

УДК 517.984.5

Регуляризованный след ограниченного возмущения оператора с ядерной резольventой¹

В. А. Садовничий, В. Е. Подольский

Теория следов линейных операторов берёт своё начало с одного из фундаментальных фактов конечномерной теории об инвариантности матричного следа линейного оператора и в частности, о совпадении его со спектральным следом.

Этот результат был последовательно перенесен на случай бесконечномерных операторов со следом – так называемых ядерных операторов, а именно, было доказано (см. [1]), что если оператор A – ядерный, то для любой пары $(\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty})$ ортонормированных базисов верно

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (A\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A\psi_n, \psi_n) \quad (1)$$

и так же верно равенство, известное как теорема В. Б. Лидского [1], [2]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (A\varphi_n, \varphi_n) = \sum_n \lambda_n \quad (2)$$

где $\{\lambda_n\}$ – все собственные числа оператора A . Этими результатами классическая теория была завершена, так как здесь в максимальной общности охвачен весь класс операторов со следом.

Дальнейшее развитие теории привело к исследованию инвариантности следов операторов, следа не имеющих. Здесь естественно (в полном соответствии с теорией суммирования расходящихся рядов) возникает следующая постановка задачи: при расходимости ряда из

¹ Дифф. уравнения, 1999, т. 34, №4, с. 556 – 564.

матричных элементов оператора доказать как аналог формулы (1) соотношение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ((A\varphi_n, \varphi_n) - (A\psi_n, \psi_n)) = 0. \quad (3)$$

Для понимания дальнейшей сути теории надо принять во внимание следующий простой факт – если ряд из матричных элементов расходится в каком-то базисе $\{\varphi_n\}$, то существует такая перенумерация векторов этого базиса, которую можно принять за другой базис $\{\psi_n\}$, что ряд (3) расходится. Это означает, что для любых неядерных операторов A , в том числе и определенных во всем пространстве, соотношение (3) не может быть верно для любых пар базисов, и задача необходимо имеет вид:

указать класс операторов и соответствующий класс пар базисов, для которых верна инвариантность следа в смысле (3).

Эта постановка влечет следующую (и весьма глубокую) проблему выбора базисов – ведь хотя ясно, что второй из этих базисов должен быть в каком-то смысле близок к первому, но определение первого базиса должно быть обусловлено содержательными внутренними причинами. Для дискретных операторов (т. е. операторов с компактной резольвентой) на помощь приходит спектральная формулировка (2), и в рассматриваемых в теории следов в настоящее время постановках задач в качестве одного из базисов выбирается базис из собственных векторов оператора – разумеется, в предположении, что он есть, а для определения второго базиса оператор "расщепляется" в сумму двух $A = A_0 + B$, причём предполагается подчинённость в каком-либо смысле оператора B оператору A_0 , и формула (3) приобретает вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} ((A\varphi_n, \varphi_n) - (A\psi_n, \psi_n)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (((A_0 + B)\varphi_n, \varphi_n) - ((A_0 + B)\psi_n, \psi_n)) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} ((A_0\varphi_n, \varphi_n) - ((A_0 + B)\psi_n, \psi_n) + (B\varphi_n, \varphi_n)) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n - \mu_n + (B\varphi_n, \varphi_n)) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

где $\{\varphi_n\}$ – базис из собственных векторов оператора A_0 с собственными числами $\{\lambda_n\}$, $\{\psi_n\}$ – базис из собственных векторов оператора A с собственными числами $\{\mu_n\}$, а степень подчиненности оператора B оператору A_0 является мерой близости базисов.

Укажем здесь ещё на одно важное обстоятельство – в случае общего положения мы будем вынуждены рассматривать суммирование в (4) со скобками, так как если оператор A_0 имеет кратное собственное число, то в соответствующем инвариантном подпространстве у нас не будет никакого приоритетного выбора базиса и вновь простая перенумерация векторов приведет нас, вообще говоря, к потере смысла задачи, причём в силу симметрии основной формулы (3) реально мы должны будем рассматривать как единое целое след конечномерной части оператора, действующей в сумме подпространств, отвечающих пусть различным, но близким (кратное собственное число при возмущении B рассыпется в группу близких в смысле данного возмущения) собственным числам.

Первый результат теории регуляризованных следов – формула Гельфанда–Левитана для оператора Штурма–Лиувилля [6] не имела вида (4), но суть этого почти сразу вскрыл Л. А. Дикий, показав в работе [4], что формула Гельфанда–Левитана фактически есть формула (4), но авторы провели исследование таким образом, что член $(B\varphi_n, \varphi_n)$, равный в этой задаче $\int_0^\pi q(x) \cos^2 nx \, dx$, автоматически самым методом был разбит на две части, и главный член, образующий расходящийся ряд, был оставлен на месте (в левой части формулы), а все остальное просуммировано и сумма записана в правую часть.

