

УДК 517.946

О некоторых соотношениях для собственных чисел дискретных операторов, Формулы следов для дифференциальных операторов в частных производных¹

В. А. Садовничий, В. В. Дубровский

В настоящей работе изучаются асимптотики собственных чисел дискретных операторов в гильбертовом пространстве H . Мы рассматриваем два оператора, так что один из них получается в результате возмущения другого. Нас интересуют условия, при которых ряд из разностей собственных чисел двух таких операторов будет сходящимся. В предыдущей нашей работе [1] были доказаны теоремы такого типа. Если T — дискретный самосопряженный оператор, а P — некоторый ограниченный, определенный всюду в H оператор, то условия, которые налагались на эти операторы в [1], формулировались в терминах операторов T и PT^ν , $\nu \geq 0$, где $T^\nu = \int \lambda^\nu dE(\lambda)$, $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы для оператора T . Так если оператор PT^ν можно продолжить до ограниченного оператора и если $d_n = \rho(\lambda_n, [\sigma(T) \setminus \{\lambda_n\}]) \rightarrow \infty$ ($\sigma(T)$ — спектр оператора T), то выполняется оценка

$$|\lambda_n - \mu_n| \geq \text{const} |\lambda_n|^{-\nu}.$$

Здесь λ_n — собственные числа оператора T , μ — собственные числа оператора $T + P$, const не зависит от n .

Такая оценка позволяет вычислить регуляризованные следы для некоторого класса задач с уравнениями в частных производных или с обыкновенными уравнениями, однако на возмущение накладываются ограничения типа того, что оно должно быть интегральным оператором.

¹ Дифф. уравнения, т.13, № 11, 1977. с.2033–2042.

В настоящей работе мы доказываем теоремы о возмущениях другого сорта. При некоторых условиях на операторы T и P мы доказываем сходимость ряда $\Sigma(\lambda_n - \mu_n)$. После того, как доказан этот факт, можно ставить вопрос о вычислении, а также вычислить указанную сумму в случае, когда рассматриваются операторы с частными производными, а возмущение есть оператор умножения на функцию, т. е., например, в случае когда оператор T есть оператор, порожаемый операцией Δ^4 (Δ — операция Лапласа) в прямоугольнике с нулевыми условиями на границе, а P — оператор умножения на функцию $p(x, y)$. Если λ_n — собственные числа оператора T , занумерованные в порядке возрастания величин, а μ_n — собственные числа оператора $T + P$, расположенные по возрастанию из действительных частей, и если отношение квадратов сторон прямоугольника $a^2/b^2 = \alpha$ есть — алгебраическое число степени $m \geq 2$ (т. е. корень неприводимого над полем рациональных чисел Q многочлена с коэффициентами из Q степени m), то при некоторых естественных в этих вопросах условиях на функцию $p(x, y)$ (обращение в нуль интеграла от функции и др.) справедлива формула:

$$\sum_{(n)} (\lambda_n - \mu_n) = -\frac{p(0, 0) + p(a, 0) + p(0, b) + p(a, b)}{16}.$$

Индекс под знаком суммы означает, что суммирование происходит по всем собственным значениям с учетом кратностей.

Выписанная формула вполне аналогична формуле первого следа для оператора Штурма—Лиувилля.

Заметим, что при доказательстве этой формулы и других (периодический случай, размерность пространства больше двух и др.) мы пользуемся глубокими результатами из теории чисел: теоремой Туэ—Зигеля—Рота, теоремой Лиувилля—о приближении алгебраических чисел рациональными, теоремой Сперанского о числе целых точек в круге и др.

Отметим, наконец, что для бигармонического оператора с периодическими условиями на квадрате формула первого следа выглядит так:

$$\sum_{(n)} (\lambda_n - \mu_n) = 0,$$

если возмущение $p(x, y)$ имеет вид

$$p(x, y) = \sum_{n>0, m>0}^{N, M} c_{n, m} e^{\frac{2\pi i}{a}(nx + my)}, 0 < N < \infty,$$

$0 < M < \infty$, $n^2 + m^2$ — нечетное число.

