

УДК 517.956

## Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов<sup>1</sup>

В. А. Садовничий, В. А. Любишкин

### § 1. Введение

В настоящее время практически завершена (см. [1, 2] теория регуляризованных следов задач, порожденных обыкновенными дифференциальными выражениями на конечных отрезках. Это обстоятельство во многом связано с фактом, обнаруженным в работе [1] и заключается в том, что получение формул следов в этом случае сводится к исследованию нулей целых функций, имеющих вполне определенную асимптотическую структуру, обусловленную конкретным видом фундаментальной системы решений дифференциального уравнения. Однако даже в этой ситуации приходится сталкиваться (см. [2]) с фактом, что нули исследуемых целых функций не имеют достаточно регулярного асимптотического поведения, что приводит к необходимости привлечения в этих случаях методов теории возмущений.

Ситуация значительно осложняется при рассмотрении задач, порожденных дифференциальными операторами с частными производными. Это связано прежде всего со сложной структурой спектра, а следовательно, и функцией от спектрального параметра  $\lambda$ , возникающих при исследовании подобных задач.

В настоящее время теория регуляризованных следов дискретных операторов разработана сравнительно мало. Из таких результатов следует отметить работу [3], в которой формулы следов получены в случае самоспряженных ядерных возмущений, работу [4], в которой теория распространена на случай диссипативных возмущений. В работе [5] был дан алгоритм получения формул следов широкого класса дискретных операторов.

---

<sup>1</sup>Функц. анализ и его приложения, т. 20, № 3, 1986. с. 55–65.

Следует подчеркнуть, что и теоретико-функциональные методы, методы теории функций по-прежнему имеют важное значение при исследовании спектральных задач абстрактных операторов. Более того, именно сочетание методов теории возмущений с методами теории функций приводят к наиболее содержательным результатам. Примерами здесь являются глубокие исследования в теории следов операторов, имеющих непрерывный спектр (см., например, [6, 7]).

В данной работе будет показано, что в случае относительно-конечномерных возмущений результаты работы [5] могут быть конкретизированы, и возникающие при этом формулы следов принимают явный вид.

Конечномерные возмущения широко используются в математике. В монографии [8] они используются при исследовании задач теории рассеяния. В работе [9] показано, что задача о разложении по собственным функциям дифференциальных операторов на конечном отрезке сводится к изучению конечномерных возмущений вольтеррова оператора. В теории следов конечномерные возмущения (ограниченные) использовались в указанной нами работе [3].

## § 2. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть  $L_0$  — самосопряженный дискретный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ . Рассмотрим произвольное относительно-конечномерное (см. [8]) возмущение оператора  $L_0$  ранга  $r$

$$Lu = L_0u + \sum_{k=1}^r (L_0u, f_k) g_k. \quad (1)$$

Отметим, что оператор  $L$ , определенный по формуле (1), не является самосопряженным, и поскольку векторы  $f_k$  не обязаны принадлежать области определения оператора  $L_0$  рассматриваемые возмущения, вообще говоря, не являются ограниченными, однако они являются все-таки слабыми (в смысле работы [10]) возмущениями самосопряженного оператора  $L_0$ . Основной результат работы заключен в следующем.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $L_0$  — самосопряженный дискретный полуограниченный снизу оператор, действующий в сепарабельном гильберто-

вом пространстве  $H$ . Пусть функция распределения его собственных значений имеет вид

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} 1 = c\lambda + O(\lambda^p), \quad (2)$$

где  $c$  — векторная константа,  $0 < p < 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Рассмотрим оператор  $L = L_0 + \sum_{k=1}^r (L_0, f_k) g_k$ . Предположим, что  $f_k \in D(L_0^{q_k})$ ,  $g_k \in D(L_0^{2-q_k})$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , где  $q_k$  — некоторые вещественные числа  $0 \leq q_k \leq 2$ , символ  $D(T)$  означает область определения оператора  $T$ , а степени оператора  $L_0$  определяются по формуле  $L_0^q = \int_0^\infty \lambda^q dE_\lambda$ , где  $E_\lambda$  — спектральное семейство проекционных операторов оператора  $L_0$ . Тогда оператор  $L$  также является дискретным, причем существует подпоследовательность натуральных чисел  $k_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\mu_k - \lambda_k) = \sum_{j=1}^r (L_0^{1-q_j} g_j, L_0^{q_j} f_j). \quad (3)$$

Здесь  $\mu_k$  и  $\lambda_k$  — собственные значения операторов  $L$  и  $L_0$  соответственно, занумерованные в порядке возрастания вещественных частей с учетом кратности.

Таким образом, соотношение (3) — это формула регуляризованного следа собственных значений  $\mu_k$  оператора  $L$ . Правая часть этого соотношения — явно вычисляемое выражение.

