

УДК 517.984.5

О классической формуле первого регуляризованного следа оператора Лапласа с нечетным потенциалом на сфере¹

В. А. Садовничий, В. В. Дубровский

Введение

В работе [1] для оператора $-\Delta + P$ ($-\Delta$ — оператор Лапласа—Бельтрами на единичной сфере S^2 , P — оператор умножения на бесконечно гладкую нечетную вещественную функцию $p(\theta, \varphi)$) был получен следующий результат

$$\mu_{n,i} = n(n+1) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad i = \overline{0, 2n},$$

где $\mu_{n,i}$ — собственные числа оператора $-\Delta + P$ ”вблизи” собственного числа $\lambda_n = n(n+1)$ оператора $-\Delta$, $i = \overline{0, 2n}$.

Из этого результата следует, что

$$\sum_{i=0}^{2n} \mu_{n,i} = (2n+1)n(n+1) + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (1)$$

В данной работе мы дополним формулу (1), а именно покажем, что

$$\sum_{i=0}^{2n} \mu_{n,i} = (2n+1)n(n+1) + O\left(\frac{\ln(n)}{n^{3/2}}\right), \quad (2)$$

причем p — бесконечно гладкий, вообще говоря, комплексный нечетный потенциал.

¹Труды семинара им. И.Г. Петровского, вып. 19, 1996. с. 37–72.

Заметим, что из формулы (1) вытекает только следующее равенство:

$$\sum_{k=0}^N \left(\sum_{i=0}^{2k} \mu_{k,i} - k(k+1)(2k+1) \right) = O(\ln N),$$

Это обстоятельство не позволяет вычислить регуляризованный первый след оператора $-\Delta + P$. Но из нашей формулы (2) вытекает, что

$$\mu_{0,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{2n} \mu_{n,i} - (2n+1)n(n+1) \right\} \quad (3)$$

абсолютно сходится по n и поэтому первый регуляризованный след уже нетрудно вычислить при вещественном $p(\theta, \varphi)$, если воспользоваться θ -функцией.

А первом параграфе будет доказана известная (см. [2]) оценка резольвенты оператора $-\Delta$ по норме Гильберта—Шмидта на вертикальных прямых. Во втором параграфе будут доказаны некоторые грубые оценки сверху числовых рядов. В третьем, основном параграфе будет детально проанализирована вторая поправка $\alpha_N(P)$ теории возмущений к сумме $\sum_{i=0}^{2N} \mu_{N,i}$. В четвертом параграфе будет доказана абсолютная сходимость ряда (3) и вычислена его сумма при вещественном $p(\theta, \varphi)$ (см. теорему 4.2).

§ 1. Оценка сверху для абсолютной формы резольвенты оператора Лапласа—Бельтрами на вертикальных прямых

Пусть $T = -\Delta$ — стандартный оператор Лапласа—Бельтрами на единичной двумерной сфере S^2 , действующий в гильбертовом пространстве $H = L_2(S^2)$, взятом с плотностью $\sin \theta d\theta d\varphi$ (θ, φ — сферические координаты), $\delta(T) = \{\lambda_n = n(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$ — спектр оператора T , не учитывающий кратности $\nu_n = 2n+1$ собственного числа $\lambda_n = n(n+1)$ оператора T , $V_{n,i}$ $i = \overline{0, 2n}$ — собственные ортонормированные функции оператора T и H . Пусть далее

$$d_n = \lambda_{n+1} = \lambda_n = 2n+2,$$

$l_n = \{\lambda | \lambda = \lambda_N + N + 1 + i\rho, -\infty < \rho < \infty\}$ — вертикальные прямые, P — оператор умножения на, вообще говоря, комплексную нечетную

функцию $P(\theta, \varphi)$, где φ, θ — сферические координаты на сфере S^2 , $\mu_{N,i}$, $i = \overline{0, 2N}$, — собственные числа оператора $T + P$, взятые с учетом алгебраической кратности, такие, что

$$|\mu_{N,i} - N(N+1)| \leq \text{const},$$

δ_2, δ_1 — соответственно идеалы операторов Гильберта — Шмидта и ядерных операторов в H ; $\|A\|_2$, $\|A\|$, $\|A\|_1$ — нормы оператора A : Гильберта—Шмидта, равномерная, ядерная соответственно.

Верна следующая лемма, доказываемая здесь более подробно, чем в [2].

ЛЕММА 1.1. *На прямых l_N справедливы равенства для абсолютной нормы резольвенты оператора T при $\lambda \in l_N$ и $\text{Im}(\lambda) = \rho$:*

$$\|(T - \lambda E)_2^{-1}\|_2^2 \leq \frac{O(1)}{|\rho| + N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, имеем при $\lambda \in l_N$

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda E)^{-1}\|_2^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k}{|\lambda_k - \lambda_N - N - 1|^2 + \rho^2} \equiv \\ &\equiv \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2k-1}{(\lambda_k - \lambda_N - N - 1)^2 + \rho^2} + \frac{2N+1}{(N+1)^2 + \rho^2} + \\ &+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2k+1}{((N+1)^2 - k(k+1))^2 + \rho^2} \equiv J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Оценим каждое из слагаемых J_j , $j = \overline{1, 3}$. Находим

$$J_1 = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2k+1}{[(N+1)^2 - k(k+1)]^2 + \rho^2} = \sum_{k=0}^{N-1} a(k),$$

где мы ввели обозначение

$$a(k) = \frac{2k+1}{[(N+1)^2 - k(k+1)]^2 + \rho^2}.$$

Будем считать, что k меняется неравномерно, но $|k - N| \geq 1$, тогда

$$a'(k) = \left(\frac{2k+1}{[(N+1)^2 - k(k+1)]^2 + \rho^2} \right)'_k =$$

$$= \frac{2\rho^2 + 2[(N+1)^2 - k(k+1)]\{4k^2 + 4k + 2\}}{[\{(N+1)^2 - k(k+1)\}^2 + \rho^2]^2}.$$

Очевидно, что $a'(k) > 0$ при $k \in [0, N-1]$. Поэтому $a(k)$ возрастает на отрезке $[0, N-1]$ и сумму $\sum_{k=0}^{N-1} a(k)$ через неравенство можно заменить интегралом. Итак,

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{k=0}^{N-1} a(k) = O\left(\int_0^{N-1} a(k) dk\right) = \\ &= O\left(\int_0^{N-1} \frac{(2k+1)dk}{[(N+1)^2 - k(k+1)]^2 + \rho^2}\right) = \\ &= O\left(\int_0^{N(N+1)} \frac{dm}{[(n+1)^2 - m]^2 + \rho^2}\right) \leq O\left(\int_0^{-N+1} \frac{dt}{t^2 + [|\rho| + N]^2}\right) = \\ &= \frac{O(1)}{|\rho| + N} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{|\rho| + N}\right)\Big|_{-(N+1)^2}^{-N+1} \leq \frac{O(1)}{|\rho| + N}. \end{aligned}$$

Легко оценить, J_2 , а именно:

$$J_2 = \frac{2N+1}{(N+1)^2 + \rho^2} \leq \frac{O(1)N}{(|\rho| + N)^2} = \frac{O(1)}{|\rho| + N}.$$

Здесь мы воспользовались эквивалентностью норм $|a| + |b|$ и $\sqrt{|a|^2 + |b|^2}$.

Далее,

$$J_3 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2k+1}{((N+1)^2 - k(k+1))^2 + \rho^2}.$$

Тогда из предыдущего

$$\begin{aligned} a'(k) &> 0 && \text{при} && N \leq k \leq k_0(\rho), \\ a'(k) &\leq 0 && \text{при} && k > k_0(\rho). \end{aligned}$$

Поэтому $a(k)$ возрастает при $N \leq k \leq k_0(\rho)$, $a(k)$ убывает при $k > k_0(\rho)$. Следовательно, J_3 можно заменить суммой двух интегралов, используя неравенство

$$J_3 = \sum_{k=N+1}^{k_0(\rho)-1} a(k) + \sum_{k=k_0(\rho)}^{\infty} a(k) \leq O\left(\int_N^{k_0(\rho)} a(k) dk\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + O\left(\int_{k_0(\rho)}^{\infty} a(k) dk\right) \leq O\left(\int_N^{k_0(\rho)} \frac{(2k+1)dk}{[k(k+1) - (N+1)^2]^2 + \rho^2}\right) + \\
& + O\left(\int_{k_0(\rho)}^{\infty} \frac{(2k+1)dk}{[k(k+1) - (N+1)^2]^2 + \rho^2}\right) = \\
& = O\left(\int_{N(N+1)}^{k_0(k_0+1)} \frac{dm}{[m - (N+1)^2]^2 + \rho^2}\right) + \\
& + O\left(\int_{k_0(k_0+1)}^{\infty} \frac{(2k+1)dk}{[m - (N+1)^2]^2 + \rho^2}\right) \leq \\
& \leq O(1) \int_{N+1}^{\infty} \frac{dl}{l^2 + [|\rho| + N]^2} = \frac{O(1)}{|\rho| + N} \operatorname{arctg} \frac{1}{|\rho| + N} \Big|_{-N+1}^{\infty} \leq \frac{O(1)}{|\rho| + N}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

§ 2. Леммы для числовых рядов

Все леммы этого параграфа доказываются по одной и той же схеме: сначала устанавливается кусочная монотонность членов ряда, затем на основании этого ряд оценивается через конечную сумму интегралов, которые легко вычисляются.