§ 1. Формулировка результатов

Пусть T — самосопряженный дискретный (см. [2]) оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(T)$. Пусть $\sigma(T)$ — спектр оператора T , λ_n — точка спектра — собственные числа: $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \lambda_n \rightarrow \infty$.

Через ν_n обозначим кратность собственного значения λ_n , а через $d_n = \rho(\lambda_n, \sigma(T) \setminus \{\lambda_n\})$ — расстояние от спектра T без λ_n и совпадающих с λ_n собственных чисел до собственного значения λ_n . Пусть P — ограниченный, определенный всюду в H оператор, μ_n — собственные значения оператора $T + P$, расположенные в порядке возрастания $\operatorname{Re} \mu_n$, ν'_n — алгебраическая кратность собственного значения μ_n . Далее, пусть v_{in} — определенным образом выбранные собственные функции, отвечающие собственному числу λ_n оператора T :

$$T v_{in} = \lambda_n v_{in}, \quad i = 1, 2, \dots, \nu_n, \quad \|v_{in}\| = 1.$$

Пусть $(T + P - \mu_n) u_{in} = 0$, $i = 1, 2, \dots, \nu'_n$, $\|u_{in}\| = 1$, u_{in} — линейно независимы. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \cdot d_n^{-1}$ сходится. Тогда $\sum_{(n)} |\mu_n - \lambda_n| < \infty$ тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu_n} |(P v_{in}, v_{in})| < \infty$. Суммирование разностей собственных чисел происходит с учетом их кратностей.

Пусть Π_2 — прямоугольник: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $a^2/b^2 = \alpha$ — алгебраическое число степени $m \geq 2$. Пусть оператор T порождается операцией Лапласа на соответствующих функциях, определенных на этом прямоугольнике, удовлетворяющих нулевому граничному условию на $\partial \Pi_2$, $\partial \Pi_2$ — граница прямоугольника Π_2 . Мы рассматриваем задачу на собственные значения для оператора T в $\mathcal{L}_2(\Pi_2)$. Пусть P — оператор умножения в $\mathcal{L}_2(\Pi_2)$ на гладкую функцию $p(x, y)$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\gamma > 0$ и $T^{3+\gamma}$ — степень оператора T , порождаемого задачей Дирихле с нулевыми условиями в прямоугольнике Π_2 ($T^\nu = \int \lambda^\nu dE(\lambda)$), $E(\lambda)$ — разложение единицы оператора T . Пусть λ_n — собственные числа оператора $T^{3+\nu}$, занумерованные в порядке возрастания их величин, а μ_n — суть собственные числа оператора

$T^{3+\nu} + P$, расположенные по возрастанию их действительных частей, P — поератор умножения на дважды дифференцируемую функцию $p(x, y)$, заданную на Π_2 .

$$\iint_{\Pi_2} p(x, y) \cos \frac{2\pi}{a} nx \, dx dy - \iint_{\Pi_2} p(x, y) \cos \frac{2\pi}{b} my \, dx dy = 0,$$

$$p'_x(0, y) = p'_x(a, y) = p'''_{xxy}(x, 0) = p'''_{xxy}(x, b), \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\sum_{(n)} (\lambda_n - \mu_n) = -\frac{p(0, 0) + p(a, 0) + p(0, b) + p(a, b)}{16}.$$

Пусть $f(x)$ — вещественная дважды дифференцируемая функция, определенная для $x > 0$. Предположим, что $f(x)$, $f'(x)$ строго возрастают и $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, а также $f'(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Рассмотрим операторы $f(T)$ и $f(T) + P$, где $f(T) = \int f(\lambda) dE(\lambda)$, $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора P -оператора, определенного выше, оператор P рассматривается тот же, что и выше.