Введение констант  $q_j$  в формулировку теоремы обусловлено следующей причиной. Сформулированная теорема будет применяться к получению формул следов для дифференциальных операторов, области определения которых могут задаваться некоторым набором граничных форм. Хорошо известно (см., например, [11]), что при описании степеней таких операторов часть граничных условий может пропадать. Это обстоятельство позволяет либо ослаблять, либо получать новые условия, налагаемые на возмущение, при которых формула (3) имеет место.

Доказательство сформулированной выше теоремы будет проведено нами поэтапно. Вначале будет подробно исследована ситуация одномерного возмущения оператора  $L_0$ . При этом отдельно будут рассмотрены случаи, когда константа  $c$  в формуле (2) равна нулю и когда отлична от нуля. О различии этих вариантов будет сказано ниже.

После этого будет сделан естественный переход к случаю конечномерного возмущения оператора  $L_0$ . Отметим также, что при написании данной статьи авторы испытали большое влияние идей работы [12].

### § 3. Резольвента оператора $L$

Рассмотрения данного параграфа носят чисто алгебраический характер и являются абстрактным аналогом сведения интегральных уравнений с вырожденным ядром к системе линейных алгебраических уравнений.

Для нахождения резольвенты оператора  $L$  нам необходимо исследовать разрешимость уравнения

$$L_0 u + \sum_{h=1}^r (L_0 u, f_h) = \lambda u + f \quad (4)$$

при  $f \in H$  и  $u \in D(L_0)$ .

Пусть  $\lambda$  не является точкой спектра оператора  $L_0$ . Подействуем на равенство (3) оператором  $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ :

$$u + \sum_{j=1}^r (L_0 u, f_j) R_\lambda^0 g_j = R_\lambda^0 f.$$

Обозначим  $(L_0 u, f_j) = \xi_j$ . Тогда имеем  $u + \sum_{j=1}^r \xi_j R_\lambda^0 g_j = R_\lambda^0 f$ , откуда  $u = -\sum_{j=1}^r \xi_j R_\lambda^0 g_j + R_\lambda^0 f$ . Подставляя выражение для  $u$  в формулу, определяющую  $\xi_j$ , получим для нахождения коэффициентов  $\xi_j$  систему линейных алгебраических уравнений

$$\xi_k + \sum_{j=1}^r (L_0 R_\lambda^0 g_j, f_k) \xi_j = (L_0 R_\lambda^0 f, f_k), \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение определитель

$$\Delta(\lambda) = |\delta_{jk} + (L_0 R_\lambda^0 g_j, f_k)|_1^r.$$

В дальнейшем будет показано, что в условиях сформулированной теоремы при стремлении  $\lambda$  к бесконечности, например по мнимой оси, величины  $(L_0 R_\lambda^0 g_j, f_k)$  стремятся к нулю, откуда следует, что функция  $\Delta(\lambda)$  не равна тождественно нулю. Обозначим через  $\Delta_{jk}(\lambda)$  алгебраическое дополнение элемента определителя  $\delta_{jk} + (L_0 R_\lambda^0 g_j, f_k)$  ( $j, k = 1, 2, \dots, r$ ).

Пусть  $\lambda$  таково, что  $\Delta(\lambda) \neq 0$ . Тогда из системы (5) получаем

$$\xi_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{j=1}^r \Delta_{jk}(\lambda) (L_0 R_\lambda^0 f, f_j) \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Подставляя найденные значения коэффициентов  $\xi_k$  в выражение для  $u$ , окончательно имеем

$$R_\lambda f = (L - \lambda E)^{-1} f = R_\lambda^0 f - \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{k,j=1}^r \Delta_{kj}(\lambda) (L_0 R_\lambda^0 f, f_j) R_\lambda^0 g_k. \quad (6)$$

Соотношения, аналогичные формуле (6), неоднократно использовались в литературе при исследовании различного рода задач (см. [3, 8, 9]).

Из равенства (6), в силу мероморфности правой части, следует, что оператор  $L$  также является дискретным оператором, причем его резольвента отличается от резольвенты оператора  $L_0$  на конечномерный оператор. Отметим также, что собственные значения оператора  $L$  совпадают с особенностями правой части формулы (6).

## § 4. Одномерное возмущение

В данном параграфе будут доказаны вспомогательные утверждения.