ЛЕММА 2.1. *Равномерно по N имеем*

$$\sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \left| \frac{1}{(k-N)(k+N)} \right| = O\left(\frac{\ln(N)}{N}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исследуем функцию $a(k) = (k^2 - N^2)^{-1}$ на монотонность.

$$\frac{d}{dk} a(k) = -\frac{2k}{(k^2 - N^2)^2} < 0.$$

Следовательно, $a(k)$ возрастает при $k < N$ и $a(k)$ убывает при $k > N$,

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} \sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{k^2 - N^2} &= O\left(\int_0^{N-1} \frac{dk}{k^2 - N^2}\right) + O\left(\int_{N+1}^{\infty} \frac{dk}{k^2 - N^2}\right) = \\ &= O\left(\frac{1}{2N} \ln \frac{N-k}{N+k} \Big|_0^{N-1}\right) + \\ &+ O\left(\frac{1}{2N} \ln \frac{k-N}{k+N} \Big|_{N+1}^{\infty}\right) = O\left(\frac{\ln(N)}{N}\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана \square

ЛЕММА 2.2. Равномерно по N справедлива асимптотическая оценка

$$\sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{k} \sqrt{N}}{|k - N|(k + N)^2} = O\left(\frac{\ln(N)}{N}\right)$$

и

$$\sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{k} \sqrt{N}}{|k - N|(k + N)^3} = O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала оценим первый ряд:

$$\sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{k} \sqrt{N}}{|k - N|(k + N)^2} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{|k^2 - N^2|} = O\left(\frac{\ln(N)}{N}\right),$$

где в конце выкладки была использована лемма 2.1. Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{k} \sqrt{N}}{|k - N|(k + N)^3} &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{|k - N|(k + N)^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2N} \sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{|k^2 - N^2|} = O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right). \end{aligned}$$

Оиять же в конце выкладки использовали лемму (2.1). Лемма доказана. \square

ЛЕММА 2.3. Равномерно по N верна асимптотическая оценка

$$\sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{|k^2 - N^2|} = O\left(\frac{\ln(N)}{\sqrt{N}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяем ряд интегралом:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sqrt{k}}{|k^2 - N^2|} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{|k^2 - N^2|} = O\left(\int_1^{N-1} \frac{\sqrt{k} dk}{k^2 - N^2}\right) + \\
 & + O\left(\int_{N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{k} dk}{k^2 - N^2}\right) = O\left(\int_1^{\sqrt{N-1}} \frac{p^2 dp}{p^4 - N^2}\right) + O\left(\int_{\sqrt{N+1}}^{\infty} \frac{p^2 dp}{p^4 - N^2}\right) = \\
 & = O\left(\int_1^{\sqrt{N-1}} \frac{dp}{p^2 - N} + \int_1^{\sqrt{N-1}} \frac{dp}{p^2 + N}\right) + O\left(\int_{\sqrt{N-1}}^{\infty} \frac{dp}{p^2 - N} + \right. \\
 & \left. + \int_{\sqrt{N-1}}^{\infty} \frac{dp}{p^2 + N}\right) = O\left(\frac{\ln(N)}{\sqrt{N}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = O\left(\frac{\ln(N)}{\sqrt{N}}\right).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

ЛЕММА 2.4. *Равномерно по N справедливо соотношение*

$$\sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{N}|k^2 - N^2|} = O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем ряд:

$$\sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{N}|k^2 - N^2|} \leq \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}|k - N|} = O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).$$

Лемма доказана. □

ЛЕММА 2.5. *Равномерно по N справедливо соотношение*

$$\sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{N^{3/2}|k^2 - N^2|} = O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{N^{3/2}|k^2 - N^2|} \leq \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}|k - N|} = O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).$$

Лемма доказана. □

ЛЕММА 2.6. Равномерно по N справедливо соотношение

$$\sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{N}}{k^{3/2}|k^2 - N^2|} = O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{N}}{k^{3/2}|k^2 - N^2|} &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}|k - N|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} O\left(\int_{|k-N| \geq 1} \frac{dk}{k^{3/2}|k - N|}\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} O\left(\int_{|p^2-N| \geq 1} \frac{dp}{p^2|p^2 - N|}\right) = \\ &= \frac{1}{N\sqrt{N}} O\left(\int_{|p^2-N| \geq 1} dp \left(\frac{1}{|p^2 - N|} - \frac{1}{p^2}\right)\right) - O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

У нас предыдущие леммы не точны их легко усилить.

ЛЕММА 2.7. Равномерно по N справедливо соотношение

$$\sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}N\sqrt{N}|k^2 - N^2|} = O\left(\frac{\ln(N)}{N^3}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}|k^2 - N^2|} &= \frac{1}{N^{3/2}} O\left(\int_{|k-N| \geq 1} \frac{dk}{\sqrt{k}|k^2 - N^2|}\right) = \\ &= \frac{1}{N^{3/2}} O\left(\int_{|p^2-N| \geq 1} \frac{dp}{(p^2 - N)(p^2 + N)}\right) = \\ &= \frac{1}{N^{5/2}} O\left(\int_{|p^2-N| \geq 1} dp \left(\frac{1}{(p^2 - N)} - \frac{1}{(p^2 + N)}\right)\right) = O\left(\frac{\ln(N)}{N^3}\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

ЛЕММА 2.8. Равномерно по N справедливо соотношение

$$\sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{Nk}k|k^2 - N^2|} = O\left(\frac{1}{N^{5/2}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} k |k^2 - N^2|} &= \frac{1}{\sqrt{N}} O \left(\int_{|k-N| \geq 1} \frac{dk}{\sqrt{k} k |k^2 - N^2|} \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} O \left(\int_{|p^2-N| \geq 1} \frac{dp}{p^2(p^4 - N^2)} \right) = \frac{1}{N\sqrt{N}} O \left(\int_{|p^2-N| \geq 1} \frac{dp}{p^2(p^2 - N)} \right) = \\
 &= \frac{1}{N^{5/2}} O \left(\int_{|p^2-N| \geq 1} \left(\frac{1}{(p^2 - N)} - \frac{1}{p^2} \right) dp \right) = O \left(\frac{1}{N^{5/2}} \right).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

ЛЕММА 2.9. Равномерно по N справедливо соотношение

$$\sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2} N^{3/2} |k^2 - N^2|} = O \left(\frac{1}{N^3} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2} |k^2 - N^2|} &= \frac{1}{N^{3/2}} O \left(\int_{|k-N| \geq 1} \frac{dk}{k^{3/2} (k^2 - N^2)} \right) = \\
 &= \frac{1}{N^2} O \left(\int_{|k-N| \geq 1} \frac{dk}{k^{3/2} |k - N|} \right) = \frac{1}{N^2} O \left(\int_{|p^2-N| \geq 1} \frac{dp}{p^2(p^2 - N)} \right) = \\
 &= \frac{1}{N^3} O \left(\int_{|p^2-N| \geq 1} \left(\frac{1}{p^2 - N} - \frac{1}{p^2} \right) dp \right) = O \left(\frac{1}{N^3} \right).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

§ 3. Анализ второй поправки теории возмущений

Заметим сразу, что первая поправка в силу нечетности функции $p(\theta, \theta)$ равна 0. Обозначим через $\alpha_N(p)$ вторую поправку теории возмущений к сумме $\sum_{i=0}^{2N} \mu_{N,i}$:

$$\alpha_N(p) = -\frac{1}{2\pi i} \text{Sp} \left\{ \left[\int_{l_N} - \int_{l_{N-1}} \right] \lambda [(T - \lambda E)^{-1} p]^2 (T - \lambda E)^{-1} d\lambda \right\} =$$

$$= - \sum \frac{\alpha_{k,N}}{\lambda_k - \lambda_N};$$

здесь $\lambda_k = k(k+1)$, $\lambda_N = N(N+1)$ и (см. [2]) по теореме сложения для сферических гармоник [3, с. 235]

$$\begin{aligned} \alpha_{k,N} &= \sum_{i=0}^{2k} \sum_{j=0}^{2N} (Pv_{k,i}, v_{N,j})(Pv_{N,j}, v_{k,j}) = \\ &= \frac{(2k+1)(2N+1)}{16\pi^2} \iint_{S^2} \iint_{S^2} p(\theta, \varphi) p(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) \times \\ &\times P_k(\cos(\alpha)) P_N(\cos(\alpha)) \sin(\theta) \sin(\tilde{\theta}) d\varphi d\theta d\tilde{\varphi} d\tilde{\theta}, \end{aligned}$$

где $\cos(\alpha) = \cos(\theta) \cos(\tilde{\theta}) + \sin(\theta) \sin(\tilde{\theta}) \cos(\varphi - \tilde{\varphi})$, P_k и P_N — полиномы Лежандра, нормированные условием $P_k(1) = P_N(1) = 1$.

Числа $\alpha_{k,N}$ можно записать по другому

$$\alpha_{k,N} = \frac{(2N+1)(2k+1)}{16\pi^2} \int_0^\pi f(\alpha) P_k(\cos(\alpha)) P_N(\cos(\alpha)) \sin(\alpha) d\alpha.$$

Функцию $f(\alpha)$ назовем Λ -преобразованием. Она определяется следующим образом:

$$f(\alpha) = \iint_{S^2} p(\varphi, \alpha) \sin(\theta) d\theta d\varphi \left[\int_{T(\alpha)} p(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}) \sin(\tilde{\theta}) \psi(\alpha, \theta, \tilde{\theta}) d\tilde{\theta} \right].$$

Здесь $T(\alpha)$ — пересечение конуса с вершиной в центре сферы и осью с заданной сферическими координатами φ и θ с центральным углом 2α со сферой в сферических координатах $\tilde{\theta}$ и $\tilde{\varphi}$;

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \theta, \tilde{\theta}) &= \pm (\sin^2(\theta) \sin^2(\tilde{\theta}) - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\theta) \cos^2(\tilde{\theta}) + \\ &+ 2 \cos(\alpha) \cos(\theta) \cos(\tilde{\theta}))^{-1/2}, \end{aligned}$$

где знак "+" берется, если $\tilde{\varphi} < \varphi$, и знак "-" — если $\tilde{\varphi} > \varphi$.