Именно такой подход, при котором член $(B\varphi_n, \varphi_n)$ обязательно исследуется, от него отделяется расходящаяся составляющая, выраженная только (важнейшее условие, только на этом пути вскрывается связь теории следов с теорией дзета-функций операторов и рядом других вопросов) в терминах собственных чисел оператора A_0 , а все остальное суммируется и заносится в правую часть, долгое время был центральным в многочисленных исследованиях, причем авторы весьма успешно разрабатывали прямые методы получения формул следов такого вида, минуя выражения типа (4). Мы не будем приводить здесь обширной библиографии, ограничившись указанием сильнейших результатов в этом направлении [5], [6], [7].

Однако постепенно стало ясно, что в общем положении (и уже для большинства операторов в частных производных) выражение $(B\varphi_n, \varphi_n)$ не может быть эффективно исследовано (достаточно сказать, что даже для одномерного гармонического осциллятора этот агрегат слабо исследован и до сих пор находится в стадии активного изучения) и с конца 70-х годов начались активные исследования формул вида (4) и близких к ней. Здесь отметим работы [8], [9], [10], в которых формула (4) была доказана для различных классов операторов.

ров, на которые, помимо других условий, обязательно накладывались условия: оператор A_0 самосопряженный, его собственные числа удовлетворяют условию $|\lambda_n| > cn^{1+\delta}$ с некоторым (различным в разных результатах) $\delta > 0$, а оператор B ограничен.

В настоящей работе в первом параграфе мы исследуем поведение на некоторых контурах ядерной нормы резольventы оператора A_0 и доказываем при определённых условиях её стремление к нулю. Заметим, что в цитированных работах при более быстром росте собственных чисел доказывалась растущая оценка ядерной нормы резольventы.

Далее во втором параграфе мы собственно доказываем формулу (4) для операторов A_0 самосопряженных, имеющих ядерную резольventу, но с собственными числами, растущими, вообще говоря, медленнее любой степени, строго большей первой. При этом некоторые дополнительные условия на них все же накладываются, см. ниже точные формулировки.

Содержание третьего параграфа тесно связано со следующей гипотезой, которую мы считаем верной и предлагаем вниманию специалистов:

формула (4) верна для операторов A_0 , имеющих ядерную резольventу и для ограниченных операторов B .

Прокомментируем гипотезу одним предельным примером: если A_1 сверх того имеет вольтеррову резольventу (т. е. не имеет спектра) то (4) хотя и тривиализуется, но является верной в том же смысле, что и теорема Лидского (4) в аналогичной ситуации: $0 = 0$.

В подкрепление нашей гипотезы с одной стороны мы приводим в конце работы оценку следа второй поправки теории возмущений, показывающую, что она стремится к нулю без дополнительных условий на собственные числа, а с другой стороны укажем на следующий пример: в работах [14], [12] была доказана следующая формула следа для оператора Лапласа–Бельтрами на двумерной сфере, возмущенного оператором умножения на гладкую нечетную функцию:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k) = -\frac{1}{8\pi} \int_{S^2} q^2 dS.$$

Нетрудно видеть, что левая часть этой формулы имеет в точности вид левой части формулы (4), ведь в данном случае $(B\varphi_n, \varphi_n) \equiv 0$ из-за нечетности потенциала, однако справа мы, напротив, имеем заведомо ненулевое выражение (по крайней мере, для вещественных

потенциалов). Остается заметить, что для собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами $-\Delta$ на двумерной сфере верно $\lambda_k \sim k$ и его резольвента ядерной не является (хотя для любого $\delta > 0$ оператор $(-\Delta)^{1+\delta}$ уже имеет ядерную резольвенту).

§ 1. Ядерная норма резольвенты.

Теорема 1. Пусть A_0 - положительный самосопряженный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H с компактной резольвентой $R_0(\lambda) = (A_0 - \lambda I)^{-1}$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$ - его собственные числа, занумерованные в порядке возрастания. Пусть также

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty \quad (5)$$

$$\frac{n}{\lambda_n} \geq \frac{n+1}{\lambda_{n+1}}. \quad (6)$$

Тогда существует последовательность $\{a_m \in R\}_{m=1}^{+\infty}$, $a_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$ такая, что $\max_{|\lambda|=a_m} \|R_0(\lambda)\|_1 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$. Здесь $\|\cdot\|_1$ - ядерная норма операторов.

Доказательству теоремы предположим лемму².

Лемма 1. При выполнении условий (5), (6) верно

$$\frac{1}{\lambda_n} = o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \quad (7)$$

и $|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Доказательство: В силу критерия Коши сходимости числовых рядов $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$, что $\forall m, l > N_\varepsilon$

$$\varepsilon > \sum_{n=m}^l \frac{1}{\lambda_n} = \sum_{n=m}^l \frac{1}{n} \frac{n}{\lambda_n} \geq \frac{l}{\lambda_l} \sum_{n=m}^l \frac{1}{n} \geq \frac{l}{\lambda_l} \ln \frac{l+1}{m+1}$$

и верно

$$\frac{l \cdot \ln l}{\lambda_l} < \varepsilon \frac{\ln l}{\ln(l+1) - \ln(m+1)} < 2\varepsilon$$

²Утверждение леммы относится к классическому разделу анализа и заведомо не ново, мы доказываем её для полноты изложения и из-за отсутствия чётких ссылок.