В случае одномерного возмущения  $L = L_0 + (L_0; f)g$  формула (6) принимает вид

$$R_\lambda = R_\lambda^0 - \frac{(L_0 R_\lambda^0; f) R_\lambda^0 g}{1 + (L_0 R_\lambda^0 g, f)}. \quad (7)$$

В силу самосопряженности оператора  $L_0$  имеем

$$(L_0 R_\lambda^0 g, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(L_0 E_z g, f)}{z - \lambda} = \sum_n \frac{(L_0 E_{\lambda_n} g, f)}{\lambda_n - \lambda}, \quad (8)$$

где  $E_z$  — спектральное семейство оператора  $L_0$ , а  $R_{\lambda_k} = E_{\lambda_{k+0}} - E_{\lambda_{k-0}}$  — проектор на собственное подпространство, отвечающее собственному значению  $\lambda_k$ . Обозначим  $c_k = (g, \varphi_k)$ ,  $b_k = (f, \varphi_k)$ , где  $\{\varphi\}$  — ортонормированный базис из собственных функций оператора  $L_0$ . Тогда

получим  $g = \sum_n c_n \varphi_0$ ,  $f = \sum_n b_n \varphi_n$ , причем сходимость рядов понимается в смысле сходимости в гильбертовом пространстве  $H$ . Равенство (8) при этом переписывается в виде

$$(L_0 R_\lambda^0 g, f) = \sum_n \frac{\lambda_n c_n \bar{b}_n}{\lambda_n - \lambda}. \quad (9)$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть  $f \in D(L_0^q)$ ,  $g \in D(L_0^{1-q})$  ( $0 \leq q \leq 1$ ). Тогда ряд  $\sum_n \lambda_n c_n \bar{b}_n$  сходится абсолютно и его сумма равна  $(L_0^{1-q} g, L_0^q f)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение легко следует из равенства Парсеваля. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_n \lambda_n c_n \bar{b}_n &= \sum_n \lambda_n^q \lambda_n^{1-q} (\varphi_n, f) (\varphi_n, g) = \\ &= \sum_n (g, L_0^{1-q} \varphi_n) (L_0^q \varphi_n, f) = \sum_n (L_0^{1-q} g, \varphi_n) (\varphi_n, L_0^q f) = (L_0^{1-q} g, L_0^q f). \end{aligned}$$

Отсюда и получается доказательство леммы.  $\square$

Обозначим через  $d(\lambda) = \rho(\lambda, \sigma(L_0))$  расстояние от точки  $\lambda$  до спектра оператора  $L_0$ .

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть  $f \in D(L_0^q)$ ,  $g \in D(L_0^{1-q})$  ( $0 \leq q \leq 1$ ). Тогда  $|(L_0 R_\lambda^0 g, f)| \leq \frac{\text{const}}{d(\lambda)}$ , где const не зависит от  $\lambda$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу равенства (9) и леммы 1 имеем

$$|(L_0 R_\lambda^0 g, f)| = \left| \sum_n \frac{\lambda_n c_n \bar{b}_n}{\lambda_n - \lambda} \right| \leq \frac{1}{d(\lambda)} \sum_n |\lambda_n c_n \bar{b}_n|.$$

Лемма 2 доказана.  $\square$

В частности, из леммы 2 следует утверждение о том, что величина  $(L_0 R_\lambda^0 g, f)$  стремится к нулю при стремлении  $\lambda$  к бесконечности по мнимой оси.

Пусть  $\lambda \neq 0$ . Тогда  $\frac{1}{z-\lambda} = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \frac{z}{z-\lambda}$ , откуда следует, что

$$(L_0 R_\lambda^{0^2} g, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(L_0 E_z g, f)}{z - \lambda} = -\frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} d(L_0 E_z g, f) +$$

$$+\frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zd(L_0 E_z g, f)}{z-\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \sum_n \lambda_n c_n \delta_n + \frac{1}{\lambda} \sum_n \frac{\lambda_n^2 c_n \delta_n}{\lambda_n - \lambda}. \quad (10)$$

Аналогично этому была доказана лемма 1, получим следующую лемму.

ЛЕММА 3. Пусть  $f \in D(L_0^q)$ ,  $g \in D(L_0^{2-q})$ . Тогда ряд  $\sum_n \lambda_n^2 c_n \bar{b}_n$  сходится абсолютно и его сумма равна  $(L_0^{2-q} g, L_0^q f)$ .

Возьмем след обеих частей равенства (7)

$$\text{Sp}(R_\lambda - R_\lambda^0) = -\frac{(L_0 R_\lambda^{0^2} g, f)}{1 + (L_0 R_\lambda^0 g, f)}. \quad (11)$$

Далее,

$$(L_0 R_\lambda^{0^2} g, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(L_0 E_z g, f)}{(z-\lambda)^2} = \sum_n \frac{\lambda_n c_n \bar{b}_n}{(\lambda_n - \lambda)^2}. \quad (12)$$

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4. Пусть  $f \in D(L_0^q)$ ,  $g \in D(L_0^{2-q})$ . Тогда

$$(L_0 R_\lambda^{0^2} g, f) = \frac{(L_0^{1-q} g, L_0^q f)}{\lambda^2} + F(\lambda).$$

