УДК 517.984.5

Следы операторов с относительно компактным возмущением[1]

В. А. Садовничий, В. Е. Подольский

Данная работа продолжает цикл исследований, начатый работами [1, 2], в которых проводились исследования регуляризованных следов абстрактных дискретных операторов и было доказано, что если A_0 — самосопряженный оператор с ядерной резольвентой, $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ — собственные числа оператора A_0, занумерованные в порядке возрастания, B — ограниченный в $\mathcal{H}$ оператор и $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ — собственные числа оператора $A_0 + B$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей то существуют подпоследовательности натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что верна формула

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{l=-k_m}^{n_m}(\mu_l - \lambda_l - (B\varphi_l, \varphi_l))\right) = 0 \tag{1}$$

где $\{\varphi_n\}$ — базис из собственных векторов оператора A_0.

Регуляризованные следы дискретных операторов в абстрактной постановке изучались с конца 70–х годов, пионерской здесь была работа [3]. Наиболее сильный результат для конечномерных возмущений был получен в [4], где были охвачены некоторые классы неограниченных возмущений. Центральным направлением было исследование следов возмущений самосопряжённых операторов с заданным поведением собственных чисел $\lambda_n \sim cn^{\alpha}$, здесь наиболее сильные результаты были получены в работе [5], в которой при $\alpha > 1$ для ограниченного возмущения в зависимости от α и порядка следа было указано количество поправок теории возмущений, которые необходимо учесть при получении формул следа, в частности, формула (1) была доказана при $\alpha \geqslant 2$, а для возмущения типа Гильберта – Шмидта формула (1)

[1]Матем. сб., 2002, т. 193, №2, с. 129 – 152.

была доказана при $\alpha = 1$. В ряде работ были получены более точные (по сравнению с [5]) формулы за счёт более детальных предположений о спектре невозмущённого оператора — либо предполагалась дополнительно известной оценка остатка в асимптотической формуле для собственных чисел, либо делались предположения об особой регулярности их распределения. Среди последних выделим работу [6]. Заслуживает внимания и работа Лакса [7], в которой (к сожалению, без строгих доказательств) автор предложил оригинальный метод вычисления следов, основанный на известном по его работам в теории обратных задач методе дифференцирования семейства операторов по внешнему параметру. Наконец, упомянем работу [8], в которой получен регуляризованный след для неядерного интегрального оператора. Это единственный известный нам результат такого рода, и эта задача нашими рассмотрениями не охватывается.

В настоящей работе мы рассматриваем более общую[2] по сравнению с [2] задачу, в которой возмущающий оператор B подчинен оператору A_0 в том смысле, что BA_0^{-1} — компактный оператор, принадлежащий некоторому классу Шаттена — фон Неймана конечного порядка. Здесь существенно различаются два случая: является ли резольвента оператора A_0 ядерной или нет, и мы предъявляем пять теорем, охватывающих различные варианты подчинения операторов и структуры спектра невозмущенного оператора. Эти результаты анонсированы нами в [10], однако теоремы 3 и 5 здесь заметно усилены.

Первые две теоремы посвящены случаю ядерности оператора A_0^{-1}, при этом оператор B предполагается, вообще говоря, неограниченным. В теории регуляризованных следов дискретных операторов случай неограниченного возмущения исследован мало, целостное и законченное исключение здесь составляют лишь результаты для регулярных дифференциальных операторов, да и то условно, так как основной в данном разделе теории метод работы [11] опирается на теорию функций и не нуждается в структурировании оператора на невозмущённый и возмущение.