для всех $l > N_1$ при фиксированном m , что доказывает (7). Далее, очевидно, что $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ и $\exists l(x)$ такая, что $\lambda_n = nl(n)$, где $l(x)$ монотонно возрастает до $+\infty$ в силу (6), $\frac{1}{l(x)} = o(\frac{1}{\ln n})$ по (7). Тогда

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1} - \lambda_n &= (n+1)l(n+1) - nl(n) = \\ &= n(l(n+1) - l(n)) + l(n+1) \geq l(n+1)\end{aligned}$$

откуда следует второе утверждение леммы.

Доказательство теоремы:

Введем последовательность $d_m = \lambda_{m+1} - \lambda_m \rightarrow +\infty$ и последовательность $a_m = \lambda_m + \frac{d_m}{2}$ и докажем, что $\max_{|\lambda|=a_m} \|R_0(\lambda)\|_1 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$.

Во-первых, покажем, что

$$\max_{|\lambda|=a_m} \|R_0(\lambda)\|_1 = \|R_0(a_m)\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda_n - a_m|} \quad (8)$$

Действительно, если $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, то

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)(A - \bar{\lambda}I)\varphi_n &= (\lambda_n^2 - \lambda\bar{\lambda}_n - \bar{\lambda}\lambda_n + |\lambda|^2)\varphi_n = \\ &= ((\lambda_n - \Re\lambda)^2 + (\Im\lambda)^2)\varphi_n,\end{aligned}$$

и s -числа оператора $R_0(\lambda)$ равны $((\lambda_n - \Re\lambda)^2 + (\Im\lambda)^2)^{-\frac{1}{2}}$, откуда справедливость (8) при $|\lambda| = \text{const}$ очевидна.

Далее, разобьем сумму (8) на две, которые будем оценивать отдельно:

$$S_1 = \sum_{n=1}^m \frac{1}{a_m - \lambda_n}, \quad S_2 = \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n - a_m}, \quad \|R_0(a_m)\|_1 = S_1 + S_2.$$

Для оценки S_1 и S_2 вновь используем функцию $l(x) > 1$, введенную в лемме 1. Тогда

$$\begin{aligned}S_1 &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{a_m - \lambda_n} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{a_m - \lambda_n} + \frac{1}{a_m - \lambda_m} \leq \\ &\leq \int_1^m \frac{dx}{a_m - xl(x)} + \frac{1}{a_m - \lambda_m}\end{aligned} \quad (9)$$

Замечая, что $\frac{1}{a_m - \lambda_m} = \frac{2}{d_m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$, перейдем к оценке интеграла в (9). Сделаем в нем замену $x = a_m t$:

$$\int_{\frac{1}{a_m}}^{\frac{m}{a_m}} \frac{dt}{(1 - tl(a_m t))} = I(m) \quad (10)$$

Из монотонности $l(x)$ следует, что $l(a_m t) \leq l(m)$ на данном промежутке и верно неравенство $\frac{1}{1 - tl(a_m t)} \leq \frac{1}{1 - tl(m)}$. Тогда для $I(m)$ (10) верно

$$I(m) \leq \int_{\frac{1}{a_m}}^{\frac{m}{a_m}} \frac{dt}{1 - l(m)t} = -\frac{1}{l(m)} \cdot \left[\ln \left(1 - \frac{\lambda_m}{a_m} \right) - \ln \left(1 - \frac{l(m)}{a_m} \right) \right] \quad (11)$$

Так как $\frac{1}{l(m)} \rightarrow 0$ и $\frac{l(m)}{a_m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$, то остается исследовать

$$-\frac{1}{l(m)} \cdot \ln \left(1 - \frac{\lambda_m}{a_m} \right) = \frac{1}{l(m)} \cdot \ln \frac{2a_m}{d_m} \leq \frac{1}{l(m)} \ln a_m$$

Последнее неравенство верно в силу $d_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$.

Наконец, заметим, что если λ_n растут быстрее любой степени n , то утверждение теоремы тривиально и ограничимся случаем $\lambda_n = O(n^\gamma)$ с некоторым $\gamma > 0$. Тогда $\ln a_m = O(\ln m)$ и в силу леммы 1

$$\frac{1}{l(m)} \cdot \ln a_m = o \left(\frac{1}{\ln m} \right) \cdot O(\ln m) = o(1) \quad (12)$$

Таким образом, $S_1 = o(1)$ при $m \rightarrow +\infty$. Рассмотрим далее

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n - a_m} = \sum_{n=m+2}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n - a_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1} - a_m} \leq \\ &\leq \int_{m+1}^{+\infty} \frac{dx}{xl(x) - a_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1} - a_m} \end{aligned} \quad (13)$$

Опять имеем $\frac{1}{\lambda_{m+1} - a_m} = \frac{2}{d_m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$ и продолжим оценку (13), сделав в интеграле замену $x = a_m t$ (здесь важно, что $\frac{m+1}{a_m} \leq 1$):

$$\int_{\frac{m+1}{a_m}}^{+\infty} \frac{dt}{tl(a_m t) - 1} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{tl(a_m t) - 1} + \int_{\frac{m+1}{a_m}}^1 \frac{dt}{tl(a_m t) - 1}$$

Для первого из этих интегралов при $t \geq 1$ заметим, что

$$\frac{1}{tl(a_mt) - 1} \leq \frac{1}{tl(t) - 1}$$

(здесь без ограничения общности допущено, что $\lambda_1 > 1$) и следовательно, в силу известного признака Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно относительно параметра a_m и можно делать предельный переход под знаком интеграла: $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{tl(a_mt) - 1} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$.