ТЕОРЕМА 3. Пусть на функцию $p(x, y)$ наложены те же условия, что и в теореме 2, пусть λ_n — собственные числа оператора $f(T)$, μ_n — собственные числа оператора $f(T) + P$. Тогда:

1. Если существует число $\varepsilon > 0$ и число β , $0 < \beta < 1$, такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1+\varepsilon} [f'(c(1-\beta)n)]^{-1} < \infty,$$

$c = \frac{4\pi}{ab}$, а число $a^2/b^2 = \alpha$ — алгебраические степени $m > 0$, то

$$\sum_{(n)} (\lambda_n - \mu_n) = -\frac{p(0, 0) + p(a, 0) + p(0, b) + p(a, b)}{16}.$$

2. Если α — квадратичная иррациональность.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n [f'(c(1-\beta)n)]^{-1} < \infty, \quad 0 < \beta < 1, \quad c = \frac{4\pi}{ab},$$

то также справедливо выписанная выше формула первого следа.

Пусть теперь Π_n — прямоугольник в R_n : $0 \leq x_i \leq a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть $\alpha_i = a_i^2/a_1^2$, $i = 1, 2, \dots, n$, — алгебраические числа. Будем предполагать, что $1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ линейно независимы над полем рациональных чисел, пусть ν — степень поля $Q(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $Q(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — поле, получающиеся из рациональных чисел Q и алгебраических чисел $\alpha_2, \dots, \alpha_n$. Под степенью поля понимается размерность $Q(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ как векторного пространства.

Справедлива теорема 4, аналогичная теореме 3, при условии, что рассматриваются операторы T^m и $T^m + P$, $m > \frac{n}{2} + \nu$, и накладываются определенные условия на функцию $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$. При этих предположениях можно высказать теорему.

ТЕОРЕМА 4. Пусть λ_n — собственные числа оператора T^m , μ_n — собственные числа оператора $T^m + P$, пусть $m > \frac{n}{2} + \nu$, где ν — степень поля $Q(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$, пусть на функцию $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ накладываются условия, аналогичные условиям в теореме 3. Тогда

$$\sum_{(n)} (\lambda_n - \mu_n) = (-1)^{n+1} \frac{\sum p(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})}{4^n},$$

где суммирование происходит так, что в результате берется сумма значений функции $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ во всех вершинах прямоугольника.

Наконец, рассмотрим бигармоническое уравнение в квадрате со стороной a и периодические границы условия:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u, \\ u(0, y) &= u(a, y), \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(a, y)}{\partial x}, \quad 0 \leq y \leq a, \\ u(x, 0) &= u(x, a), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, a)}{\partial y}, \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Пусть T — соответствующий самосопряженный оператор, порождаемый этой задачей в $\mathcal{L}_2(\Pi)$.

Пусть $p(x, y) = \sum_{p, q}^{N, M} c_{p, q} e^{2\pi i/a(px+qy)}$, N, M — конечные числа, $p^2 + q^2$ — нечетное число.

ТЕОРЕМА 5. Обозначим через λ_n — собственные числа оператора T , а через μ_n — собственные числа оператора $T + P$, где P — оператор умножения на функцию $p(x, y)$, указанную выше. Тогда $\sum_{(n)} (\lambda_n - \mu_n) = 0$.

§ 2. Доказательства теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. а) Пусть у оператора $T + P$ все корневые векторы суть собственные.

Если опустить индекс i в обозначениях собственных операторов в случае кратного собственного числа, то можно записать, что

$$(u_n, Tv_n) = \lambda_n(u_n, v_n) = (Tu_n, v_n) = -(Pu_n, v_n) + \mu_n(u_n, v_n),$$

$$(\mu_n - \lambda_n) = \frac{(Pu_n, v_n)}{(u_n, v_n)} = \frac{(Pv_n, v_n)}{(u_n, v_n)} + \frac{(P(u_n - v_n), v_n)}{(u_n, v_n)}.$$

Докажем, что существует такая постоянная c , что для всех n $\|u_n - v_n\| \leq cd_n^{-1}$. Введем проекторы:

$$E(\lambda_n, T) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} (T - \lambda E)^{-1} d\lambda,$$

$$E(\lambda_n, T + P) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} (T + P - \lambda E)^{-1} d\lambda.$$

