

УДК 517.94

Регуляризованный след оператора с ядерной резольвентой, возмущенного ограниченным¹

В. А. Садовничий, С. В. Конягин, В. Е. Подольский

В работе [1] была выдвинута гипотеза: формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=-k_m}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l - (B\varphi_l, \varphi_l)) \right) = 0, \quad (1)$$

где $\{\varphi_n\}$ — базис из собственных векторов оператора A_0 с собственными числами $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ — собственные числа оператора $A_0 + B$, верна в случае, когда оператор A_0 имеет ядерную резольвенту, а оператор B ограничен.

В настоящей работе мы даем положительное решение этой проблемы. Начнем изложение с доказательства одной леммы о числовых рядах.

Лемма. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — последовательность положительных чисел и при этом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\mu_n < +\infty$. Тогда существует последовательность чисел $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, $a_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow \infty$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n - a_m|} \rightarrow 0 \quad (2)$$

при $m \rightarrow \infty$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n: \mu_n < \frac{a}{2}} \frac{1}{|\mu_n - a|} = 0 \quad (3)$$

¹Докл. РАН, 2000, т. 373, №1, с. 26 – 28.

Действительно, $\forall \varepsilon > 0 \exists b_\varepsilon > 0$ такое, что $\sum_{n: \mu_n > b_\varepsilon} 1/\mu_n < \varepsilon$. С другой стороны, для выбранных ε и b_ε найдется число $A > 0$ такое, что для любого числа $a > A$ справедливо неравенство $\sum_{n: \mu_n < b_\varepsilon} 1/|\mu_n - a| < \varepsilon$ в силу того, что слева стоит конечная сумма убывающих по переменной a функций. Выберем теперь $a > 2b_\varepsilon$, и тогда

$$\sum_{n: \mu_n < \frac{a}{2}} \frac{1}{|\mu_n - a|} \leq \sum_{n: \mu_n < b_\varepsilon} \frac{1}{|\mu_n - a|} + \sum_{n: b_\varepsilon \leq \mu_n < \frac{a}{2}} \frac{1}{\mu_n} < 2\varepsilon,$$

поскольку $1/(a - \mu_n) < 1/\mu_n \Leftrightarrow \mu_n < a - \mu_n \Leftrightarrow 2\mu_n < a$ верно при нашем выборе параметров.

Далее, при том же выборе ε и b_ε при $a > b_\varepsilon/2$ имеем для $\mu_n > 2a$ неравенство $1/(\mu_n - a) < 2/\mu_n \Leftrightarrow \mu_n < 2\mu_n - 2a$ и тогда

$$\sum_{n: \mu_n > 2a} 1/|\mu_n - a| \leq \sum_{n: \mu_n > 2a} 2/\mu_n < 2\varepsilon,$$

что эквивалентно соотношению

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n: \mu_n > 2a} \frac{1}{|\mu_n - a|} = 0 \quad (4)$$

Для завершения доказательства леммы нам осталось исследовать поведение суммы $\sum_{n: a/2 < \mu_n < 2a} 1/|\mu_n - a|$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и для каждого натурального k обозначим

$$\alpha_k = \sum_{n: 8^k \leq \mu_n < 8^{k+1}} \frac{1}{\mu_n}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} < +\infty,$$

следовательно, существует k такое, что $k > 1/\varepsilon$ и $\alpha_k < \varepsilon/k$, иначе ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ расходится.

Тогда для этого k имеем

$$\text{card}\{n : 8^k \leq \mu_n < 8^{k+1}\} \leq 8^{k+1} \cdot \alpha_k < \frac{\varepsilon \cdot 8^{k+1}}{k}.$$

Фиксируем теперь $p \in (0, 1)$ и рассмотрим функцию

$F(x) = \sum_{n: 8^k \leq \mu_n < 8^{k+1}} 1/|x - \mu_n|$. Имеем

$$\int_{8^k}^{8^{k+1}} F^p(x) dx \leq \sum_{n: 8^k \leq \mu_n < 8^{k+1}} \int_{8^k}^{8^{k+1}} \frac{dx}{|x - \mu_n|^p} \leq 2 \sum_{n: 8^k \leq \mu_n < 8^{k+1}} \int_0^{8^{k+1}} \frac{du}{u^p} \leq$$

$$\leq \frac{2 \cdot (8^{k+1})^{1-p}}{1-p} \cdot \text{card}\{n : 8^k \leq \mu_n < 8^{k+1}\} \leq \frac{2\varepsilon(8^{k+1})^{2-p}}{k \cdot (1-p)}$$