Для оценки второго интеграла заметим, что при $t \in \left[\frac{m+1}{a_m}, 1\right]$

$$\frac{1}{tl(a_mt) - 1} \leq \frac{1}{l(m+1)t - 1}$$

и далее оценка по сути повторяет цепочку формул (10), (11), (12). Таким образом, и $S_2 = o(1)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть A_0 - оператор теоремы 1, но вместо (6) выполнено

$$\exists 0 < \delta < 1, \quad \frac{n^\delta}{\lambda_n} \geq \frac{(n+1)^\delta}{\lambda_{n+1}}, \quad n > N, \quad (14)$$

а так же существует последовательность $\{\eta_n\}_{n=1}^{+\infty}$ удовлетворяющая условиям (5) и (6) и такая, что

$$\frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{1}{\eta_n}. \quad (15)$$

Тогда существует последовательность $\{a_m \in R\}_{m=1}^{+\infty}$, $a_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$, такая, что $\|R_0(a_m)\|_1 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$.

Доказательство: Введём новую последовательность $\tilde{\lambda}_n$ следующим соотношением:

$$\frac{n}{\tilde{\lambda}_n} = \max_{k \geq n} \left\{ \frac{k}{\lambda_k} \right\}. \quad (16)$$

Так как $\frac{k}{\lambda_k} > 0$ и $\frac{k}{\lambda_k} \rightarrow 0$ (последнее есть хорошо известный факт, доказываемый аналогично первому утверждению леммы 1 из условия (5)) то $\frac{n}{\tilde{\lambda}_n}$ монотонно стремится к нулю и при этом последовательность $\tilde{\lambda}_n$ обладает рядом свойств, которыми мы будем пользоваться:

и) существует подпоследовательность номеров n_m такая, что $\tilde{\lambda}_{n_m} = \lambda_{n_m}$ - это ее номера, на которых достигается максимум в (16);

ii) непосредственно из (16) следует, что $\frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{1}{\tilde{\lambda}_n}$ или равносильно $\tilde{\lambda}_n \leq \lambda_n$.

Третье необходимое нам свойство последовательности $\tilde{\lambda}_n$ не столь очевидно, и мы выделим его в отдельную лемму.

Лемма 3. $\frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{1}{\eta_n}$.

Доказательство: Во-первых, заметим, что для любой последовательности положительных чисел, обладающей свойством (6) верно неравенство $\frac{n}{\lambda_n} \geq \frac{n+1}{\lambda_{n+1}} \Leftrightarrow \lambda_{n+1} \geq \lambda_n + \frac{\lambda_n}{n}$. Далее, если некоторый номер n_0 не принадлежит подпоследовательности, определенной в i), то верно равенство $\tilde{\lambda}_{n_0+1} = \tilde{\lambda}_{n_0} + \frac{\tilde{\lambda}_{n_0}}{n_0}$ - так как последовательность (16) кусочно-постоянна.

Предположим что утверждение леммы неверно, т.е. существует номер n_0 такой, что $\eta_{n_0} > \tilde{\lambda}_{n_0}$. Тогда n_0 не принадлежит подпоследовательности i), иначе мы противоречим предположению теоремы (15). Но тогда

$$\eta_{n_0+1} \geq \eta_{n_0} + \frac{\eta_{n_0}}{n} > \tilde{\lambda}_{n_0} + \frac{\tilde{\lambda}_{n_0}}{n_0} = \tilde{\lambda}_{n_0+1} \quad (17)$$

и по индукции имеем, что $\eta_n > \tilde{\lambda}_n$ для всех $n > n_0$. Но как только n будет принадлежать подпоследовательности i) мы получим противоречие с (15). Лемма доказана.

Возьмём в качестве последовательности a_m из формулировки теоремы последовательность $a_m = \frac{\tilde{\lambda}_{n_m} + \tilde{\lambda}_{n_m+1}}{2}$. Тогда при $n \geq n_m + 1$ в силу ii) $0 < \tilde{\lambda}_n - a_m \leq \lambda_n - a_m$ и мы получаем

$$\sum_{n=n_m+1}^{+\infty} \frac{1}{|a_m - \lambda_n|} \leq \sum_{n=n_m+1}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\lambda}_n - a_m}, \quad (18)$$

а последняя сумма в (18) есть $o(1)$, $m \rightarrow +\infty$ по теореме 1.

Лемма 3. Существует константа $c > 0$ такая, что $c(a_m - \lambda_n) \geq a_m - \tilde{\lambda}_n$ при $n \leq n_m$.