Известно, что $E(\lambda_n, T)$ — ортогональный проектор и проектирует на конечномерное подпространство $R(\lambda_n, T)$, натянутое на собственные векторы оператора T , отвечающие собственному значению λ_n ; $E(\lambda_n, T + P)$ проектирует на конечномерное корневое подпространство оператора $T + P$, отвечающее собственным значениям, сосредоточенным вблизи λ_n . Проектор $E(\lambda_n, T + P)$, вообще говоря, не ортогональный. По доказанному в [1], если $d_n \rightarrow \infty$ и T — дискретный полуограниченный самосопряженный оператор, то $|\mu_n - \lambda_n| < M < \infty$, $\forall n$, где $M > 0$ и не зависит от n .

Запишем соотношение:

$$\begin{aligned} & \|E(\lambda_n, T + P) - E(\lambda_n, T)\| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{|\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2}} \{(T - \lambda E)^{-1} - (T + P - \lambda E)^{-1}\} d\lambda \right\| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{|\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2}} (T + P - \lambda E)^{-1} P (T - \lambda E)^{-1} d\lambda \right\| \leq \frac{c}{d_n}, \quad c > 0. \end{aligned}$$

(Здесь мы воспользовались оценкой $\|(T - \lambda E)^{-1}\| \leq cd_n^{-1}$, когда λ принадлежит контуру $|\lambda - \lambda_n| = 2^{-1}d_n$). В качестве v_n возьмем

$$v_n = \frac{E(\lambda_n, T) u_n}{\|E(\lambda_n, T) u_n\|}.$$

Такой выбор возможен, поскольку, когда $\|E(\lambda_n, T) - E(\lambda_n, T + P)\| < 1$, то $E(\lambda_n, T)$ проектирует $R(\lambda_n, T + P)$ на $R(\lambda_n, T)$ взаимно однозначно, следовательно, в нуль переходит только нулевой вектор. То, что $\|E(\lambda_n, T) - E(\lambda_n, T + P)\| < 1$ для достаточно больших номеров n , следует из оценки выше и условий теоремы.

Воспользуемся известной оценкой:

$$\|E(\lambda_n, T) u_n\| \geq (1 - \|E(\lambda_n, T) - E(\lambda_n, T + P)\|) \|u_n\|,$$

где $u_n \in R(\lambda_n, T + P)$, $\|u_n\| = 1$ и выполнена оценка $\|E(\lambda_n, T) - E(\lambda_n, T + P)\| < 1$.

Запишем

$$\begin{aligned} & \|u_n - v_n\| = \\ & = \left\| u_n - \frac{E(\lambda_n, T) u_n}{\|E(\lambda_n, T) u_n\|} \right\| = \left\| \frac{E(\lambda_n, T) u_n}{\|E(\lambda_n, T) u_n\|} - E(\lambda_n, T + P) u_n \right\| \leq \\ & \leq \left\| \frac{E(\lambda_n, T) u_n}{\|E(\lambda_n, T) u_n\|} - \frac{E(\lambda_n, T + P) u_n}{\|E(\lambda_n, T) u_n\|} \right\| + \\ & + \left\| \frac{E(\lambda_n, T + P) u_n}{\|E(\lambda_n, T) u_n\|} - E(\lambda_n, T + P) u_n \right\| \leq \|E(\lambda_n, T) u_n\|^{-1} \times \\ & \times \|E(\lambda_n, T) u_n - E(\lambda_n, T + P) u_n\| + \|\|E(\lambda_n, T) u_n\|^{-1} - 1\| \times \\ & \times \|E(\lambda_n, T + P) u_n\| \leq \frac{cd_n^{-1}}{1 - cd_n^{-1}} + \left| \frac{1}{1 - cd_n^{-1}} - 1 \right| < \text{const } d_n^{-1}, \end{aligned}$$

где const не зависит от n и больше нуля, n — достаточно большое. Таким образом, $\|u_n - v_n\| \leq \text{const } d_n^{-1}$ для любых n . Значит, $|(u_n, v_n)| \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$,

$$|(P(u_n - v_n), v_n)| \leq \text{const } d_n^{-1}.$$

Запишем

$$|\mu_n - \lambda_n| \leq \text{const} [| (Pv_n, v_n) | + d_n^{-1}].$$

Поскольку спектр может быть кратным и индекс i нами опущен, то надо в оценке выше, которую мы будем суммировать, учитывать кратность v_n . Из предположений теоремы $\sum_{n=1}^{\infty} v_n d_n^{-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{v_n} |(Pv_{in}, v_{in})|$ сходятся, значит, сходится и $\sum_{(n)} |\mu_n - \lambda_n|$, что и требовалось.