где функции  $F(\lambda)$  допускает оценку

$$|F(\lambda)| \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| d^2(\lambda)}, \quad (13)$$

где const не зависит от  $\lambda$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу соотношения (12) и леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= (L_0 R_\lambda^{0^2} g, f) - \frac{(L_0^{1-q} g, L_0^q f)}{\lambda^2} = \sum_n \frac{\lambda_n c_n \bar{b}_n}{(\lambda_n - \lambda)^2} - \sum_n \frac{\lambda_n c_n \bar{b}_n}{\lambda^2} = \\ &= \sum_n \lambda_n c_n \bar{b}_n \frac{\lambda_n^2 - 2\lambda \lambda_n^2}{\lambda^2 (\lambda_n - \lambda)^2} = \sum_n \lambda_n^2 c_n \bar{b}_n \left\{ \frac{1}{\lambda^2 (\lambda_n - \lambda)} - \frac{1}{\lambda (\lambda_n - \lambda)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Используя лемму 3, получим

$$|F(\lambda)| \leq \text{const} \left\{ \frac{1}{|\lambda|^2 d(\lambda)} + \frac{1}{|\lambda| d^2(\lambda)} \right\}.$$

Так как  $d(\lambda) \leq 2|\lambda|$ , по крайней мере при  $|\lambda|$  больших  $|\lambda_1|$ , то отсюда и следует доказываемое утверждение.  $\square$

## § 5. Доказательство теоремы в случае $c = 0$ в формуле для $N(\lambda)$ -распределения собственных значений оператора $L_0$

При  $c = 0$  от  $N(\lambda)$  — функции распределения собственных значений оператора  $L_0$  — требуется только оценка сверху ее роста. При этом, как показано, обеспечивается наличие на вещественной оси зон, длина которых стремится к бесконечности, свободных от спектра оператора  $L_0$ . Справедливо следующее утверждение.

**ЛЕММА 5.** Пусть  $N(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} 1 = O(\lambda^p)$ , где  $0 < p < 1$ . Тогда существует последовательность вещественных чисел  $r_n \rightarrow \infty$  такая, что  $d_n \rightarrow \infty$ , где  $d_n = \rho(\Gamma_n, \sigma(L_0))$  — расстояние от окружности  $\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = r_n\}$  до спектра оператора  $L_0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\gamma$  — некоторое положительное вещественное число, которое будет выбрано ниже. Тогда ширина кольца  $K_n = \{\lambda : n^\gamma \leq |\lambda| \leq (n+1)^\gamma\}$  есть величина порядка  $n^{\gamma-1}$ . Внутри этого кольца находится  $N((n+1)^\gamma) - N(n^\gamma) = O(n^{\gamma p})$  точек спектра оператора  $L_0$ . Возьмем  $\gamma > \frac{1}{1-p}$ . Тогда внутри кольца  $K_n$ , найдется окружность, удовлетворяющая условию леммы. В самом деле, разделим  $K_n$  на  $n^{\gamma^2+\varepsilon}$  ( $\varepsilon$  — малое положительное число) равных по ширине частей. Тогда хотя бы одно из вновь получившихся колец свободно от точек спектра оператора  $L_0$ . Ширина этого кольца есть величина порядка  $n^{\gamma-1-\gamma^p-\varepsilon}$ , т. е. стремится к бесконечности при  $n \rightarrow \infty$ . Лемма доказана.  $\square$

Пусть  $\Gamma_n$  — окружность из леммы 5. Тогда из леммы 2 следует, что на этой окружности  $(L_0 R_\lambda^0 g, f)$  есть величина порядка  $o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ , причем эта оценка выполняется равномерно по  $\lambda$ . Из соотношения (11) и леммы 4 заключаем, что на окружности  $\Gamma_n$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} \text{Sp}(R_\lambda - R_\lambda^0) &= - \left[ \frac{(L_0^{1-q} g, L_0^q f)}{\lambda^2} + F(\lambda) \right] \frac{1}{1 + o(1)} = \\ &= - \frac{(L_0^{1-q} g, L_0^q f)}{\lambda^2} + \frac{o(1)}{\lambda^2} + F(\lambda) + (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (14)$$

где для  $F(\lambda)$  справедлива оценка (13) леммы 4.

Следующее утверждение является по существу одним из вариантов известной теоремы об устойчивости корневой кратности.