Доказательство: Условие (14) равносильно неравенству $\lambda_{n+1} \geq (1 + \frac{1}{n})^\delta \lambda_n$ и, так как $\frac{1}{n} \in (0, 1]$, то существует число $\delta > \delta_1 > 1$ такое, что

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \frac{\delta_1}{n} \lambda_n. \quad (19)$$

Так как по свойству ii) $\tilde{\lambda}_k \leq \lambda_k$, то в случае если $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n$ мы имеем

$$\tilde{\lambda}_{n+1} - \tilde{\lambda}_n \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n \quad (20)$$

и тем более (так как $\delta < 1$)

$$\tilde{\lambda}_{n+1} - \tilde{\lambda}_n \leq \frac{1}{\delta_1}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \quad (21)$$

В случае, если $\tilde{\lambda}_n \neq \lambda_n$, то, как мы уже видели в доказательстве леммы 2, $\tilde{\lambda}_{n+1} - \tilde{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{n}$, и из (19) и ii) имеем

$$\frac{1}{\delta_1}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \geq \frac{\lambda_n}{n} \geq \frac{\tilde{\lambda}_n}{n} = \tilde{\lambda}_{n+1} - \tilde{\lambda}_n \quad (22)$$

и таким образом, (21) верно для всех номеров. Суммируя несколько неравенств (21) для идущих подряд номеров, имеем

$$\tilde{\lambda}_{n+k} - \tilde{\lambda}_n \leq \frac{1}{\delta_1}(\lambda_{n+k} - \lambda_n) \quad (23)$$

для любых n, k . Утверждение леммы (константа $c = \frac{1}{\delta_1}$) следует теперь из следующей цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_1}(a_m - \lambda_n) &= \frac{1}{\delta_1} \left(\frac{1}{2}(\tilde{\lambda}_{n_m+1} - \tilde{\lambda}_{n_m}) + \lambda_{n_m} - \lambda_n \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2\delta_1}(\tilde{\lambda}_{n_m+1} - \tilde{\lambda}_{n_m}) + \tilde{\lambda}_{n_m} - \tilde{\lambda}_n \geq \frac{1}{2}(\tilde{\lambda}_{n_m+1} - \tilde{\lambda}_{n_m}) + \tilde{\lambda}_{n_m} - \tilde{\lambda}_n = a_m - \tilde{\lambda}_n. \end{aligned}$$

Теперь из результата леммы 3 имеем

$$\sum_{n=1}^{n_m} \frac{1}{|a_m - \lambda_n|} \leq c \sum_{n=1}^{n_m} \frac{1}{a_m - \tilde{\lambda}_n}, \quad (24)$$

а последняя сумма в (24) есть $o(1)$, $m \rightarrow +\infty$ по теореме 1. Вместе с соотношением (18) это дает нам утверждение теоремы.

В завершение этого раздела отметим, что обе теоремы доказаны для положительных операторов лишь с целью не загромождать изложение; вместе с тем непосредственно по доказательствам видно, что никаких идейных или технических трудностей для обобщения утверждений теорем на неполуограниченные операторы нет. Так же нетрудно видеть, что если считать условия теорем выполненными для различных точек спектра, и при этом потребовать, чтобы кратность собственных чисел была равномерно ограничена, то все результаты сохраняют силу (в неравенствах верхние величины будут умножены на максимальную кратность). Наконец, ясно, что выполнение условий

(6) или (14) достаточно не для всех, а лишь для достаточно больших номеров. Учитывая все изложенное, сформулируем без доказательства окончательный результат параграфа

Теорема 3. Пусть A_0 - самосопряженный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H с компактной резольвентой $R_0(\lambda) = (A_0 - \lambda I)^{-1}$, $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ - его собственные числа и их кратность равномерно ограничена. Пусть также

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} < +\infty,$$

последовательность τ_k представляет собой взятые один раз различные собственные числа и

$$\exists 0 < \delta < 1, \exists N \in N, \frac{|k|^\delta}{|\tau_k|} \geq \frac{|k + \text{sign} k|^\delta}{|\tau_{k+\text{sign} k}|}, \quad |k| > N,$$

а так же существует последовательность $\{\eta_n\}_{n=1}^{+\infty}$ удовлетворяющая условиям (5) и (6) и такая, что $\frac{1}{|\tau_n|} \leq \frac{1}{\eta_n}$.

Тогда существует последовательность $\{a_m \in R\}_{m=1}^{+\infty}$, $a_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$, такая, что $\max_{|\lambda|=a_m} \|R_0(\lambda)\|_1 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \pm\infty$.

§ 2. Формула следа.

Пусть A_0 - оператор, удовлетворяющий условиям теоремы 3, а B - ограниченный в H оператор и $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ - собственные числа оператора $A_0 + B$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей (способ нумерации будет уточнен ниже).

Основной результат настоящей работы заключен в следующей теореме.

Теорема 4. Существуют подпоследовательности натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=-k_m}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l - (P\varphi_l, \varphi_l)) \right) = 0$$

Здесь $\{\varphi_l\}_{l=-\infty}^{+\infty}$ - собственные вектора оператора A_0 , соответствующие числам $\{\lambda_l\}_{l=-\infty}^{+\infty}$.