б) Пусть не все корневые векторы оператора $T + P$ собственные. Тогда выбор v_n производится так: если есть корневой вектор, но не собственный, то переходим к собственному вектору с тем же собственным числом и в сумме $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu_n} |(Pv_{in}, v_{in})|$ появляются одинаковые слагаемые, отвечающие только соответствующим собственным векторам. Оценки при этом те же. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. $\sum_{(n)} (\mu_n - \lambda_n) = \sum_{(n)} (P\tilde{v}_n, \tilde{v}_n)$, если $\sum |(Pv_n, v_n)| < \infty$, $\sum |(P\tilde{v}_n, \tilde{v}_n)| < \infty$, $\sum \nu_n d_n^{-1} < \infty$, $\sum |\lambda_n|^{-1} < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Суммирование выше происходит с учетом кратностей, индекс i в обозначениях собственных векторов опущен.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Выше $\{\tilde{v}_n\}$ — ортонормированная система собственных векторов оператора T , плотная в гильбертовом пространстве H .

Действительно, мы показали, что при условиях, сформулированных в следствии, ряд $\sum_{(n)} |\mu_n - \lambda_n|$ сходится, а тогда, как это следует из работы [3] выполняется равенство

$$\sum_{(n)} (\mu_n - \lambda_n) = \sum_{(n)} (P\tilde{v}_n, \tilde{v}_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\lambda_{k,m}$ — собственные числа оператора T :

$$\lambda_{k,m} = \frac{\pi^2}{a^2} k^2 + \frac{\pi^2}{b^2} p^2, \quad k, p = 1, 2, \dots$$

Если нумерация происходит по возрастанию величин собственных чисел, то обозначать их будем λ_n .

Доказательство нашей теоремы будет основано на теореме Рота о приближении алгебраических чисел рациональными.

ТЕОРЕМА РОТА 1. (см. [4]). Пусть α — алгебраическое число степени $m \geq 2$, тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует только конечное число рациональных дробей p/q таких, что $|\alpha - \frac{p}{q}| < q^{-(2+\varepsilon)}$. Пусть $\lambda_{k',p'}$ — ближайшее собственное число оператора T к $\lambda_{k,p}$, $k' \neq k$ или $p' \neq p$. Тогда

$$\begin{aligned} |\lambda_{k,p} - \lambda_{k',p'}| &= \frac{\pi^2}{a^2} |p^2 - p'^2| \left| \frac{k^2 - k'^2}{p^2 - p'^2} + \alpha \right| \geq \\ &\geq c(\alpha) \frac{\pi^2}{a^2} |p^2 - p'^2|^{(-1+\varepsilon)} \geq c\lambda_{k,p}^{-1-\varepsilon}, \quad c > 0, \quad p \neq p'. \end{aligned}$$

Если $p = p'$, то выполнение неравенства очевидно.

Рассмотрим оператор $T^{3+\gamma}$, $\gamma > 0$, его собственные числа суть $\lambda_{k,p}^{3+\gamma}$, кратность собственных чисел равна единице $\nu_n = 1$, $d \geq \text{const } n^{1+\frac{\gamma}{2}}$, так как, например,

$$|\lambda_n^{3+\gamma} - \lambda_{n-1}^{3+\gamma}| \geq \text{const} \lambda_{n-1}^{2+\gamma} |\lambda_n - \lambda_{n-1}| \geq \text{const} \lambda_{n-1}^{1+\gamma-\varepsilon}.$$

Выберем ε , равным $\frac{\gamma}{2}$. Тогда

$$|\lambda_n^{3+\gamma} - \lambda_{n-1}^{3+\gamma}| \geq \text{const} \lambda^{1+\frac{\gamma}{2}}.$$

Отсюда и следует оценка для d_n , так как $\lambda_n \sim cn$. Выше $c > 0$, $\text{const} > 0$.