ЛЕММА 6. При достаточно больших  $n$  внутри контура  $\Gamma_n$  находится одинаковое число (с учетом кратности) собственных значений операторов  $L$  и  $L_0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим равенство (14) на  $1/2\pi i$  и проинтегрируем по контуру  $\Gamma_n$ . Заметим, что в силу известной теоремы Рисса  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \text{Sp}(R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda = N_1 - N_2$ , где  $N_1$  и  $N_2$  — число собственных значений (с учетом кратности) операторов  $L$  и  $L_0$  соответственно, попадающих внутрь контура  $\Gamma_n$ . Далее имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \left[ \frac{(L_0^{1-q}g, L_0^q f) + o(1)}{\lambda^2} \right] d\lambda = o\left(\frac{1}{r_n}\right),$$

в то время как  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} F(\lambda)(1+o(1)) d\lambda$  в силу оценки (13) есть величина порядка  $O(\frac{1}{d_n^2})$ . Таким образом, получили

$$N_1 - N_2 = o\left(\frac{1}{r_n}\right) + O\left(\frac{1}{d_n^2}\right).$$

Устремив  $n$  к бесконечности, воспользовавшись леммой 5 и тем фактом, что  $N_1$  и  $N_2$  — целые числа, приходим к доказательству леммы.  $\square$

Перейдем, наконец, к доказательству основной теоремы в рассматриваемом случае.

Умножим равенство (14) на  $\lambda/2\pi i$  и проинтегрируем по контуру  $\Gamma_n$ . По предыдущей лемме внутри контура  $\Gamma_n$  находится одинаковое число  $k_n$  собственных значений операторов  $L$  и  $L_0$ . Тогда, используя свойства проектора Рисса, имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \lambda \text{Sp}(R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda = \sum_{k=1}^{k_n} (\mu_k - \lambda_k).$$

Из теоремы Коши о вычетах заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{(L_0^{1-q}g, L_0^q f)}{\lambda} d\lambda = (L_0^{1-q}g, L_0^q f).$$

Далее,  $\int_{\Gamma_n} \frac{o(1)}{\lambda} d\lambda = o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Наконец, в силу леммы 4 заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \lambda F(\lambda)(1 + o(1)) d\lambda = O \left[ \int_{\Gamma_n} \frac{d\lambda}{d^2(\lambda)} \right].$$

Пусть  $\lambda = re^{i\varphi}$ . Тогда  $d(\lambda) \geq r |\sin \varphi|$ . С другой стороны на контуре  $\Gamma_n d(\lambda) \geq d_n$ . Оценим интеграл по части окружности  $\Gamma_n$ , лежащей в первой четверти  $\lambda$ -плоскости (остальные рассматриваются аналогично). Разобьем участок интегрирования на два участка  $0 \leq \varphi \leq \varphi_n$ ,  $\varphi_n \leq \varphi \leq \pi/2$ , где угол  $\varphi_n$  будет выбран в дальнейшем. Воспользовавшись на первом участке интегрирования оценкой  $d(\lambda) \geq d_n$ , а на втором — оценкой  $d(\lambda) \geq r \sin \varphi$ , имеем

$$\int_{\Gamma_n} \frac{d}{d^2(\lambda)} = O \left( \int_0^{\varphi_n} \frac{r_n}{d_n^2} d\varphi \right) + O \int_{\varphi_n}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{r_n \sin^2 \varphi} = O \left( \frac{r_n \varphi_n}{d_n^2} \right) + O \left( \frac{1}{r_n \varphi_n} \right).$$

выберем  $\varphi_n = \frac{d_n}{r_n}$ . Окончательно получаем, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} (\mu_k - \lambda_k) = (L_0^{1-q} g, L_0^q f) + o \left( \frac{1}{d_n} \right).$$

Устремляя  $n$  к бесконечности, приходим к утверждению теоремы.

## § 6. Доказательство теоремы в случае $c \neq 0$

Заметим, что доказываемая теорема будет применяться, в частности, к получению формул следов операторов, являющихся конечномерными возмущениями самосопряженных эллиптических операторов. Оценка  $N(\lambda) = O(\lambda^p)$  ( $0 < p < 1$ ) означает в данном случае, что порядок дифференциального оператора превосходит размерность области, в которой он действует. Как уже было сказано, это условие обеспечивает наличие на вещественной оси зон, длина которых стремится к бесконечности, свободных от спектра невозмущенной задачи.

В данном параграфе будет исследована ситуация, позволяющая получать формулы следов в случае, когда порядок дифференциального оператора совпадает с размерностью области, в которой он задан (в частности, теорема применима для оператора Лапласа, действующего в ограниченной двумерной области). При этом мы требуем

выделения главного члена асимптотики функции распределения собственных значений у невозмущенного оператора с оценкой остатка. В настоящий момент этот факт доказан для широкого класса дифференциальных операторов.