Заметим, что $f(\alpha)$ — нечетная гладкая функция, т. е. $f(\alpha) = -f(\pi - \alpha)$, $0 \leq \alpha \leq \pi$. Докажем, что $f(0) = 0$ и $f(\pi) = 0$. Введем

$$\chi(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\sin^2(\alpha)}, & 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{\sin^2(\alpha)}, & \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi. \end{cases}$$

Если $f(0) = -f(\pi) \neq 0$, то $\int_0^\pi f(\alpha)\chi(\alpha)\sin(\alpha) d\alpha = \infty$, но

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\pi f(\alpha)\chi(\alpha)\sin(\alpha) d\alpha \right| \leq \\ & \leq \left| \iiint_{S^2} \iiint_{S^2} \pm \frac{p(\varphi, \theta)p(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})\sin(\theta)\sin(\tilde{\theta}) d\theta d\tilde{\theta} d\varphi d\tilde{\varphi}}{\sin(\alpha)} \right| \leq \\ & \leq \text{const} \iiint_{S^2} \iiint_{S^2} \frac{d\theta d\tilde{\theta} d\varphi d\tilde{\varphi}}{\alpha}. \end{aligned}$$

Но $\text{mes}\{(\theta, \varphi, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) | \varepsilon \geq \alpha \geq 0\} \leq \text{const } \varepsilon^2$. Поэтому

$$\left| \int_0^\pi f(\alpha)\chi(\alpha)\sin(\alpha) d\alpha \right| < \infty$$

и, значит, $f(0) = f(\pi) = 0$.

Докажем, что Λ -преобразование $f(\alpha)$ почти всюду дважды дифференцируемо и $f''(\alpha) \in L_1[0, \pi]$. Пусть $\chi(\alpha)$ — дифференцируемая функция. Напишем равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi f(\alpha)\chi'(\alpha)\sin(\alpha) d\alpha = \\ & = \iiint_{S^2} \iiint_{S^2} p(\varphi, \theta)p(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})\chi'(\alpha)\sin(\theta)\sin(\tilde{\theta}) d\varphi d\theta d\tilde{\varphi} d\tilde{\theta} = \\ & = - \iiint_{S^2} \iiint_{S^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} \left\{ p(\varphi, \theta)p(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}) \right\} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha} \chi(\alpha)\sin(\theta)\sin(\tilde{\theta}) d\varphi d\theta d\tilde{\varphi} d\tilde{\theta} = \\ & = - \iiint_{S^2} \iiint_{S^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} \left\{ p(\varphi, \theta)p(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}) \right\} \times \\ & \times \frac{(\pm)\sin(\alpha)\sin(\theta)\sin(\tilde{\theta}) d\theta d\tilde{\theta} d\varphi d\tilde{\varphi}}{\sqrt{[-\cos(\alpha) + \cos(\theta - \tilde{\theta})][\cos(\alpha) - \cos(\theta + \tilde{\theta})]}}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $f'(\alpha)$ всюду существует на отрезке $[0, \pi]$. Далее,

$$\int_0^\pi f(\alpha)\chi''(\alpha)\sin(\alpha) d\alpha = \iiint_{S^2} \iiint_{S^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} \left\{ p(\varphi, \theta)p(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}) \right\} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{\pm \sin(\alpha) \sin(\theta) \sin(\tilde{\theta}) d\theta d\tilde{\theta} d\varphi d\tilde{\varphi} \chi'(\alpha)}{\sqrt{[-\cos(\alpha) + \cos(\theta - \tilde{\theta})][\cos(\alpha) - \cos(\theta + \tilde{\theta})]}} = \\
 & = \iint_{S^2} \iint_{S^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\varphi}^2} \left\{ p(\varphi, \theta) p(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}) \right\} \times \\
 & \times \frac{\sin^2(\alpha) \sin(\theta) \sin(\tilde{\theta}) d\theta d\tilde{\theta} d\varphi d\tilde{\varphi} \chi(\alpha)}{\sqrt{[-\cos(\alpha) + \cos(\theta - \tilde{\theta})][\cos(\alpha) - \cos(\theta + \tilde{\theta})]}} + \\
 & + \iint_{S^2} \iint_{S^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} \left\{ p(\varphi, \theta) p(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}) \right\} \times \\
 & \times \frac{\pm \cos(\alpha) \sin(\theta) \sin(\tilde{\theta}) d\theta d\tilde{\theta} d\varphi d\tilde{\varphi} \chi(\alpha)}{\sqrt{[-\cos(\alpha) + \cos(\theta - \tilde{\theta})][\cos(\alpha) - \cos(\theta + \tilde{\theta})]}} + \\
 & + \iint_{S^2} \iint_{S^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} \left\{ p(\varphi, \theta) p(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}) \right\} \times \\
 & \times \frac{(\pm \sin(\alpha)) \frac{\partial}{\partial \eta(\alpha)} d\theta d\tilde{\theta} d\varphi d\tilde{\varphi} \chi}{\sqrt{[-\cos(\alpha) + \cos(\theta - \tilde{\theta})][\cos(\alpha) - \cos(\theta + \tilde{\theta})]}}.
 \end{aligned}$$

Последнее выражение по теореме Фубини сходится при всех $\theta, \tilde{\theta}, \varphi$ и почти при всех α . Значит, $f''(\alpha)$ почти всюду существует и $f''(\alpha) \in L_1[0, \pi]$. Чтобы убедиться в этом, достаточно сделать замену $\alpha = r \operatorname{ch}(\psi)$, $\theta + \tilde{\theta} = r \operatorname{sh}(\psi)$, $\theta - \tilde{\theta} = r\tilde{\psi}$ и учесть соотношение

$$\begin{aligned}
 -\cos(\alpha) + \cos(\theta - \tilde{\theta}) &= \{\alpha^2 - (\theta - \tilde{\theta})^2\} \psi_1(\alpha, \theta, \tilde{\theta}), \\
 \cos(\alpha) - \cos(\theta + \tilde{\theta}) &= \{\alpha^2 - (\theta + \tilde{\theta})^2\} \psi_2(\alpha, \theta, \tilde{\theta}),
 \end{aligned}$$

где $\psi(\alpha, \theta, \tilde{\theta}) \neq 0$ ($i = 1, 2$) для любой точки $(\alpha, \theta, \tilde{\theta})$. Тогда подынтегральное выражение в последнем интеграле преобразуется к виду

$$\frac{r^2 r^2 f(\psi, \tilde{\psi})}{r^3 r g(\psi \tilde{\psi})},$$

где $g(\psi, \tilde{\psi}) = (\operatorname{ch}^2(\psi) - \tilde{\psi}^2)^{3/2} = [(\operatorname{ch}(\psi) - \tilde{\psi})(\operatorname{ch}(\psi) + \tilde{\psi})]^{3/2}$. Особенности $\operatorname{ch}(\psi) - \tilde{\psi} = 0$ и $\operatorname{ch}(\psi) + \tilde{\psi} = 0$ не пересекаются, с помощью разбиения единицы изолируем их друг от друга.

Исследуем особенности $\operatorname{ch}(\psi) - \tilde{\psi} = 0$ вблизи $(\psi_0, \tilde{\psi}_0)$ (т. е. $\operatorname{ch}(\psi_0) = \tilde{\psi}_0$):

$$ch(\psi) - \tilde{\psi} = ch(\psi_0) + sh(\psi_0)(\psi - \psi_0) - (\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_0) - \psi_0 + O((\psi - \psi_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2) = sh(\psi_0)(\psi - \psi_0) - (\psi - \psi_0) + O((\psi - \psi_0)^2) + O((\psi - \tilde{\psi}_0)^2).$$

Если $sh(\psi_0) \neq 0$, то делаем замену $\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_0 = t$, $\psi - \psi_0 = (sh(\psi_0))^{-1}tsh^2(x)$. Если $sh(\psi_0) = 0$, то делаем замену $\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_0 = t$, $\psi - \psi_0 = xt$. Особенности в первом случае имеют вид $\frac{t}{t^{3/2}ch^{3/2}(x)}$, во втором случае — $\frac{t}{t^{3/2}}$, и они "стираются". Значит, $f''(\alpha)$ почти всюду существует и $f''(\alpha) \in L_1[0, \pi]$.

Для полиномов Лежандра имеют место асимптотические разложения Стильтьеса (см. [3, с. 197] с равномерной оценкой остатка

$$P_n(\cos(\alpha)) = \frac{\cos\{(n+1/2)\alpha - \pi/4\}}{\{\sin(\alpha)\}^{1/2}} \left\{ \frac{f_0}{\sqrt{n}} + \frac{f_1}{n\sqrt{n}} + \frac{O(1)}{n^{5/2}} \right\} + \\ + \frac{\sin\{(n+3/2)\alpha - \pi/4\}}{\{\sin(\alpha)\}^{1/2}} \left\{ \frac{g_0}{n\sqrt{n}} + \frac{O(1)}{n^{5/2}} \right\} + \frac{O(1)}{\{\sin(\alpha)\}^{5/2}n^{5/2}},$$

где f_0, f_1, g_0 явно вычисляются с помощью работы [3, с. 157], а именно $f_0 = \sqrt{2/\pi}$, $f_1 = -(1/4)\sqrt{2/\pi}$, $g_0 = (1/8)\sqrt{2/\pi}$.