Для доказательства теоремы нам осталось применить теорему 1 и следствие из нее, а также вычислить следующую сумму:

$$\frac{4}{ab} \sum_{k,p} \iint_{\Pi_2} p(x,y) \sin^2 \frac{\pi}{a} kx \cdot \sin^2 \frac{\pi}{b} py \, dx dy.$$

При предположениях теоремы, очевидно, получаем, что

$$\sum_{(n)} (\lambda_n - \mu_n) = - \frac{p(0,0) + p(a,0) + p(0,b) + p(a,b)}{16}.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 Пусть $f(T) = \int f(\lambda) dE(\lambda)$. Докажем случай 1. Оценим d_n снизу; например,

$$\begin{aligned} |f(\lambda_n) - f(\lambda_{n-1})| &= |f'(\lambda_{n-1} + (1-\beta)(\lambda_n - \lambda_{n-1}))| |\lambda_n - \lambda_{n-1}| \geq \\ &\geq \text{const} \frac{|f'(c(1-\beta)n)|}{n^{1+\varepsilon}}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \text{const} > 0, \quad c = \frac{4\pi}{ab}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$d_n \geq \text{const} \frac{f'(c(1-\beta)n)}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1+\varepsilon} [f'(c(1-\beta)n)]^{-1}$ сходится, то сходится и ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{-1}$. Доказательство в этом случае заканчивается аналогично предыдущему.

Докажем случай 2. Для доказательства этого случая надо воспользоваться теоремой Лиувилля, которая гласит, что если α — алгебраическое число степени $m \geq 2$, то $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq C(\alpha)q^{-m}$, где p и q целы.

Воспользовавшись этой оценкой при оценке d_n снизу и применив предыдущие рассуждения, получаем доказательство теоремы и в этом случае.

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично теореме 2, но вместо теоремы Туэ—Зигеля—Рота надо воспользоваться усиленной теоремой Лиувилля (см. [5]).

ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ (УСИЛЕННАЯ) 1. Пусть α_i , $i = 1, 2, \dots, k$ $Q(\alpha_2, \dots, \alpha_k)$, ν те же, что и в теореме 4. Тогда

$$\left| \sum_{i=1}^k q_i \alpha_i \right| > \frac{c(\alpha_2, \dots, \alpha_k)}{H_0^{\nu-1}},$$

где H_0 — высота т. е. $H_0 = \max_{1 \leq i \leq n} (|q_1|, \dots, |q_n|)$, а $|q_i|$ — любые целые числа, не равные нулю одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & E(\lambda_n, T + P) - E(\lambda_n, T) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} (T + P - \lambda E)^{-1} P (T - \lambda E)^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} (T - \lambda E)^{-1} P (T - \lambda E)^{-1} d\lambda + O(d_n^{-2}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $O(d_n^{-2})$ — обозначает линейный оператор с нормой порядка $O(d_n^{-2})$, d_n — расстояние от собственного значения (бигармонического оператора) до спектра $\sigma(T)$ без $\{\lambda_n\}$.

Выберем собственные функции v_n оператора T , отвечающие собственному числу λ_n , следующим образом:

$$v_n = E(\lambda_n, T) u_n \cdot \|E(\lambda_n, T) u_n\|^{-1} \in R(\lambda_n, T),$$

где u_n — какой-нибудь собственный вектор оператора $T + P$, отвечающий собственному значению μ_n .

Подставляем v_n в (1) и сокращаем на множитель $\|E(\lambda_n, T) u_n\|^{-1}$. Поскольку

$$\|E(\lambda_n, T) u_n\| \geq (1 - \|E(\lambda_n, T) - E(\lambda_n, T + P)\|) \|u_n\|,$$

то

$$E(\lambda_n, T + P) E(\lambda_n, T) u_n - E(\lambda_n, T) u_n =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} (T - \lambda E)^{-1} P(T - \lambda E)^{-1} d\lambda \cdot E(\lambda_n, T) u_n + O(d_n^{-2}). \quad (2)$$

Оценка остатка в силу вышесказанного сохранится.