Формула для  $N(\lambda)$  может быть при  $c \neq 0$  переписана в виде

$$\lambda_n = n(c_0 + o(1)), \quad (15)$$

где  $c_0 = c^{-1}$ ,  $o(1) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Справедлива следующая

**ЛЕММА 7.** Пусть  $\alpha > 0$  и пусть  $N_\alpha$  столь велико, что  $N_\alpha > 8/\alpha$  и для  $o(1)$  в (15) справедлива оценка

$$|o(1)| \leq \alpha c_0 / 8(1 + \alpha) \quad \text{для любого } n > N_\alpha. \quad (16)$$

Тогда между  $\lambda_n$  и  $\lambda_{n'}$  с  $n$  и  $n' = [(1 + \alpha)n] > N_\alpha$  найдутся собственные значения  $\lambda_{n_\nu}$  и  $\lambda_{n_\nu+1}$  оператора  $L_0$  такие, что

$$\lambda_{n_\nu+1} - \lambda_{n_\nu} \geq c_0/2. \quad (17)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Допустив противное, получим

$$\lambda_{n'} - \lambda_n = \sum_{i=n}^{n'-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \leq (n' - n)c_0/2 \leq ((1 + \alpha)n - n)c_0/2 = \alpha n c_0/2. \quad (18)$$

С другой стороны, согласно (15) и (16)

$$\begin{aligned} \lambda_{n'} - \lambda_n &= [(1 + \alpha)n](c_0 + o(1)) - n(c_0 + o(1)) - ((1 + \alpha)n - 1)(c_0 + o(1)) - \\ &\quad - n(c_0 + o(1)) - n \left[ \alpha c_0 + (1 + \alpha)o(1) + o(1) - \frac{c_0 + o(1)}{n} \right] \geq \\ &\geq n \left[ \alpha c_0 - \frac{\alpha c_0}{8} - \frac{\alpha c_0}{8(1 + \alpha)} - \frac{\alpha c_0}{8} - \frac{\alpha c_0}{8(1 + \alpha)} \right] > n \alpha c_0/2. \end{aligned} \quad (19)$$

Противоречие между (18) и (19) доказывает лемму 7.  $\square$

Лемма 7 в силу сходимости ряда

$$\sum_n |\lambda_n^2 c_n \bar{b}_n| \quad (20)$$

и формулы

$$(L_0 R_\lambda^0 g, f) - \frac{(L_0^{1-q} g, L_0^q f)}{\lambda^2} = \sum_n \lambda_n^2 c_n \bar{b}_n \left\{ \frac{1}{\lambda^2 (\lambda_n - \lambda)} - \frac{1}{\lambda (\lambda_n - \lambda)^2} \right\} \quad (21)$$

(см. лемму 4) позволяет построить последовательность контуров  $\Gamma_{n_\nu}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$  (см. рисунок), на которых правая часть (21) допускает оценку

$$|r(\lambda)| \leq \frac{2c_1}{|\lambda|^3} + \frac{\varepsilon^2}{|\lambda|^2 d(\lambda)} + \frac{4c_1}{|\lambda|^3} + \frac{\varepsilon^2}{|\lambda| d^2(\lambda)} \quad (22)$$

при  $\lambda \in \Gamma_{n_\nu}$  вне отрезка

$$[r_{n_\nu} - i\varepsilon, r_{n_\nu} + i\varepsilon], \quad (23)$$

$$|r(\lambda)| \leq \frac{4c_1}{|\lambda|^2 c_0} + \frac{16c_1}{|\lambda| c_0^2} \quad (24)$$

на отрезке (23). В формул (24)

$$c_1 = \sum_n |\lambda_n^2 c_n \bar{b}_n|, \quad (25)$$

а  $c_0 > 0$  — постоянная из формулы (15).

Поясним, как возникают последние два слагаемых правой части (22): имеем для второй суммы справа в (21)

$$\left| -\frac{1}{\lambda} \sum_n \frac{\lambda_n^2 c_n \bar{b}_n}{(\lambda_n - \lambda)^2} \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \frac{|\lambda_n c_n \bar{b}_n|}{(\lambda_n - \lambda)^2} + \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{\infty} \frac{|\lambda_n^2 c_n \bar{b}_n|}{(\lambda_n - \lambda)^2}. \quad (26)$$

Выберем  $N(s)$  столь большим, чтобы

$$\sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{\infty} |\lambda_n^2 c_n \bar{b}_n| < \varepsilon^2. \quad (27)$$

После этого возьмем  $\nu_0(\varepsilon)$  столь большим, чтобы при  $\nu > \nu_0(\varepsilon)$  и  $\lambda \in \Gamma_{n_\nu}$  было

$$|\lambda - \lambda_{N(\varepsilon)}| \geq |\lambda|/2. \quad (28)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \frac{|\lambda_n^2 c_n \bar{b}_n|}{|\lambda_n - \lambda|^2} < \frac{4c_1}{|\lambda|^2}. \quad (29)$$

Подставив (27) и (29) в (26), получим последние два слагаемых в (22). Аналогично возникают справа в (22) первые два слагаемых.

Следующее утверждение устанавливает локализацию спектра оператора  $L$ .