Из всего сказанного (ε будет выбрано нами позже) имеем

$$\alpha_N(p) = \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{16\pi^2} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_N} \times \\ \times \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin(\alpha) P_k(\cos(\alpha)) P_N(\cos(\alpha)) d\alpha = \\ = \frac{2N+1}{\lambda_N 16\pi^2} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \sin(\alpha) P_N(\cos(\alpha)) d\alpha - \sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{16\pi^2(\lambda_k - \lambda_N)} \times \\ \times \left\{ \left[\int_0^{\varepsilon} + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \right] f(\alpha) \sin(\alpha) P_k(\cos(\alpha)) P_N(\cos(\alpha)) d\alpha + \right. \\ \left. + \left\{ \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos[(k+1/2)\alpha - \pi/4] \cos[(N+1/2)\alpha - \pi/4] d\alpha \right\} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{f_0^2}{(kN)^{1/2}} + \frac{f_1 f_0}{k^{3/2} N^{1/2}} + \frac{O(1)}{k^{3/2} N^{3/2}} + \frac{f_1 f_0}{N^{3/2} k^{1/2}} \right\} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \cos[(k+1/2)\alpha - \pi/4] \sin[(N+3/2)\alpha - \pi/4] d\alpha \times \\
 & \quad \times \left\{ \frac{f_0 g_0}{k^{1/2} N^{3/2}} + \frac{O(1)}{k^{3/2} N^{3/2}} \right\} + \\
 & + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin[(k+3/2)\alpha - \pi/4] \cos[(N+1/2)\alpha - \pi/4] d\alpha \times \\
 & \quad \times \left\{ \frac{f_0 g_0}{N^{1/2} k^{3/2}} + \frac{O(1)}{k^{3/2} N^{3/2}} \right\} + \\
 & + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \sin[(k+3/2)\alpha - \pi/4] \sin[(N+3/2)\alpha - \pi/4] d\alpha \frac{O(1)}{k^{3/2} N^{3/2}} + \\
 & + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \cos[(k+1/2)\alpha - \pi/4] O(1) d\alpha \frac{1}{k^{1/2} N^{3/2}} + \\
 & + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \cos[(N+1/2)\alpha - \pi/4] O(1) d\alpha \frac{1}{k^{5/2} N^{1/2}} + \\
 & + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin^3(\alpha)} \sin[(k+3/2)\alpha - \pi/4] d\alpha \frac{O(1)}{k^{3/2} N^{5/2}} + \\
 & + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin^3(\alpha)} \sin[(N+3/2)\alpha - \pi/4] d\alpha \frac{O(1)}{k^{5/2} N^{3/2}} + \\
 & + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin^4(\alpha)} d\alpha \frac{O(1)}{k^{5/2} N^{5/2}} \Big\} \equiv \sum_{i=0}^{15} \alpha_N^i(p).
 \end{aligned}$$

Каждое из слагаемых $\alpha_N^i(p)$, $i = \overline{0, 15}$, исследуем в отдельности.

При этом будем использовать леммы из § 2.

Имеем

$$\alpha_N^0(p) = \frac{2N+1}{N(N+1)16\pi^2} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \sin(\alpha) P_N(\cos(\alpha)) d(\alpha),$$

но [3, с. 205]

$$\sqrt{\sin(\alpha)} |P_N(\cos(\alpha))| < \sqrt{2/\pi N}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi,$$

поэтому

$$|\alpha_N^0(p)| \leq \frac{O(1)}{N} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \sqrt{\sin(\alpha)} \frac{1}{N^{1/2}} d\alpha = \frac{O(1)}{N^{3/2}}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \alpha_N^1(p) = & - \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} \frac{1}{16\pi^2} \times \\ & \times \left[\int_{\varepsilon}^{\pi} + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \right] f(\alpha) \sin(\alpha) P_k(\cos(\alpha)) P_N(\cos(\alpha)) d\alpha. \end{aligned}$$

Как и раньше [3, с. 205], имеем $\sqrt{\sin(\alpha)} |P_k(\cos(\alpha))| < \sqrt{2/\pi k}$, $\sqrt{\sin(\alpha)} |P_N(\cos(\alpha))| < \sqrt{2/\pi N}$, $0 \leq \alpha \leq \pi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha_N^1(p) = & \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{kN}}{|k-N|(k+N+1)} \left[\int_0^{\varepsilon} + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \right] O(f(\alpha)) d\alpha = \\ = & O(\varepsilon^2) \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{kN}}{|k-N|(k+N+1)} = O(\varepsilon^2 \ln(N)). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали лемму 2.1.

Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned} \alpha_N^2(p) = & \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} \frac{1}{16\pi^2} \times \\ & \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos[(k+1/2)\alpha - \pi/4] \cos[(N+1/2)\alpha - \pi/4] d\alpha f_0^2 k^{-1/2} N^{-1/2} = \\ & = -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} \times \\ & \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) [\sin(k+N+1)\alpha + \cos(k-N)\alpha] d\alpha \frac{f_0^2}{(kN)^{1/2}} = \\ & = \tilde{\alpha}_N^2(p) + \tilde{\tilde{\alpha}}_N^2(p), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_N^2(p) = & -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} \times \\ & \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) [\sin(k+N+1)\alpha] d\alpha f_0^2(kN)^{-1/2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_N^2(p) = & -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} \times \\ & \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos((k-N)\alpha) d\alpha f_0^2(kN)^{-1/2}. \end{aligned}$$

С помощью интегрирования по частям легко получаем, что

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) [\sin(k+N+1)\alpha] d\alpha = \frac{O(\varepsilon)}{k+N} + \frac{O(1)}{(k+N)^2}$$

и

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos((k-N)\alpha) d\alpha = \frac{O(\varepsilon)}{k-N} + \frac{O(1)}{(k-N)^2}$$

По лемме 2.2

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_N^2 = O(1) \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{kN}}{|k-N|(k+N)^2} \varepsilon + O(1) \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{kN}}{|k-N|(k+N)^2} = \\ = O\left(\frac{\ln(N)}{N} \varepsilon\right) + O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right). \end{aligned}$$

В $\tilde{\alpha}_N^2(p)$ обозначим $k = N + l$, тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_N^2(p) = & -\frac{f_0^2}{32\pi^2} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{\infty} f(\alpha) \cos(l\alpha) \frac{(2N+2l+1)(2N+1)}{l(2N+l+1)N^{1/2}(N+1)^{1/2}} = \\ = & -\frac{f_0^2}{32\pi^2} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \frac{1}{l} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha \frac{(2N+2l+1)(2N+1)}{l(2N+l+1)N^{1/2}(N+1)^{1/2}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{f_0^2}{32\pi^2} \sum_{l=N}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha \frac{(2N+2l+1)(2N+1)}{l(2N+l+1)N^{1/2}(N+1)^{1/2}} \equiv \\
&\equiv \varphi(N) + \psi(N).
\end{aligned}$$

Рассмотрим по отдельности $\varphi(N)$ и $\psi(N)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(N) &= -\frac{f_0^2}{32\pi^2} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \frac{1}{l} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha \frac{(2N)(2N)}{2N(N)^{1/2}(N)^{1/2}} \times \\
&\quad \times \frac{(1+(2l+1)(2N)^{-1}(1+(2N)^{-1}))}{(1+(l+1)(2N)^{-1})(1+l(N)^{-1})^{1/2}} = \\
&= -\frac{f_0^2}{16\pi^2} \left\{ \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \frac{1}{l} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2N} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \frac{1}{l} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} O\left(\frac{l}{N^2}\right) \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha \right\} = \\
&= \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} O\left(\frac{l}{N^2}\right) \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha = \\
&= \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} O\left(\frac{\varepsilon}{N^2}\right) + \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} O\left(\frac{l}{lN^2}\right) = O\left(\frac{\varepsilon}{N}\right) + O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right).
\end{aligned}$$

Заметим, что разложение в ряд Тейлора функции $(N+l)^{-1/2} = N^{-1/2}(1+l/N)^{-1/2}$ некорректно вблизи $l \sim N$. Но тогда при $1 > C > 0$ рассмотрим $(1-C)N \leq |l| \leq N$, и в этом случае получим оценку сверху вида $O(\varepsilon N^{-1}) + O(N^{-2})$. Поэтому полученная оценка $\rho(N)$ имеет силу.

Далее находим

$$\begin{aligned}
\psi(N) &= -\frac{f_0^2}{32\pi^2} \sum_{l=N}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha \times \\
&\quad \times \frac{(2N+2l+1)(2N+1)}{(2N+l+1)N^{1/2}(N+l)^{1/2}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\sqrt{N} \frac{f_0^2}{32\pi^2} \sum_{l=N}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha \times \\
 &\quad \times \frac{2l}{l^{3/2}} \frac{1 + (2N+1)(2l)^{-1}}{(1 + (2N+1)l^{-1})(1 + Nl^{-1})^{1/2}} = \\
 &= -\sqrt{N} \frac{f_0^2}{32\pi^2} \sum_{l=N}^{\infty} \frac{1}{l^{3/2}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha \times \\
 &\quad \times \left[1 + \frac{N + 1/2 - 2N - 1 - N/2}{l} + O\left(\frac{N^2}{l^2}\right) \right] = \\
 &= -\sqrt{N} \frac{f_0^2}{16\pi^2} \sum_{l=N}^{\infty} \left[\frac{O(\varepsilon)}{l^{5/2}} + O\left(\frac{1}{l^{7/2}}\right) \right] \left[1 + \frac{-3/2N - 1/2}{l} + O\left(\frac{N^2}{l^2}\right) \right] = \\
 &= \frac{O(\varepsilon)}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).
 \end{aligned}$$

Наше рассуждение надо уточнить при $N \leq l \leq (2 + \delta)N$, $\delta > 0$, но в этом случае окончательные оценки "хуже" не получаются. Подведем итог того, что мы получали для $\alpha_N^2(p)$:

$$\alpha_N^2(p) = O\left(\frac{\ln(N)}{N} \varepsilon\right) + O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right).$$

Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned}
 \alpha_N^3 &= - \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} \frac{1}{16\pi^2} \times \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos[(k+1/2)\alpha - \pi/4] \times \\
 &\quad \times \cos[(N+1/2)\alpha - \pi/4] d\alpha f_1 f_0 k^{-3/2} N^{-1/2} = \\
 &= - \frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} k^{-3/2} N^{-1/2} \times \\
 &\quad \times \left[\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \sin(k+N+1)\alpha d\alpha + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(k-N)\alpha d\alpha \right] = \\
 &= \tilde{\alpha}_N^3(p) + \tilde{\tilde{\alpha}}_N^3(p).
 \end{aligned}$$

Исследуем каждое из $\tilde{\alpha}_N^3(p)$, $\tilde{\tilde{\alpha}}_N^3(p)$ в отдельности:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}_N^3(p) &= -\frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} k^{-3/2} N^{-1/2} \times \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \sin(k+N+1) \alpha d\alpha = \\
 &= \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{N}}{|k^2 - N^2|} \left[\frac{O(\varepsilon)}{k+N} + \frac{O(1)}{(k+N)^2} \right] = \\
 &= \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \left\{ N^{-3/2} \frac{O(\varepsilon)}{k^{1/2}|k-N|} + \frac{O(1)}{N^{5/2} k^{1/2} (k-N)} \right\} = \\
 &= O(\varepsilon) N^{-3/2} + O(1) N^{-5/2}; \\
 \tilde{\tilde{\alpha}}_N^3(p) &= -\frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} k^{-3/2} N^{-1/2} \times \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(k-N) \alpha d\alpha = \\
 &= -\frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \frac{(2k+2l+1)(2N+1)}{l(2N+l+1)(l+N)^{3/2} N^{1/2}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha = \\
 &= -\frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \left\{ \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \frac{(2N+2l+1)(2N+1)}{l(2N+l+1)(l+N)^{3/2} N^{1/2}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=N}^{\infty} \frac{(2N+2l+2)(2N+1)}{l(2N+l+1)(l+N)^{3/2} N^{1/2}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha \right\} = \tilde{s}(N) + \tilde{\tilde{s}}(N).
 \end{aligned}$$

Сначала оценим $\tilde{s}(N)$

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}(N) &= -\frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \frac{(2N)^2}{(2N)N^2} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \frac{(1+(2l+1)(2N)^{-1})(1+(2N)^{-1})}{(1+(l+1)(2N)^{-1})(1+lN^{-1})^{3/2} l} \times \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha = -\frac{f_1 f_0}{16\pi^2} \frac{1}{N} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \frac{1}{l} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times [1 + (2l + 1 - l - 1 - 3l)(2N)^{-1} + O(l^2 N^2)] = \\
 & = -\frac{f_1 f_0}{16\pi^2} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \frac{1}{l} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha \frac{-2l+1}{2N} - \\
 & -\frac{f_1 f_0}{16\pi^2} \frac{1}{N} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha O(lN^{-2}) = \\
 & = -\frac{f_1 f_0}{16\pi^2} \left\{ \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{N} O(\varepsilon) \frac{1}{l} + O\left(\frac{1}{l^2 N}\right) \right\} \right\} + \\
 & + \frac{1}{N} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \{O(\varepsilon N^{-2}) + O(l^{-1} N^{-2})\} = \\
 & = O(\varepsilon N^{-1}) + O(\ln(N) N^{-2}) + O(\varepsilon N^{-2}) + O(\ln(N) N^{-3}).
 \end{aligned}$$

Заметим, что наше рассуждение опять надо уточнить, мы разлагали в ряд Тейлора функцию $(1 + l/N)^{-3/2}$ вблизи -1 , но рассматривая $(1 - \delta) N \leq -l \leq N$, где $1 > \delta > 0$, получим оценку вида $O(\varepsilon N^{-2}) + O(N^{-3})$, т. е. не слабее установленной выше.

И, наконец,

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}(N) &= -\frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \sum_{l=N}^{\infty} \frac{(2N + 2l + 1)(2N + 1)}{l(2N + l + 1)(l + N)^{3/2} N^{1/2}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha = \\
 &= \frac{O(\sqrt{N})}{N^{3/2}} \sum_{l=N}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha = O\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{l=N}^{\infty} \{O(\varepsilon) l^{-2} + O(l^{-3})\} = \\
 &= O(\varepsilon N^{-2}) + O(N^{-3}).
 \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\alpha_N^3(p) = O\left(\frac{\varepsilon}{N}\right) + O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right).$$

Рассмотрим $\alpha_N^4(p)$:

$$\alpha_N^4 = -\frac{f_1 f_0}{16\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos[(k + 1/2)\alpha - \pi/4] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos[(N+1/2)\alpha - \pi/4] d\alpha \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)N^{3/2}k^{1/2}} = \\
& = \frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)N^{3/2}k^{1/2}} \times \\
& \times \left\{ \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \sin((k+N+1)\alpha) d\alpha + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos((k-N)\alpha) d\alpha \right\} = \\
& = \tilde{\alpha}_N^4 + \tilde{\tilde{\alpha}}_N^4.
\end{aligned}$$

Сначала проанализируем $(\tilde{\alpha})_N^4$:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\alpha})_N^4 &= -\frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)N^{3/2}k^{1/2}} \times \\
& \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \sin((k+N+1)\alpha) d\alpha = \\
& = O(1) \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{k^{1/2}}{N^{1/2}(k-N)} \left[\frac{O(\varepsilon)}{k+N} + \frac{O(1)}{(k+N)^2} \right] = \\
& = \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} O(\varepsilon) \frac{1}{N|k^2 - N^2|} + \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{O(1)}{N^2|k^2 - N^2|} = \\
& = O\left(\frac{\ln(N)}{M^2} \varepsilon\right) + O\left(\frac{\ln(N)}{N^3}\right).
\end{aligned}$$

В конце выкладки была использована лемма 2.1

Теперь рассмотрим $\tilde{\tilde{\alpha}}_n^4$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{\alpha}}_N^4 &= -\frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)N^{3/2}k^{1/2}} \times \\
& \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos((k-N)\alpha) d\alpha = \\
& = \frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \left\{ \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \frac{(2N+2l+1)(2N+1)}{l(2N+l+1)N^{3/2}(l+N)^{1/2}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha + \right. \\
& \left. + \sum_{l=N}^{\infty} \frac{(2N+2l+1)(2N+1)}{l(2N+l+1)N^{3/2}(l+N)^{1/2}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha \right\} = \tilde{p}_1 + \tilde{\tilde{p}}_2.
\end{aligned}$$

Сначала оценим сверху \tilde{p}_1 (от грубости рассуждения легко избавиться, см. выше):

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_1 &= \frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \frac{(2N)^2(1+(2l+1)(2N)^{-1}(1+(2N)^{-1}))}{2lN(1+(l+1)(2N)^{-1})N^2(1+lN^{-1})^{1/2}} \times \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \frac{1}{l} \left[1 + \frac{2l+2-l-1-l}{2N} + O\left(\frac{l^2}{N^2}\right) \right] \left[\frac{O(\varepsilon)}{l} + O\left(\frac{1}{l^2}\right) \right] = \\
 &= \frac{O(1)}{N} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \left[\frac{O(1)}{lN} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right] \left[O\left(\frac{\varepsilon}{l}\right) + O\left(\frac{1}{l^2}\right) \right] = \\
 &= \frac{O(1)}{N} \sum_{l=1-N, l \neq 0}^{N-1} \left\{ \frac{O(\varepsilon)}{l^2 N} + \frac{O(\varepsilon)}{N^2} + \frac{O(1)}{l^3 N} + O\left(\frac{1}{lN^2}\right) \right\} = \\
 &= \frac{O(\varepsilon)}{N^2} + \frac{O(\varepsilon)}{N^2} + \frac{O(1)}{N^2} + O\left(\frac{\ln(N)}{N^3}\right) = O(\varepsilon)N^{-2} + O(N^{-2}).
 \end{aligned}$$

Теперь исследуем \tilde{p}_2 с учетом того, что от некой грубости рассуждения легко избавиться:

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_2 &= -\frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \sum_{l=N}^{\infty} \frac{(2N+2l+1)(2N+1)}{l(2N+l+1)N^{3/2}(l+N)^{1/2}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha = \\
 &= -\frac{f_1 f_0}{32\pi^2} \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{l=N}^{\infty} \frac{2l(1+(2N+1)(2l)^{-1})}{l(1+(2N+1)l^{-1})l(1+Nl^{-1})^{1/2}} \left[\frac{O(\varepsilon)}{l} + \frac{O(1)}{l^2} \right] = \\
 &= \frac{O(1)}{N^{1/2}} \sum_{l=N}^{\infty} \left[\frac{1}{l} + \frac{2N+1-N-1/2-N}{2l^2} + O\left(\frac{N^2}{l^3}\right) \right] \left[\frac{O(\varepsilon)}{l} + \frac{O(1)}{l^2} \right] = \\
 &= O(N^{-1/2}) \left[\sum_{l=N}^{\infty} \left(\frac{O(\varepsilon)}{l^2} + O(\varepsilon) \frac{N^2}{l^4} + \frac{O(1)}{l^3} + \frac{O(N^2)}{l^5} \right) \right] = \\
 &= O(N^{-1/2}) \left(\frac{O(\varepsilon)}{N} + \frac{O(1)}{N^2} + \frac{O(N^2)}{N^4} \right) = O\left(\frac{\varepsilon}{N^{3/2}}\right) + O\left(\frac{1}{N^{5/2}}\right).
 \end{aligned}$$