По интегральной теореме о среднем $\exists a \in [2 \cdot 8^k, 4 \cdot 8^k]$ такое, что

$$\int_{2 \cdot 8^k}^{4 \cdot 8^k} F^p(x) dx = F^p(a) \cdot (4 \cdot 8^k - 2 \cdot 8^k) = 2 \cdot 8^k \cdot F^p(a)$$

и для этого a имеем

$$F^p(a) < \frac{1}{2 \cdot 8^k} \int_{8^k}^{8^{k+1}} F^p(x) dx \leq \frac{8\varepsilon \cdot (8^{k+1})^{1-p}}{k(1-p)}.$$

Пусть теперь $p = 1 - 1/k + 1$, и тогда

$$F^p(a) \leq \frac{64\varepsilon(k+1)}{k} < 128\varepsilon.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ мы нашли число a такое, что $a > 8^k > 8^{1/\varepsilon}$ и

$$\sum_{n: \frac{a}{2} \leq \mu_n \leq 2a} \frac{1}{|\mu_n - a|} \leq \sum_{n: 8^k \leq \mu_n \leq 8^{k+1}} \frac{1}{|\mu_n - a|} = F(a) < (128\varepsilon)^{\frac{1}{p}},$$

что означает

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \inf_a \sum_{n: \frac{a}{2} \leq \mu_n \leq 2a} \frac{1}{|\mu_n - a|} = 0. \quad (5)$$

Следовательно, из (3), (4), (5) следует утверждение леммы.

Основной результат настоящей работы заключен в следующей теореме.

Теорема. Пусть A_0 — самосопряженный оператор с ядерной резольвентой, $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ — собственные числа оператора A_0 , занумерованные в порядке возрастания, B — ограниченный в H оператор и $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ — собственные числа оператора $A_0 + B$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей. Существуют подпоследовательности натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=-k_m}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l - (B\varphi_l, \varphi_l)) \right) = 0$$

где $\{\varphi_n\}$ — базис из собственных векторов оператора A_0 .

Доказательство. Занумеруем $\{\lambda_n\}$ следующим образом: $\lambda_0 > 0$, $\lambda_{-1} < 0$. Далее, подпоследовательность $\{n_m\}_{n=1}^{\infty}$ выберем так что определенная по лемме для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\lambda_n$ последовательность $\{a_m\}$ будет удовлетворять неравенству $\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_m+1}$, и выберем аналогично последовательность $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ для ряда $\sum_{n=-\infty}^{n=-1} 1/(-\lambda_n)$ (соответствующую последовательность чисел в данном случае будем обозначать a_{-m}). Теперь определим следующую систему контуров Γ_m на комплексной плоскости. Контур Γ_m составим из полуокружности с радиусом a_m в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$, полуокружности с радиусом a_{-m} в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$ и двух вертикальных отрезков мнимой оси, соединяющих эти полуокружности. Ясно, что внутри контуров Γ_m количество собственных чисел операторов A_0 и A совпадает при m таких, что $a_m - \lambda_m > \|B\|$ и $\lambda_{-m} - a_{-m} > \|B\|$.

Прежде чем перейти непосредственно к доказательству теоремы, уточним нумерацию $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, которой будем пользоваться. Сверх уже введенного условия возрастания действительных частей последовательностей $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ потребуем, чтобы использованные подмножества целых чисел для их нумерации в каждом контуре Γ_m совпадали.

Для доказательства теоремы заметим, что

$$\sum_{l=-k_m}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \operatorname{Tr}(R_0(\lambda) - R(\lambda)) d\lambda \quad (6)$$

и исследуем правую часть этого равенства.