ЛЕММА 8. Пусть  $f \in D(L_0^q)$ ,  $g \in D(L_0^{2-q})$ . Тогда спектр оператора  $L$  (за исключением конечного числа собственных значений) лежит в области  $\Pi = \{\lambda : |\operatorname{Im}\lambda| \leq \frac{\varepsilon}{|\operatorname{Re}\lambda|}\}$ , где  $\varepsilon > 0$  — произвольное, но фиксированное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно равенству (10) имеем

$$(L_0 R_\lambda^0 g, f) = -\frac{(L_0^{1-q} g, L_0^q f)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_n \frac{\lambda_n^2 c_n \bar{b}_n}{\lambda_n - \lambda}. \quad (30)$$

Покажем, что второй ряд в формуле (30) сходится равномерно по  $\lambda$  вне области  $\Pi$ . В самом деле имеем оценку

$$\left| \sum_n \frac{\lambda_n^2 c_n \bar{b}_n}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} \right| \leq \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|} \cdot \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \sum_n \lambda_n^2 c_n \bar{b}_n \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_n |\lambda_n^2 c_n \bar{b}_n|. \quad (31)$$

Равномерная сходимость ряда следует из сходимости численного ряда правой части неравенства (31) (см. лемму 3).

Далее, в силу равномерной сходимости имеем

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \lambda \notin \Pi}} \sum_n \frac{\lambda_n^2 c_n \bar{b}_n}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} = \sum_n \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^2 c_n \bar{b}_n}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} = 0.$$

откуда заключаем, что вне области  $\Pi$   $(L_0 R_\lambda^0 g, f) = o(f)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Как уже отмечалось, собственные значения оператора  $L$  совпадают с особенностями правой части равенства (7), которые в свою очередь либо совпадают с особенностями  $R_\lambda^0$  (в силу самосопряженности оператора  $L_0$  эти особые точки лежат на вещественной оси), либо с нулями функции  $1 + (L_0 R_\lambda^0 g, f)$ . В силу установленного соотношения последняя функция может иметь вне области  $\Pi$  только конечное число нулей. Лемма доказана.  $\square$

Из формул (22), (24) с учетом леммы 8 следуют формулы

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n_\nu}} \operatorname{Sp}(R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda \right| < \varepsilon c_3,$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n_\nu}} \lambda \operatorname{Sp}(R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda - (L_0^{1-q} g, L_0^q f) \right| < \varepsilon c_3$$

при наперед заданном  $\varepsilon$  и фиксированной постоянной  $c_3$  для всех  $\nu > \nu_0(\varepsilon)$ . Оценим, например, вклады, вносимые последним и предпоследним слагаемым в правой части (22). Пусть  $\Gamma_\nu^*$  — кусок дуги

$\Gamma_\nu$ , соединяющий верхний конец отрезка (23) с точкой  $i|\lambda|$ ,  $\lambda \in \Gamma_{n_\nu}$ .  
Имеем, умножая  $r(\lambda)$  в (22) на  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\lambda \in \Gamma_{n_\nu}^*} \frac{\varepsilon^2 |\lambda| |d\lambda|}{|\lambda| d^2(\lambda)} = \\ & = \varepsilon^2 \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \frac{|\lambda|^2 d\varphi}{|\lambda| |\lambda|^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \operatorname{ctg} \varphi_0 = \frac{\varepsilon^2 \cos \varphi_0}{|\lambda| \sin \varphi_0} = \frac{\varepsilon^2 \cos \varphi_0}{\varepsilon} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

и далее

$$4c_1 \int_{\Gamma_{n_\nu}} \frac{|\lambda| |d\lambda|}{|\lambda|^3} \leq 4c_1 \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{|\lambda|} \leq 4c_1 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) \frac{1}{|\lambda|} < \varepsilon;$$

можно очевидно считать  $\nu_0(\varepsilon)$  столь большим, что при  $\nu > \nu_0(\varepsilon)$  и  $\lambda \in \Gamma_{n_\nu}$  будет  $|\lambda| > 4c_1 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) \varepsilon^{-1}$ .

## § 7. Завершение доказательства теоремы

Из предыдущих параграфов мы видели, что основным моментом в доказательстве теоремы при одномерном возмущении являлось выделение в некотором смысле главного по  $\lambda$  члена следа разности резольвент операторов  $L$  и  $L_0$ . Было показано, что  $\operatorname{Sp}(R_\lambda - R_\lambda^0) = \frac{A}{\lambda^2} + F(\lambda)$  где функция  $F(\lambda)$  допускала такие оценки, что интегрирование функции  $\lambda F(\lambda)$  по системе расширяющихся контуров  $\Gamma_n$  давало бесконечно малую при  $n \rightarrow \infty$  величину. Величина  $A$  при этом и давала ответ в формуле регуляризованного следа. Естественно, что подобную процедуру можно осуществлять и в случае конечномерного возмущения. Возникающие при этом трудности носят чисто технический характер.