И окончательно имеем

$$\alpha_N^4(p) = O\left(\frac{\varepsilon}{N^{3/2}}\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 \alpha_N^5(p) &= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos[(k+1/2)\alpha - \pi/4] \times \\
 &\times \cos[(N+1/2)\alpha - \pi/4] d\alpha \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} \frac{O(1)}{k^{3/2}N^{3/2}} = \\
 &= -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \left[\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \sin((k+N+1)\alpha) d\alpha + \right. \\
 &+ \left. \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos((k-N)\alpha) d\alpha \right] \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)k^{3/2}N^{3/2}} = \\
 &= O(1) \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \left[\left\{ \frac{O(\varepsilon)}{k+N} \frac{O(1)}{(k+N)^2} \right\} + \left\{ \frac{O(\varepsilon)}{k-N} \frac{O(1)}{(k-N)^2} \right\} \right] \times \\
 &\quad \times \frac{1}{(Nk)^{1/2}} \frac{1}{|k^2 - N^2|} = \\
 &O(1) \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \left\{ \frac{O(\varepsilon)}{k^{1/2}N^{5/2}} \frac{1}{|k-N|} + \frac{O(1)}{k^{1/2}|k-N|N^{7/2}} + \right. \\
 &\left. + \frac{O(\varepsilon)}{(k-N)^3k^{1/2}N^{3/2}} + \frac{O(1)}{(k-N)^3k^{1/2}N^{3/2}} \right\} = \frac{O(\varepsilon)}{N^{3/2}} + \frac{O(1)}{N^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что в этом случае можно оценки сверху делать точнее.

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 \alpha_N^6(p) &= -\frac{f_1 f_0}{16\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)k^{1/2}N^{3/2}} \times \\
 &\times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin[(k+3/2)\alpha - \pi/4] \cos[(N+1/2)\alpha - \pi/4] d\alpha = \\
 &= -\frac{f_0 g_0}{32\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)k^{1/2}N^{3/2}} \times \\
 &\times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) [\cos(k+N+2)\alpha + \sin(k-N+1)\alpha] d\alpha = \tilde{\alpha}_N^6(p) + \tilde{\tilde{\alpha}}_N^6(p).
 \end{aligned}$$

Находим

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}_N^6(p) &= \frac{f_0 g_0}{32\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)k^{1/2}N^{3/2}} \times \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \cos[(k+N+2)\alpha] d\alpha = \\
 &= O(1) \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} k^{1/2} N^{-1/2} \frac{1}{|k^2 - N^2|(k+N)} = \\
 &= \frac{O(1)}{N^{3/2}} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{K^{1/2}}{|k^2 - N^2|} = O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right).
 \end{aligned}$$

Отметим, что в конце выкладки была использована лемма 2.3. Далее,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}_N^6(p) &= -\frac{f_0 g_0}{32\pi^2} \sum_{l=-N+1, l \neq 0}^{\infty} \frac{(2l+2N+1)(2N+1)}{l(2N+l+1)(l+N)^{1/2}N^{3/2}} \times \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin((l+1)\alpha) d\alpha = \\
 &= -\frac{f_0 g_0}{32\pi^2} \sum_{l=-N+1, l \neq 0}^{N-1} \frac{(2l+2N+1)(2N+1)}{l(2N+l+1)(l+N)^{1/2}N^{3/2}} \times \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin((l+1)\alpha) d\alpha - \\
 &\quad - \frac{f_0 g_0}{32\pi^2} \sum_{l=N}^{\infty} \frac{(2l+2N+1)(2N+1)}{l(2N+l+1)(l+N)^{1/2}N^{3/2}} \times \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin((l+1)\alpha) d\alpha = \tilde{q}(N) + \tilde{\tilde{q}}(N).
 \end{aligned}$$

Сначала рассмотрим $\tilde{q}(N)$ (и это самое главное в этом параграфе):

$$\tilde{q}(N) = -\frac{f_0 g_0}{32\pi^2} \sum_{l=-N+1, l \neq 0}^{N-1} \frac{(2l+2N+1)(2N+1)}{l(2N+l+1)(l+N)^{1/2}N^{3/2}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin((l+1)\alpha) d\alpha = \\
& = -\frac{f_0 g_0}{32\pi^2} \frac{1}{N} \sum_{l=-N+1, l \neq 0}^{N-1} \frac{(1+(2l+1)(2N)^{-1})(1+(2N)^{-1})}{l(1+(l+1)(2N)^{-1})(1+lN^{-1})^{1/2}} \times \\
& \quad \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin((l+1)\alpha) d\alpha = -\frac{f_0 g_0}{16\pi^2} \frac{1}{N} \times \\
& \quad \times \sum_{l=-N+1, l \neq 0}^{N-1} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin((l+1)\alpha) d\alpha \left[\frac{1}{l} + \frac{1}{2lN} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right] = \\
& = -\frac{f_0 g_0}{16\pi^2} \frac{1}{N} \sum_{l=-N+1, l \neq 0}^{N-1} \frac{1}{l} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin((l+1)\alpha) d\alpha + O\left(\frac{1}{N^2}\right).
\end{aligned}$$

Заметим, что опять у нас есть неточность в рассуждениях при $(1-c)(N-1) \leq |l| \leq N-1$, $1 > C > 0$. Но дополнительное исследование показывает, что вклад этой неучтенной погрешности не более чем $O(\frac{1}{N^2})$. Далее

$$\begin{aligned}
\tilde{q}(N) &= -\frac{f_0 g_0}{16\pi^2} \frac{1}{N} \sum_{l=-N+1, l \neq 0}^{N-1} \frac{1}{l} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \cos(l\alpha) d\alpha + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\alpha) \sin(l\alpha) d\alpha \right\} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = \\
&= -\frac{f_0 g_0}{16\pi^2} \frac{1}{N} \sum_{l=-N+1, l \neq 0}^{N-1} \frac{1}{l} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\alpha) \sin(l\alpha) d\alpha + O\left(\frac{1}{N^2}\right).
\end{aligned}$$

Но из работы [5, с. 46] известна формула

$$\sum_{l=N}^{\infty} \frac{\sin(l\alpha)}{l} = \frac{\pi - \alpha}{2} \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

И поэтому

$$\tilde{q}(N) = -\frac{f_0 g_0}{16\pi^2} \frac{1}{N} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\alpha) (\pi - \alpha) d\alpha + O\left(\frac{1}{N^2}\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{N} \sum_{|l| \geq N} O\left(\frac{1}{l^2}\right) = \\
& = -\frac{1}{N} \frac{f_0 g_0}{16\pi^2} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\alpha)(\pi - \alpha) d\alpha + O\left(\frac{1}{N^2}\right).
\end{aligned}$$

В заключении имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{q}(N) &= -\frac{f_0 g_0}{32\pi^2} \sum_{l=N}^{\infty} \frac{(2l+2N+1)(2N+1)}{l(2N+l+1)(l+N)^{1/2}N^{3/2}} \times \\
&\times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin((l+1)\alpha) d\alpha = O(1) \sum_{l=N}^{\infty} \frac{1}{N} O\left(\frac{1}{l^2}\right) = O\left(\frac{1}{N^2}\right).
\end{aligned}$$

Подведем итог в рассмотрении поправки $\alpha_N^6(p)$:

$$\alpha_N^6(p) = -\frac{f_0 g_0}{16\pi^2} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\alpha)(\pi - \alpha) d\alpha \frac{1}{N} + O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right).$$

Рассмотрим $\alpha_N^7(p)$:

$$\begin{aligned}
\alpha_N^7(p) &= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} \times \\
&\times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin((k+1/2)\alpha - \pi/4) \sin((N+3/2)\alpha - \pi/4) d\alpha \frac{O(1)}{k^{3/2}N^{3/2}} = \\
&= O(1) \sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}N^{1/2}|k^2 - N^2|} = O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

В конце выкладки была использована лемма 2.4.

Для $\alpha_N^8(p)$ получаем

$$\begin{aligned}
\alpha_N^8(p) &= - \sum_{k=0, k \neq N}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin((k+3/2)\alpha - \pi/4) \times \\
&\times \cos((N+1/2)\alpha - \pi/4) \frac{f_0 g_0}{16\pi^2} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)N^{1/2}k^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Повторяем те же рассуждения, что и для $\alpha_N^6(p)$, приходим к равенству

$$\alpha_N^8(p) = -\frac{f_0 g_0}{16\pi^2} \frac{1}{N} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\alpha)(\pi - \alpha) d\alpha + O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right).$$

Далее

$$\begin{aligned} \alpha_N^9(p) &= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} \times \\ &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin((k+3/2)\alpha - \pi/4) \times \\ &\quad \times \cos((N+1/2)\alpha - \pi/4) d\alpha O(N^{-3/2}k^{-3/2}) = \\ &= O(1) \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{(kN)^{1/2}|k^2 - N^2|} = O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Здесь была использована лемма 2.4.