Для пары операторов A_0 и $A_0 + B$ таких, что $BR_0(\lambda)$ — ядерный, можно ввести так называемый определитель возмущения [2]:

$$D_{A/A_0}(\lambda) = \operatorname{Det}[(A - \lambda I) \cdot (A_0 - \lambda I)^{-1}] = \operatorname{Det}[I + BR_0(\lambda)]$$

Нам потребуются два хорошо известных (см. [2]) соотношения для этого определителя:

$$\operatorname{Tr}(R_0(\lambda) - R(\lambda)) = \frac{d}{d\lambda} (\ln D_{A/A_0}(\lambda)), \quad \ln D_{A/A_0}(\lambda) = \operatorname{Tr} \ln(I + BR_0(\lambda)). \quad (7)$$

Второе равенство используется нами в форме степенного ряда для логарифма, что справедливо при $\|BR_0(\lambda)\| < 1$, а это выполнено в нашем случае при $\lambda \in \Gamma_m$ и достаточно большом m .

Используя (7) нетрудно получить, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \operatorname{Tr}(R_0(\lambda) - R(\lambda)) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} \ln(I + BR_0(\lambda)) d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} \left[\text{Tr}(BR_0(\lambda)) + \text{Tr} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) \right] d\lambda \quad (8)$$

Рассмотрим отдельно вложение для $\text{Tr}(BR_0(\lambda))$. Так как $BR_0(\lambda)$ — ядерный, то его след может быть вычислен как матричный в любом ортонормированном базисе и при этом:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda)) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_n \frac{(B\varphi_n, \varphi_n)}{\lambda_n - \lambda} d\lambda = - \sum_{n=-k_m}^{n_m} (B\varphi_n, \varphi_n). \quad (9)$$

Таким образом, равенство (6) с учетом (8) и (9) записывается в виде

$$\sum_{l=-k_m}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l - (B\varphi_l, \varphi_l)) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \quad (10)$$

Теперь необходимо оценить члены ряда (10) при $k \geq 2$. Заметим, что $\|R_0(\lambda)\| = d^{-1}(\lambda)$, где $d(\lambda)$ — расстояние от точки $\lambda \in C$ до спектра оператора A_0 . Запишем оценку (используемые свойства следа ядерного оператора см. в [2])

$$\begin{aligned} |\text{Tr}((BR_0(\lambda))^k)| &\leq \|BR_0(\lambda)\|^{k-1} \cdot \|B\| \cdot \|R_0(\lambda)\|_1 = \\ &= \|B\|^k \cdot \|R_0(\lambda)\|_1 \cdot d^{1-k}(\lambda) \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда из (11) получим, что

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_m} |\text{Tr}((BR_0(\lambda))^k)| d\lambda \leq \\ &\leq \|B\|^k \cdot \max\{\|R_0(a_{-m})\|_1, \|R_0(a_m)\|_1\} \cdot \int_{\Gamma_m} \frac{|d\lambda|}{d^{k-1}(\lambda)} \end{aligned} \quad (12)$$

Воспользуемся оценкой интеграла в (12) из работы [1]:

$$\int_{\Gamma_m} \frac{|d\lambda|}{d^{k-1}(\lambda)} \leq \frac{\text{const}}{(\min\{a_m - \lambda_m, \lambda_{-m} - a_{-m}\})^{k-2}} \quad (13)$$

Суммируя эту оценку для членов ряда (10) с $k \geq 2$, имеем неравенство

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \right| \leq$$

$$\leq C \cdot \max\{\|R_0(a_{-m})\|_1, \|R_0(a_m)\|_1\}.$$

Осталось заметить, что $\|R_0(a_m)\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - a_m|}$ и правая часть в выражении выше по лемме стремиться к нулю при $m \rightarrow +\infty$, откуда и следует утверждение теоремы.

В заключение укажем на ряд содержательных примеров приложения доказанной теоремы. Все условия теоремы выполнены для самосопряженного эллиптического псевдодифференциального оператора на компактном многообразии, возмущенного оператором умножения на ограниченную измеримую комплекснозначную функцию, если только порядок оператора больше размерности многообразия. Например, в известной задаче для степени оператора Лапласа на квадрате формула (1) ранее была известна для степени оператора $\alpha > 53/40$ и доказательство опиралось на тонкие результаты теории чисел, из доказанной теоремы следует, что в этом случае она верна для $\alpha > 1$. Весьма важен также пример дифференциального оператора — второй степени оператора Лапласа на трехмерном параллелепипеде. Подробному доказательству полученных результатов и изучению важнейших примеров мы посвятим отдельную работу.

Литература

1. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Регуляризованный след ограниченного возмущения оператора с ядерной резольвентой. Дифференциальные уравнения, 1999, т.35, N 4, с. 556-564
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965 г., 448 с.