Простой анализ соотношения

$$\operatorname{Sp}(R_\lambda - R_\lambda^0) = -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{k,j=1}^r \Delta_{kj}(\lambda) (L_0 R^{0^2} g_k, f_j) = -\frac{\Delta'(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \quad (32)$$

показывает, что главный член следа разности резольвент операторов  $L$  и  $L_0$  имеет вид  $-\frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=1}^r (L_0^{1-q_j} g_j, L^{q_j} f_j)$ .

Нетрудно убедиться, что возникающие при этом оценки остатка имеют тот же вид, что и соответствующие оценки при одномерном возмущении. Тем самым следует доказательство теоремы и в этом случае.

## § 8. Примеры

Приведем несколько примеров применения доказанной теоремы,

ПРИМЕР 1. Пусть  $L_0$  — самосопряженный линейный дифференциальный оператор на отрезке  $[a, b]$ , заданный обыкновенным дифференциальным выражением. Рассмотрим оператор  $Lu = L_0u + u(x_0)h(x)$ ,  $x_0 \in (a, b)$ . Легко видеть, что оператор  $L$  можно записать в виде

$$Lu = L_0u + \int_a^b G_0(x_0, \xi) L_0 u(\xi) d\xi \cdot h(x),$$

где  $G_0(x, \xi)$  — функция Грина оператора  $L_0$ .

Пусть  $h(x) \in D(L_0^2)$ , Тогда применение доказанной теоремы дает

$$\sum_n (\mu_n - \lambda_n) = \int_a^b G_0(x_0, \xi) L_0 h(\xi) d\xi = \int_a^b h(\xi) L_0 G_0(x_0, \xi) d\xi = h(x_0).$$

ПРИМЕР 2. Пусть  $L_0$  — самосопряженный эллиптический оператор порядка  $m$ , заданный в ограниченной области  $\Omega \in \mathbf{R}^n$ . Предположим, что  $m \geq n$  и выполнены условия, обеспечивающие выделение главного члена асимптотики функции распределения собственных значений оператора  $L_0$ . Пусть  $K$  — некоторое подмногообразие в  $\Omega$  размерности меньше  $n$ . Пусть  $h(\xi)$  — некоторая гладкая функция на  $K$ . Рассмотрим оператор  $Lu = L_0u + \int_K h(\xi) u(\xi) d\xi \cdot g(x)$ , где  $g(x) \in D(L_0^2)$ . Тогда получим, что

$$\sum_n (\mu_n - \lambda_n) = \int_K h(\xi) g(\xi) d\xi.$$

ПРИМЕР 3. Пусть  $L_0$  — оператор из примера 2. Рассмотрим оператор  $Lu = L_0u + \int_{\Omega} K(x, y) L_0 u(y) dy$ , где ядро  $K(x, y)$  вырожденно,

т. е.  $K(x, y) = \sum_{j=1}^r P_j(x)Q_j(y)$ . Пусть  $P_j(x) \in D(L_0^2)$ . Тогда

$$\sum_n (\mu_n - \lambda_n) = \sum_{j=1}^r \int_{\Omega} L_0 P_j(x) \cdot Q_j(x) dx.$$

В заключение авторы сердечно благодарят И. М. Гельфанда и В. Б. Лидского, замечания которых способствовали улучшению текста работы.

## Литература

1. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // ДАН СССР 1967. Т. 176, № 1. С. 259—262.
2. Садовничий В. А., Любишкин. В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа // ДАН СССР. 1981. Т. 256, № 4. С. 794—798.
3. Крейн М. Г. О формуле следов в теории возмущений // Мат. сб. 1953. Т. 33, вып. 3. С. 597—626.
4. Адамов В. М., Павлов Б. С. Формула следов для диссипативных операторов // Вести ЛГУ. сер. мат. 1979. вып. 2. С. 5—9.
5. Садовничий В. А., Любишкин. В.А. Регуляризованные следы дискретных операторов // ДАН СССР. 1981. Т. 261, № 2. С. 290—293.
6. Фаддеев Л. Д. О выражении для следа двух сингулярных дифференциальных операторов типа Штурма—Лиувилля // ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 5. С. 878—881.
7. Буслаев Б. С. Формулы следов для оператора Шредингера в трехмерном пространстве // ДАН СССР. 1962. Т. 143, № 5. С. 1067—1070.
8. Като Т Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 стр.
9. Хромов А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов // ДАН СССР. 1973. Т. 260., № 2. С. 309—311.
10. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26, вып. 4—6. С. 15—41.
11. Seeley R. Amer. J. Math. 1971. V. 23, N 2. P. 299—309.
12. Лидский В. Б. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов // Труды ММО. 1962. Т. 11. С. 3—35.