Доказательство: во-первых, занумеруем $\{\lambda_n\}$ следующим образом: $\lambda_0 > 0$, $\lambda_{-1} < 0$. Далее, за подпоследовательность $\{n_m\}_{n=1}^{\infty}$ возьмем ту, что определяется в доказательстве теоремы 2 для положительной части последовательности τ_n в свойстве i), и аналогично $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ для отрицательной части. Теперь определим следующую систему контуров Γ_m на комплексной плоскости. Обозначим $\lambda_{n_{m+1}} - \lambda_{n_m} = d_m$ и $\lambda_{-k_m} - \lambda_{-k_{m-1}} = d_{-m}$. Контур Γ_m составим из полуокружности с радиусом $\lambda_{n_m} + \frac{d_m}{4}$ в полуплоскости $Re\lambda > 0$, полуокружности с радиусом $\frac{d_{-m}}{2} - \lambda_{-k_m}$ в полуплоскости $Re\lambda < 0$ и двух вертикальных отрезков мнимой оси, соединяющих эти полуокружности.

Лемма 4. *Внутри контуров Γ_m количество собственных чисел операторов A_0 и A совпадает при m таких, что $\frac{1}{2}d_m > \|B\|$ и $\frac{1}{2}d_{-m} > \|B\|$.*

Доказательство. Рассмотрим голоморфное семейство ("типа A " в терминологии [13]) операторов $A_0 + zB$. В соответствии с результатами [13], гл.7, § 2, если замкнутый контур γ отделяет часть спектра оператора A_0 , то он отделяет часть спектра и оператора $A_0 + zB$ при $|z| < \frac{\rho}{\|B\|}$, где ρ - расстояние от спектра A_0 до γ . В частности, если эта часть спектра есть конечный набор собственных чисел (с учетом кратностей), то их количество в контуре не меняется. Из того, что в нашем случае $\rho = \min \left\{ \frac{d_m}{2}, \frac{d_{-m}}{2} \right\}$ и нас интересует $z = 1$, и следует утверждение леммы.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, уточним нумерацию $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, которой мы будем пользоваться. Сверх наложенного условия возрастания действительных частей потребуем, чтобы использованные подмножества целых чисел для нумерации $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ в каждом контуре Γ_m совпадали.

Для доказательства теоремы заметим, что

$$\sum_{l=-k_m}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda Tr(R_0(\lambda) - R(\lambda)) d\lambda \quad (25)$$

и исследуем правую часть равенства.

Для пары операторов A_0 и $A_0 + B$ таких, что $BR_0(\lambda)$ - ядерный, можно ввести так называемый определитель возмущения [1]:

$$D_{A/A_0}(\lambda) = Det[(A - \lambda I) \cdot (A_0 - \lambda I)^{-1}] = Det[I + BR_0(\lambda)] \quad (26)$$

Нам потребуются два хорошо известных [1] свойства этого определителя:

$$Tr(R_0(\lambda) - R(\lambda)) = \frac{d}{d\lambda} (\ln D_{A/A_0}(\lambda)) \quad (27)$$

$$\ln D_{A/A_0}(\lambda) = \text{Tr} \ln(I + BR_0(\lambda)) \quad (28)$$

Равенство (23) корректно при $\|BR_0(\lambda)\| < 1$, что выполнено в нашем случае при $\lambda \in \Gamma_m$, $m \rightarrow +\infty$.

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \text{Tr}(R_0(\lambda) - R(\lambda)) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \frac{d}{d\lambda} (\ln D_{A/A_0}(\lambda)) d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \ln D_{A/A_0}(\lambda) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr} \ln(I + BR_0(\lambda)) d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \left[\text{Tr}(BR_0(\lambda)) + \text{Tr} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) \right] d\lambda \quad (29) \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно $\text{Tr}(BR_0(\lambda))$. Так как $BR_0(\lambda)$ - ядерный, то его след может быть вычислен как матричный в любом ортонормированном базисе [2] и верно:

$$\text{Tr}(BR_0(\lambda)) = \sum_n (B(A_0 - \lambda I)^{-1} \varphi_n, \varphi_n) \quad (30)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda)) d\lambda &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_n (B\varphi_n, \varphi_n) \frac{1}{\lambda_n - \lambda} d\lambda = - \sum_{n=-k_m}^{n_m} (B\varphi_n, \varphi_n) \quad (31) \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (25) с учетом (29) и (5) записывается в виде

$$\sum_{l=-k_m}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l - (B\varphi_l, \varphi_l)) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \quad (32)$$

Нам необходимо оценить члены ряда (32) при $k \geq 2$. Заметим, что $\|R_0(\lambda)\| = d^{-1}(\lambda)$ [13], где $d(\lambda)$ - рассорание от точки $\lambda \in C$ до спектра оператора A_0 . Запишем оценку (используемые свойства следа ядерного оператора см. в [1])

$$|\text{Tr}((BR_0(\lambda))^k)| \leq \|BR_0(\lambda)\|^{k-1} \cdot \|B\| \cdot \|R_0(\lambda)\|_1 =$$

$$= \|B\|^k \cdot \|R_0(\lambda)\|_1 \cdot d^{1-k}(\lambda) \quad (33)$$

Тогда из (33) и теоремы 2

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_m} |Tr((BR_0(\lambda))^k)| |d\lambda| \leq \\ & \leq \|B\|^k \cdot \max\{\|R_0(-d_m)\|_1, \|R_0(d_m)\|_1\} \cdot \int_{\Gamma_m} \frac{|d\lambda|}{d^{k-3}(\lambda)} \end{aligned} \quad (34)$$

