается на всю плоскость как целая функция.*

ТЕОРЕМА 7. Пусть λ_n — собственные числа оператора L , а μ_n — собственные числа оператора $L + P$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \int_0^1 K(x, x) dx.$$

Аналогично вычисляются и регуляризованные следы более высоких порядков.

Литература

1. Halberg C. J., Kramer V. A. Duke Math. J., V. 27, N 4, 1960.
2. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Функциональный анализ, 1, № 2, 1967.
3. Садовничий В. А. Аналитические методы в спектральной теории дифференциальных операторов. Изд-во МГУ, 1973.
4. Неймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы, изд. 2, "Наука" 1969.
5. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы, Т. III, "Мир" 1971.
6. Minakshisundaram S Can. jour. of Math., V. 1, N 4, 1949.