Для следующего слагаемого имеем

$$\begin{aligned} \alpha_N^{10}(p) &= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} \times \\ &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \sin((k+3/2)\alpha - \pi/4) \times \\ &\quad \times \sin((N+3/2)\alpha - \pi/4) d\alpha O(N^{-3/2}k^{-3/2}) = \\ &= \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{(kN)^{1/2}|k^2 - N^2|} O(\ln(\varepsilon)) = \frac{O(\ln(\varepsilon))}{N^{3/2}}. \end{aligned}$$

Здесь мы применили лемму 2.4 и очевидное равенство

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{d\alpha}{\sin(\alpha)} = O(\ln(\varepsilon)).$$

Используя последнее равенство, лемму 2.5 и условия $f(0) = f(\pi) = 0$, получаем

$$\alpha_N^{11}(p) = -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \cos((k+1/2)\alpha - \pi/4) O(1) d\alpha \frac{1}{N^{5/2}k^{1/2}} = \\
 & = O(\ln(\varepsilon)) \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{N^{3/2}} \frac{1}{|k^2 - N^2|} = \frac{O(\ln(\varepsilon))}{N^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

На основе леммы 2.6 находим

$$\begin{aligned}
 \alpha_N^{12}(p) &= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} \times \\
 & \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \cos((N+3/2)\alpha - \pi/4) O(1) d\alpha \frac{1}{N^{5/2}k^{1/2}} = \\
 & = O(\ln(\varepsilon)) \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{\sqrt{N}}{k^{3/2}} \frac{1}{|k^2 - N^2|} = \frac{O(\ln(\varepsilon))}{N^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

С использованием леммы 2.7 и очевидного равенства

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{d\alpha}{\sin^2(\alpha)} = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
 \alpha_N^{13}(p) &= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)} \times \\
 & \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin^3(\alpha)} \sin((k+3/2)\alpha - \pi/4) O(1) d\alpha \frac{1}{N^{5/2}k^{3/2}} = \\
 & = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}N^{3/2}|k^2 - N^2|} = O\left(\frac{\ln(N)}{N^3}\right) \frac{1}{\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

С учетом леммы 2.8 имеем

$$\begin{aligned}
 \alpha_N^{14}(p) &= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)N^{3/2}k^{5/2}} \times \\
 & \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin^3(\alpha)} \sin((N+3/2)\alpha - \pi/4) O(1) d\alpha =
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} N^{-1/2} k^{-3/2} |k^2 - N^2|^{-1} O(\varepsilon^{-1}) = O\left(\frac{1}{\varepsilon N^{5/2}}\right).$$

И, наконец,

$$\begin{aligned} \alpha_N^{15}(p) &= \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{(2k+1)(2N+1)}{(k-N)(k+N+1)N^{5/2}k^{5/2}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\sin^4(\alpha)} O(1) d\alpha = \\ &= \sum_{k=1, k \neq N}^{\infty} \frac{O(\varepsilon^{-2})}{N^{3/2}k^{3/2}|k^2 - N^2|} = O\left(\frac{1}{N^3\varepsilon^2}\right). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали лемму 2.9.

Теперь соберем наши оценки вместе:

$$\begin{aligned} \alpha_N(p) &= \sum_{i=0}^{15} \alpha_N^i(p) = \frac{O(1)}{N^{3/2}} + O(\varepsilon^2 \ln(N)) + O\left(\frac{\ln(N)}{N} \varepsilon\right) + \\ &+ O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right) + O\left(\frac{\varepsilon}{N}\right) + O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right) + O\left(\frac{\varepsilon}{N^{3/2}}\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) + \\ &+ O\left(\frac{\varepsilon}{N^{3/2}}\right) + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right) - \frac{f_0 g_0}{8\pi^2} \frac{1}{N} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\alpha) (\pi - \alpha) d\alpha + \\ &+ O\left(\frac{\ln(N)}{N^2}\right) + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right) + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right) + \frac{O(\ln(\varepsilon))}{N^{3/2}} + \frac{O(\ln(\varepsilon))}{N^{3/2}} + \\ &+ \frac{O(\ln(\varepsilon))}{N^{3/2}} + O\left(\frac{\ln(N)}{N^{3/2}}\right) + O\left(\frac{1}{\varepsilon N^{5/2}}\right) + O\left(\frac{1}{N^3\varepsilon^2}\right). \end{aligned}$$

В качестве ε выбираем $\varepsilon = N^{-3/4}$ и получаем окончательно

$$\begin{aligned} \alpha_N(p) &= -\frac{f_0 g_0}{8\pi^2} \frac{1}{N} \int_0^{\pi} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\alpha) (\pi - \alpha) d\alpha + O\left(\frac{\ln(N)}{N^{3/2}}\right) = \\ &= -\frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{N} \int_0^{\pi} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\alpha) (\pi - \alpha) d\alpha + O\left(\frac{\ln(N)}{N^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

§ 4. Основные теоремы

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4.1. Если P — нечетный, бесконечно дифференцируемый комплексный (вообще говоря) потенциал, то для собственных чисел оператора $T + P$ верно равенство

$$\sum_{i=0}^{2N} \mu_{N,i} - (N^2 + N)(2N + 1) + \frac{1}{N} \frac{f_0 g_0}{8\pi^2} \int_0^\pi f(\alpha) \operatorname{ctg}(\alpha) (\pi - \alpha) d\alpha = O\left(\frac{\ln(N)}{N^{3/2}}\right).$$

или

$$\sum_{i=0}^{2N} \mu_{N,i} - (N^2 + N)(2N + 1) = \left(\frac{\ln(N)}{N^{3/2}}\right).$$

где $f(\alpha)$ — Δ -преобразование потенциала $p(\varphi, \theta)$, f_0, g_0 — конкретные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2N} \mu_{N,i} - (N^2 + N)(2N + 1) + \sum_{i=0}^{2N} (Pv_{N,i}, v_{N,i}) + \alpha_N(p) + \beta_N(p) - \\ - \frac{1}{8\pi i} \operatorname{Sp} \left[\int_{l_N} - \int_{l_{N-i}} \right] (P(T - \lambda E)^{-1})^4 d\lambda + \dots, \end{aligned}$$

где $\beta_N(p)$ — третья поправка теории возмущений. Но

$$\sum_{i=0}^{2n} (Pv_{N,i}, v_{N,i}) = \frac{1}{4\pi} (2N + 1) \iint_{S^2} p(\varphi, \theta) \sin(\theta) d\varphi d\theta = 0$$

в силу нечетности потенциала $p(\varphi, \theta)$.

Далее,

$$\begin{aligned} \beta_N(p) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{3} \operatorname{Sp} \left[\int_{l_N} - \int_{l_{N-1}} \right] [P(T - \lambda E)^{-1}] d\lambda = \\ &= \frac{1}{6\pi i} \left[\int_{l_N} - \int_{l_{N-1}} \right] \sum \frac{(2N + 1)(2k + 1)(2l + 1)}{(\lambda_N - \lambda)(\lambda_k - \lambda)(\lambda_l - \lambda)} d\lambda \left(\frac{1}{4\pi}\right)^3 \times \\ &\times \iiint_{S^2} \iiint_{S^2} \iiint_{S^2} p(\varphi, \theta) p(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}) p(\tilde{\tilde{\varphi}}, \tilde{\tilde{\theta}}) P_N(\cos(\alpha)) P_k(\cos(\beta)) \times \\ &\times P_l(\cos(\gamma)) \sin(\theta) \sin(\tilde{\theta}) \sin(\tilde{\tilde{\theta}}) d\varphi d\tilde{\varphi} d\tilde{\tilde{\varphi}} d\theta d\tilde{\theta} d\tilde{\tilde{\theta}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \cos(\theta) \cos(\tilde{\theta}) + \sin(\theta) \sin(\tilde{\theta}) \cos(\varphi - \tilde{\varphi}), \\ \cos(\beta) &= \cos(\tilde{\theta}) \cos(\tilde{\tilde{\theta}}) + \sin(\tilde{\theta}) \sin(\tilde{\tilde{\theta}}) \cos(\tilde{\varphi} - \tilde{\tilde{\varphi}}), \\ \cos(\gamma) &= \cos(\theta) \cos(\tilde{\tilde{\theta}}) + \sin(\theta) \sin(\tilde{\tilde{\theta}}) \cos(\varphi - \tilde{\tilde{\varphi}}),\end{aligned}$$

Если в шестикратном интеграле сделать замену $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$, то $\alpha \rightarrow \pi - \alpha$, $\gamma \rightarrow \pi - \gamma$ и поэтому

$$\begin{aligned}P_N(\cos(\pi - \alpha)) &= P_N(-\cos(\alpha)) = (-1)^N P_N(\cos(\alpha)), \\ P_l(\cos(\pi - \gamma)) &= P_l(-\cos(\gamma)) = (-1)^l P_l(\cos(\gamma))\end{aligned}$$

и

$$p(\pi + \varphi, \pi - \theta) = -p(\varphi, \theta).$$

Следовательно, интеграл изменит знак на $(-1)^{N+l+1}$, но интеграл инвариантен относительно таких замен переменных. Тогда шестикратный интеграл равен нулю, если N и l , k и l , N и k взаимно нечетны. Но очевидно, что среди трех целых чисел хотя бы два имеют одинаковую четность. Поэтому шестикратный интеграл всегда равен нулю и тогда $\beta_N(p) \equiv 0$, если потенциал p — нечетная функция.

Оценим четвертую поправку теории возмущения, пользуясь леммой 1.1:

$$\begin{aligned}& \left| -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Sp} \left[\int_{l_N} - \int_{l_{N-1}} \right] (P(T - \lambda E)^{-1})^4 d\lambda \right| \leq \\ & \leq O(1) \int_{-\infty}^{\infty} \|(T - \lambda E)^{-1}\|_2^2 \|(T - \lambda E)^{-1}\|^2 d\lambda \leq \\ & \leq O(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(|p| + N)^3} = O\left(\frac{1}{N^2}\right).\end{aligned}$$

Результат § 3 для $\alpha_N(p)$ немедленно доказывает теорему 4.1. □

Докажем следующую теорему (ср. [9]).