В первое слагаемое соотношения (2) вместо $E(\lambda_n, T) u_n$ подставим выражение из (1). Имеем

$$\begin{aligned} & E(\lambda_n, T + P) u_n - E(\lambda_n, T + P) (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} (T - \lambda E)^{-1} \times \\ & \quad \times P(T - \lambda E)^{-1} d\lambda E(\lambda_n, T) u_n = E(\lambda_n, T) u_n + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} (T - \lambda E)^{-1} P(T - \lambda E)^{-1} E(\lambda_n, T) u_n d\lambda + O(d_n^{-2}), \quad (3) \\ & u_n = \frac{E(\lambda_n, T + P)}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} (T - \lambda E)^{-1} P(T - \lambda E)^{-1} \times \\ & \quad \times E(\lambda_n, T) u_n d\lambda + E(\lambda_n, T) u_n + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} (T - \lambda E)^{-1} P(T - \lambda E)^{-1} E(\lambda_n, T) u_n d\lambda + O(d_n^{-2}). \end{aligned}$$

Справа в (3) вместо первого слагаемого подставляем выражение из (1). Отбрасывая члены порядка $O(d_n^{-2})$, имеем

$$\begin{aligned} u_n & \sim \frac{E(\lambda_n, T)}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} (T - \lambda E)^{-1} P(T - \lambda E)^{-1} E(\lambda_n, T) u_n d\lambda + \\ & + E(\lambda_n, T) u_n + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} (T - \lambda E)^{-1} P(T - \lambda E)^{-1} E(\lambda_n, T) u_n d\lambda, \end{aligned}$$

где эквивалентность понимается по норме пространства H с точностью до членов порядка $O(d_n^{-2})$.

Пусть

$$\begin{aligned} x_n & = \frac{E(\lambda_n, T)}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} (T - \lambda E)^{-1} P(T - \lambda E)^{-1} \times \\ & \quad \times E(\lambda_n, T) u_n d\lambda + E(\lambda_n, T) u_n, \end{aligned}$$

$$y_n \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} (T - \lambda E)^{-1} P(T - \lambda E)^{-1} E(\lambda_n, T) u_n d\lambda.$$

Проинтегрируем y_n ; используем разложение

$$E(\lambda_n, T) u_n = \sum_{\lambda_n = [\pi^2 \cdot a^{-2}(l^2 + m^2)]^2} a_{l,m} \exp(2\pi i a^{-1}(lx + my)).$$

где $a_{l,m}$ — коэффициенты Фурье, $\sum |a_{l,m}|^2 \leq 1$; разложение происходит в собственном подпространстве $R(\lambda_n, T)$.

Пусть

$$Px_n = \sum_{p,q,l,m} x_{i,m} c_{pq} \exp\{2\pi i a^{-1}[(l+p)x + (q+m)y]\},$$

причем в суммах присутствует лишь конечное число слагаемых, $x_{l,m}$ — коэффициенты Фурье x_n по системе $\exp[2\pi i a^{-1}(lx + my)]$, где $[(l^2 + m^2)\pi^2 a^{-2}]^2 = \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$

Тогда $(Px_n, E(\lambda_n, T) u_n) = 0$, кроме случая, когда $l + p = l_0$, $m + q = m_0$, $[\pi^2 a^{-2}(l_0^2 + m_0^2)]^2 = \lambda_n$. Если же выполняется этот случай, то $(l + p)^2 = l_0^2$, $(m + q)^2 = m_0^2$ и $(l + p)^2 + (m + q)^2 = l^2 + m^2$, т. е. $2lp + 2mq + p^2 + q^2 = 0$, что в силу наших условий на p и q невозможно.