Оценим интеграл в (34) на части Γ_m , лежащий в первой четверти плоскости (и в остальных частях аналогично). Пусть $\lambda = r \exp i\alpha$. Тогда $d(\lambda) \geq r \sin \alpha$ и на контуре Γ_m $d(\lambda) \geq d_m$. Разобьем дугу окружности на две части: $0 \leq \alpha \leq \alpha_m$ и $\alpha_m \leq \alpha \leq \pi/2$, где α_m выберем ниже. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_m, 0 \leq \alpha \leq \pi/2} \frac{|d\lambda|}{d^{k+1}(\lambda)} = \int_0^{\pi/2} \frac{r_m |e^{i\alpha}| d\alpha}{d^{k-1}(r_m e^{i\alpha})} \leq \\ & \leq \int_0^{\alpha_m} \frac{r_m d\alpha}{d_m^{k-1}} + \int_{\alpha_m}^{\pi/2} \frac{r_m d\alpha}{r_m^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot d^{k-3}} \leq \frac{r_m \cdot \alpha_m}{d_m^{k-1}} + \frac{const}{r_m \cdot \alpha_m \cdot d_m^{k-3}} \end{aligned} \quad (35)$$

Выберем $\alpha_m = \frac{d_m}{r_m}$ и из (35) получим

$$\int_{\Gamma_m} \frac{|d\lambda|}{d^{k-1}(\lambda)} \leq \frac{const}{d_m^{k-2}} \quad (36)$$

Тогда для членов ряда (32) с $k \geq 3$ имеем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} Tr \left(\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \right| \leq \\ & \leq const \cdot \max\{\|R_0(-d_m)\|_1, \|R_0(d_m)\|_1\} \cdot \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\|B\|^k}{d_m^{k-2}} = \\ & = const \cdot \max\{\|R_0(-d_m)\|_1, \|R_0(d_m)\|_1\} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

и теорема 4 будет доказана после оценки второй поправки в следующем параграфе.

Замечание. Если невозмущенный оператор A_0 имеет спектр, который можно сгруппировать в кластеры с равномерно ограниченным числом членов, причём расстояние между членами с максимальным и минимальным номером в кластере так же будет равномерно ограничено и для среднего арифметического этих крайних членов будут выполняться условия (5) и (14), то теорема 4 будет по-прежнему верна. Это следует из того, что описанный оператор отличается от оператора теоремы 4 на ограниченное возмущение.

§ 3. О второй поправке теории возмущений.

Здесь мы предполагаем, что самосопряженный оператор A_0 имеет ядерный обратный и без каких-либо дополнительных ограничений исследуем след второй поправки теории возмущений. Во-первых, определимся в этом случае с контуром интегрирования.

Лемма 5. Пусть A_0 - самосопряженный оператор с ядерной резольventой. Тогда существуют подпоследовательности натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \rightarrow +\infty$ и $\lambda_{-k_m} - \lambda_{-k_m-1} \rightarrow +\infty$.

Доказательство: Предположим (для положительных собственных чисел), что утверждение леммы неверно, т.е. $\exists c > 0$, что $\lambda_{n+1} - \lambda_n < c$ при $n \geq l$. Тогда, очевидно, $\lambda_{N+l} < \lambda_l + N \cdot c$ и $\frac{1}{\lambda_{N+l}} > \frac{1}{\lambda_l + N \cdot c}$, что противоречит сходимости ряда $\sum_{n=l}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n}$. Для отрицательных собственных чисел доказательство аналогично. Лемма доказана.

Выбор контура теперь сделаем так же как и в предыдущем параграфе по подпоследовательностям, определенным леммой 5.

Итак, исследуем второй член ряда в (32):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda)) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(BR_0(\lambda)B\varphi_n, \varphi_n)}{\lambda_n - \lambda} d\lambda \quad (37)$$

Разложим вектор $\psi_n = B\varphi_n$ по базису $\{\varphi_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$:

$$\psi_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\psi_n, \varphi_k) \varphi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (B\varphi_n, \varphi_k) \varphi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{nk} \varphi_k \quad (38)$$

и продолжим равенство (37):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (BR_0(\lambda) b_{nk} \varphi_k, \varphi_n) d\lambda = \\
& = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_{nk} \cdot (B\varphi_k, \varphi_n)}{\lambda_k - \lambda} d\lambda = \\
& = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{(\lambda_n - \lambda)(\lambda_k - \lambda)} d\lambda = \\
& = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda_k = \lambda_n} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{(\lambda_k - \lambda)^2} + \right. \\
& + \left. \sum_{k, n=-\infty, \lambda_k \neq \lambda_n}^{+\infty} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{\lambda_k - \lambda_n} \left(\frac{1}{\lambda_n - \lambda} - \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \right) \right) d\lambda \quad (39)
\end{aligned}$$

Интегрируя (39) по контуру почленно, получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} Tr(BR_0(\lambda) BR_0(\lambda)) d\lambda = \\
& = \sum_{n=-k_m}^{n_m} \left(\sum_{k=n_m+1}^{+\infty} + \sum_{k=-k_m-1}^{-\infty} \right) \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{\lambda_k - \lambda_n} \quad (40)
\end{aligned}$$

Для простоты изложения разобьем ряд (40) на четыре - с различными комбинациями положительных и отрицательных индексов k и n во внешней и внутренней суммах и исследуем их при $m \rightarrow \infty$ по отдельности.