ТЕОРЕМА 4.2. Если p — вещественная, гладкая, нечетная функция, то для собственных чисел оператора $T + P$ справедливо тождество

$$\mu_{0,0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{2k} \mu_{k,i} - (k+1)(2k+1) \right\} =$$

$$= -(8\pi)^{-1} \iint_{S^2} p^2(\varphi, \theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}\theta_T(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) e^{-k(k+1)t}, \\ \theta_{T+P}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} e^{-\mu_{k,i}t}, \\ \theta_P(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{k} t e^{-k(k+1)t},\end{aligned}$$

где $C = -\frac{f_0 g_0}{8\pi^2} \int_0^{\pi} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\alpha) (\pi - \alpha) d\alpha$. Затем

$$\begin{aligned}\theta_{T+P}(t) - \theta_T(t) - \theta_P(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{i=0}^{2k} e^{-\mu_{k,i}t} - e^{-k(k+1)t} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C}{k} t e^{-k(k+1)t} \right\} + \left(e^{\mu_{0,0}t} - e^0 \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \left(\sum_{i=0}^{2k} \left[e^{-[\mu_{k,i} - k(k+1)]t} - 1 \right] - \frac{C}{k} t \right) - \mu_{0,0}t + O(t^2) = \\ &= -\mu_{0,0}t + O(t^2) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k(k+1)t} (-1) \left[\sum_{i=0}^{2k} \mu_{k,i} - k(k+1)(2k+1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{C}{k} \right] t + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k(k+1)t} O\left(\frac{1}{k^3}\right) t^2.\end{aligned}$$

но ряд

$$-\mu_{0,0} + \sum_{k=1}^{\infty} - \left[\sum_{i=0}^{2k} \mu_{k,i} - k(k+1)(2k+1) - \frac{C}{k} \right]$$

равномерно сходится по k , поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\theta_{T+P}(t) - \theta_T(t) - \theta_P(t)}{t} &\rightarrow -\mu_{0,0} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} - \left[\sum_{i=0}^{2k} \mu_{k,i} - k(k+1)(2k+1) - \frac{C}{k} \right] \quad \text{при } t \rightarrow +0.\end{aligned}$$

С другой стороны [10, с. 82–83],

$$\begin{aligned}\theta_{T+P}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} e^{-\mu_{k,i}t} \sim (2\pi)^{-2} t^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_{2j} t^j, \\ \theta_T(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) e^{-k(k+1)t} \sim (2\pi)^{-2} t^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} t^j.\end{aligned}$$

Найдем асимптотику ряда $\sum n^{-1} e^{-n(n+1)\pi}$ при $x \rightarrow +0$

Известно [6, с. 83], что при $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}n^{-1} e^{-n(n+1)x} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} [n(n+1)]^{-s} \frac{1}{n} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} n^{-2s-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} n^{-2s-1} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-s(-s-1)\dots(-s+k+1)}{k! n^k}\right] ds.\end{aligned}$$

Отсюда суммируя по n , получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e^{-n(n+1)x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} \left\{ \zeta(2s+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \zeta(2s-1+k) \right\} ds.$$

Функция $\Gamma(s)$ имеет полюсы в точке $0, -1, -2, \dots, -a$ с вычетом $(-1)^k/k!$, $\zeta(2s+1)$ имеет полюс в точке $s=0$ с вычетом $1/2$. Для $\Gamma(z)$ справедливо разложение вблизи $z=0$: $\Gamma(z) = 1/z - \gamma + O(z)$, а для дзета-функции Римана $\zeta(2z+1) = 1/(2z) + \gamma + O(z)$. Тогда у функции $\Gamma(z)\zeta(2z+1)$ в точке $z=0$ полюс второго порядка с вычетом $\gamma/2$, где γ — постоянная Эйлера, и потому

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} \zeta(2s+1) ds = \\ &= \frac{\gamma - \ln(x)}{2} + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k!} \zeta(-2k+1) x^k + O(x^{N+1-\delta})\end{aligned}$$

при $1 > \delta > 0$ и $x \rightarrow +0$.

Заметим, что мы не могли сразу воспользоваться результатом работы [7, с. 392] так как там есть ошибка в первом члене.

Далее точно так находим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} \zeta(2s+1) s ds = \frac{1}{8} x^{1/2} \Gamma(-1/2) - \sum_{k=1}^N \zeta(-2k+2) \frac{(-1)^k}{k!} (-1)^k x^k.$$

и т. д. Следовательно

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{C}{n} e^{-n(n+1)t} = C \left[\frac{\gamma - \ln(t)}{2} \right] t + O(t^{3/2}), \quad t \rightarrow +0.$$

Правая часть $[\theta_{T+P}(t) - \theta_T(t) - \theta_P(t)]/t$ не ограничена при $t \rightarrow +0$ при любом $C \neq 0$, что противоречит сходимости ряда

$$\mu_{0,0} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2k} \left\{ \mu_{k,i} - (2k+1)k(k+1) - \frac{C}{k} \right\}.$$

Значит, $C = 0$, т. е.

$$\int_0^{\pi} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\alpha) (\pi - \alpha) d\alpha = 0.$$

Последнее рассуждение принадлежит В. Е. Подольскому, за что авторы благодарны ему.

Отсюда

$$\begin{aligned} \theta_{T+P}(t) - \theta_T(t) - \theta_P(t) &= (2\pi)^{-2} \tilde{a}_0 t^{-1} + (2\pi)^{-2} \tilde{a}_2 + (2\pi)^{-4} \tilde{a}_4 t - \\ &- (2\pi)^{-2} a_0 t^{-1} - (2\pi)^{-2} a_2 - (2\pi)^{-2} a_4 t + O(t^2) \end{aligned}$$

при $t \rightarrow +0$. Как показано выше, существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow +0} [\theta_{T+P}(t) - \theta_T(t) - \theta_P(t)]/t.$$

поэтому $\tilde{a}_0 = a_0$, $\tilde{a}_2 = a_2$. Используя [8], получаем

$$\lim_{t \rightarrow +0} [\theta_{T+P}(t) - \theta_T(t) - \theta_P(t)]/t = (4\pi)^{-1} (360)^{-1} \iint_{S^2} [60 \nabla_k \nabla_k P(\varphi, \theta) +$$

$$180p^2(\varphi, \theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi - \frac{\gamma}{2} C,$$

по $\iint_{S^2} \nabla_N \nabla_N p(\varphi\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi = 0$.

Заметим, что в [8] рассматривается лапласиан Бохнера

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

отличающийся от лапласиана Бельтрами $\Delta\beta$ на $\frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} \frac{\partial}{\partial \theta}$. Покажем, что это не меняет существа дела.

1. Рассмотрим, как меняется первая поправка теории возмущений для $-\Delta + P = -\Delta_\beta + P + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta}$:

$$\sum_{i=0}^{2l} \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} v_{l,i}, v_{l,i} \right) = C_1 \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(1) \right) = 0.$$

2. Докажем, что вторая поправка теории возмущений тоже не меняется:

$$\iiint_{S^2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} P_k(\cos(\alpha)) P P \cos(\alpha) \sin(\theta) \sin(\tilde{\theta}) d\theta d\tilde{\theta} d\varphi d\tilde{\varphi},$$

где $\cos(\alpha) = \cos(\theta) \cos(\tilde{\theta}) + \sin(\theta) \sin(\tilde{\theta}) \cos(\varphi - \tilde{\varphi})$. Делаем замену $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$, тогда интеграл умножается на $(-1)^{k+2+m}$. При замене $\tilde{\theta} \rightarrow \pi - \tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi} \rightarrow \pi + \tilde{\varphi}$ интеграл умножается на $(-1)^{k+m+1}$, значит, изучаемый интеграл равен нулю.

Далее,

$$\begin{aligned} & \iiint_{S^2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} P_k(\cos(\alpha)) \frac{\cos(\tilde{\theta})}{\sin(\tilde{\theta})} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} P_m(\cos(\alpha)) \sin(\theta) \times \\ & \quad \times \sin(\tilde{\theta}) d\theta d\varphi d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} = \\ & = \iiint_{S^2} \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} P_k(\cos(\alpha)) \cos(\tilde{\theta}) \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} P_m(\cos(\alpha)) d\theta d\varphi d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} = I_{k,m}. \end{aligned}$$

Переходим к координатам $\varphi, \theta, \tilde{\theta}, \alpha$ тогда

$$I_{k,m} = \iiint_{S^2} \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} P_k(\cos(\alpha)) \cos(\tilde{\theta}) \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} P_m(\cos(\alpha)) \times$$

$$\times \psi(\alpha, \theta, \tilde{\theta}) d\alpha d\theta d\tilde{\theta} d\varphi = 0$$

за счет знака перед $\psi(\alpha, \theta, \tilde{\theta})$, а именно "+", если $\tilde{\varphi} < \varphi$ и "-" при $\tilde{\varphi} > \varphi$.

□

Итак, вторая поправка теории возмущений для оператора Лапласа-Бохнера равна второй поправке для оператора Лапласа-Бельтрами. Другие поправки рассматриваются аналогично.

Литература

1. Guillemin V. Some spectral results for the Laplace operator with potential on the n -sphere // *Advan. Math.* 1978. V. 24. P. 273–286.
2. Дубровский В. В. О регуляризованных следах дифференциальных операторов в частных производных // *Тр. семинара им. И. Г. Петровского.* 1983. Вып. 9. С. 40–44.
3. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
4. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978.
5. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
6. Гельфонд А. О. Вычеты и их приложения. М.: Наука, 1960.
7. Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
8. Gilkey P., Branson P. The asymptotics of the Laplacian on a manifold with boundary // *Commun. Part. Different. Equations.* 1990. V. 1, N 2. P. 245–272.
9. Садовничий В. А. О следе разности двух обыкновенных дифференциальных операторов // *Дифференц. уравнения.* 1962. Т. 2, № 12. С. 1611–1624.
10. Агранович М. С. Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // *Итоги науки и техники / ВИНТИ.* 1990. Т. 63. С. 5–123.