Далее, аналогично $(Py_n, E(\lambda_n, T) u_n) = 0$, за исключением случая, когда

$$2l(p + p') + 2m(q + q') + (p + p')^2 + (q + q')^2 = 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} Py_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_n| = d_n/2} P(T - \lambda E)^{-1} P(T - \lambda E)^{-1} E(\lambda_n, T) u_n d\lambda = \\ &= PR_n(\lambda_n, T) PE(\lambda_n, T) v_n, \\ R_n(\lambda_n, T) &= \sum_{i \neq n} (\lambda_n - \lambda_i)^{-1} E(\lambda_i, T), \end{aligned}$$

сходимость ряда понимается в сильном смысле (на каждом векторе). Выражение для Py_n написанное выше, есть формула векторного интегрирования с помощью вычетов (см. [2, стр. 1]).

Значит

$$Py_n \sum_{i \neq n} \frac{PE(\lambda_n, T)}{\lambda_n - \lambda_i} PE(\lambda_n, T) u_n.$$

Каждый член ряда оценивается сверху через $c d_n^{-1} \leq c(l^2 + m^2)^{-1}$, $c > 0$, и не зависит от n $\lambda_n = \pi^2 a^{-2}(l^2 + m^2)$. Тогда

$$(Py_n, E(\lambda_n, T) u_n) = \sum_{l \neq n} \left(\frac{PE(\lambda_i, T) PE(\lambda_n, T) u_n}{\lambda_n - \lambda_i}, E(\lambda_n, T) u_n \right).$$

Каждый член этого ряда равен нулю, за исключением случая, когда

$$2l(p + p') + 2m(q + q') + (p + p')^2 + (q + q')^2 = 0,$$

причем числа c_{pq} и $c_{p'q'}$ одновременно не равны нулю, а таких номеров p, p', q, q' — конечное число.

Число совпадающих собственных значений оператора T по теореме Серпинского есть величина порядка

$$O(n^{1/3}) = O(l^{2/3}).$$

Действительно, теорема Серпинского утверждает, что число точек $A(r)$ с целыми координатами в круге $x^2 + y^2 \leq r^2$ находится по формуле $A(r) = \pi r^2 + O(r^{2/3})$, т. е. кратность собственного значения λ_n оператора Лапласа с периодическими условиями есть величина порядка $O(n^{1/3})$. Но числа l и m такие, что $\lambda_n = [\pi^2 a^{-2}(l^2 + m^2)]^2$, у нас связаны линейным соотношением и $l^2 + m^2 \geq cl^2$, $c > 0$. Отсюда и следует, что число совпадающих собственных чисел у оператора T при достаточно больших номерах есть величина порядка $O(l^{2/3})$.

Суммируя члены, отличные от нуля, удовлетворяющие оценке по порядку $O(l^{-2})$ с учетом кратности (порядка $O(l^{2/3})$), и учитывая, что отличных от нуля c_{pq} лишь конечное число, получаем мажоранту порядка $O(l^{-4/3})$ для членов ряда

$$\sum_{(n)} (Py_n, E(\lambda_n, T) u_n).$$

Итак, $\sum_{(n)} \frac{|(P(u_n - v_n), v_n)|}{|(u_n, v_n)|}$ сходится. Но $\sum_{(n)} (Pv_n, v_n) = 0$, так как каждый член равен нулю в силу наших условий на p и q . Тогда

$$\sum_n (\mu_n - \lambda_n) = \sum_{m, l} (p(x, y) \exp[2\pi i a^{-1}(mx + ly)], \exp[2\pi i a^{-1}(mx + ly)]) = 0.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Садовничий В. А., Дубровский В. В. Дифференц. уравнения, 13, № 7, 1977.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральные операторы, ч. III, М.: Мир, 1974.
3. Halberg C. J., Kramer V. A. Duke Mathematical Journal, vol. 27, P. 607—618. 1960.
4. Poth K. F. Rational approximations to algebraic numbers, Mathematica, 1, 1955, 1—20 (русский перевод: сб. "Математика 1:1, 1957, С.3—18).
5. Гельфонд А. О. Алгебраические и трансцендентные числа. М., 1952.