Итак, нас интересует поведение при $m \rightarrow \infty$ выражения

$$\sum_{n=0}^{n_m} \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{\lambda_k - \lambda_n} \quad (41)$$

Рассмотрим внутренний ряд и, используя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=n_m+4}^{+\infty} \frac{|(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)|}{\lambda_k - \lambda_n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \sum_{l=n_m+1}^k |(B\varphi_n, \varphi_l)(\varphi_l, B^*\varphi_n)| \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_n} \right) \leq \\
&\leq \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \|B\|^2 \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_n} \right) = \frac{\|B\|^2}{\lambda_{n_m+1} - \lambda_n}
\end{aligned}$$

и

$$\left| \sum_{n=0}^{n_m} \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{\lambda_k - \lambda_n} \right| \leq \sum_{n=0}^{n_m} \frac{\|B\|^2}{\lambda_{n_m+1} - \lambda_n} \quad (42)$$

Для оценки (42) введём новую последовательность $\hat{\lambda}_n$ следующим соотношением:

$$\frac{n}{\hat{\lambda}_n} = \min_{0 \leq k \leq n} \left\{ \frac{k}{\lambda_k} \right\}. \quad (43)$$

Очевидно, что $\frac{n}{\lambda_n}$ монотонно стремится к нулю, существует подпоследовательность номеров n_m такая, что $\hat{\lambda}_{n_m+1} = \lambda_{n_m+1}$ - это те номера, на которых достигается минимум в (43); непосредственно из (43) следует, что $\frac{1}{\hat{\lambda}_n} \leq \frac{1}{\lambda_n}$ или равносильно $\lambda_n \leq \hat{\lambda}_n$. Так как в соответствии с леммой 1 у последовательности $\hat{\lambda}_n$ расстояние между всеми членами стремится к бесконечности, то без ограничения общности мы можем считать, что выбор подпоследовательности номеров в (42) совпадает с теми, при которых $\hat{\lambda}_{n_m+1} = \lambda_{n_m+1}$. Тогда очевидно имеем

$$\sum_{n=1}^{n_m} \frac{1}{\lambda_{n_m+1} - \lambda_n} \leq \sum_{n=1}^{n_m} \frac{1}{\lambda_{n_m+1} - \hat{\lambda}_n},$$

что стремится к нулю по теореме 1. Остальные слагаемые в (40) оцениваются аналогично и таким образом, интеграл (37) стремится к нулю при $m \rightarrow +\infty$ для любого самосопряженного оператора с ядерной резольвентой. Аналогично, хотя и намного более громоздко, можно оценить и третий член ряда (32); по-видимому, так можно оценить и все члены этого ряда, но это представляется технически нереализуемым, и надо искать другие пути, тем более что оценку каждого члена надо ещё просуммировать в ряде. Тем не менее именно эта оценка привела нас к уверенности в справедливости выдвинутой в начале статьи гипотезы.

Литература

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965 г., 448 с.
2. Лидский В. Б. Несамосопряженные операторы, имеющие след. ДАН СССР, 1959 г., т. 125, № 3, с. 485 - 488.
3. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. ДАН СССР т. 88, 1953, с. 593-596.
4. Дикий Л. А. Об одной формуле Гельфанда-Левитана. УМН, т. 8, вып. 2, 1953, с. 119-123.
5. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций. Функциональный анализ и его прил. т.1, N 2, 1967, с. 52-59
6. Садовничий В. А., Любишкин В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа. ДАН СССР, N 4, т. 256, 1981. с. 794-798.
7. Любишкин В. А. Регуляризованные суммы корней обобщенных квази-полиномов. Мат. сборник, т. 135, вып. 4, 1988, с. 463-472.
8. Дубровский В. В. Формулы регуляризованных следов операторов с компактной резольвентой. Дифф. уравнения, 1990 г., т. 26, № 12, с. 2046 - 2051.
9. Дубровский В. В. Теория возмущений и следы операторов. Дисс. ... доктора физ. - мат. наук. М., 1992 г.
10. Дубровский В. В. Регуляризованный след степени оператора Лапласа с потенциалом на квадрате. Мат. заметки, 1996 г., т. 60, № 1, с. 136 - 138.
11. Садовничий В. А., Дубровский В. В. Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на сфере S^2 . ДАН СССР, т. 319, N 1, 1991. с. 61-62.
12. Подольский В. Е. Формула регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с нечетным потенциалом на сфере S^2 . Мат. заметки, т. 56, вып. 1, 1994, с. 71-77.
13. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972г., 740 с.