Две последние теоремы строго ограничены случаем, в котором оператор A_0^{-1} — компактный, но неядерный (впрочем, теорема 4 включает в себя при $\delta = 0$ основную теорему работы [2]). Этот случай до сих пор рассматривался в литературе лишь для некоторых конкретных операторов, обладающих специальной структурой спектра, наиболее полные и интересные результаты получены для оператора

[2]В 1999 году в работе [9] анонсированы теоремы, частично перекрывающие работу [2], или, что тоже самое, частный случай теоремы 1 настоящей работы для $\delta = 0$, а также часть теоремы 3 настоящей работы (только случай $p = 2$)

Лапласа – Бельтрами на симметрических пространствах ранга 1 в работах [12, 13]. Ещё в этом контексте упомянем исследования возмущённого гармонического осциллятора, см., например [14] и там дальнейшие ссылки. Фундаментальная причина малоизученности этого случая заключается в том, что в общем положении расстояние между собственными числами невозмущённого оператора, вообще говоря, не ограничено снизу. Это обстоятельство отразилось и на результатах нашей работы, являясь главной причиной несимметричности формулировок теорем 4 и 5 формулировкам теорем 1 и 2 соответственно, хотя на первый взгляд подобная симметрия должна присутствовать. Сгущение спектра оператора A_0 привносит дополнительные трудности и в доказательства этих теорем.

Третья теорема является, на наш взгляд, своего рода связующим звеном между этими случаями. Здесь от невозмущённого оператора требуется наличие неограниченно возрастающих лакун в спектре, при этом никаких условий на порядок оператора не накладывается. Мы отнесли эту теорему в один раздел со случаем неядерности резольвенты A_0, так как здесь разбирается случай возмущения $B \in \mathfrak{S}_p$. Результаты трех последних теорем является новыми даже для случая принадлежности возмущения классу Гильберта – Шмидта, так как известные результаты работ [15, 16, 17], посвящённых обобщению формулы следа Крейна на случай возмущения типа Гильберта – Шмидта, не охватывают нашего результата ни по классу функций от операторов, рассмотренных в этих работах, ни по возможной у нас несамосопряжённости возмущения.

Доказанные нами теоремы для абстрактных операторов позволяют получать новые результаты для обширных классов конкретных операторов математической физики, и в конце работы мы поместили ряд примеров подобных приложений. Выделим среди них впервые полученную формулу регуляризованного следа для оператора в частных производных, возмущённого так же оператором в частных производных.

1. Обозначения и предварительные сведения.

На протяжении работы все рассматриваемые операторы действуют в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, через $\mathcal{D}(\cdot) \subset \mathcal{H}$ обозначается область определения оператора. Через A_0 мы будем обозначать самосопряженный положительный дискретный оператор, его дробные степени также положительные операторы, определяемые по спектральной теореме, через $R_0(\lambda)$ всегда обозначается резольвента оператора A_0, через $\{\lambda_n\}_{n=0}^{+\infty}$ — его собственные числа, занумерованные в порядке возрастания, через $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ — базис из его собственных векторов. Через B мы всегда обозначаем возмущающий оператор, через $\{\mu_n\}_{n=0}^{+\infty}$ — собственные числа оператора $A_0 + B$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей, через $R(\lambda)$ — его резольвенту.

Подчеркнём, что условие положительности оператора A_0 непринципиально и введено лишь для сокращения формулировок и технической части доказательств. Если самосопряженный оператор A_0 таков, что для его модуля $|A_0|$ верна какая–либо из доказанных в работе теорем, то эта же теорема верна и для самого оператора. Формулы следов при этом приобретают "двусторонний" вид подобно формуле (1).

Компактные операторы, сингулярные числа которых образуют сходящийся ряд $\sum s_n^p$ при некотором $p > 0$, мы традиционно обозначаем $\mathfrak{S}_p$ — это множество операторов при $p \geqslant 1$ образует симметрично–нормированный идеал в алгебре всех компактных операторов с нормой $\|\cdot\|_p = \left(\sum s_n^p\right)^{1/p}$. При $p = 1$ эта норма называется ядерной нормой операторов, при $p = 2$ — нормой Гильберта — Шмидта или абсолютной нормой.

На протяжении всей работы одним и тем же символом c обозначаются **различные** положительные константы, не зависящие от основных переменных встречающихся неравенств.

Лемма 1. *Для любых чисел a, $b > 0$, $a \neq b$ и для любых δ, $\varepsilon \in [0,1]$, $\delta + \varepsilon \leqslant 1$ верно*

$$\left|\frac{a^\delta b^\varepsilon (a^{1-\delta-\varepsilon} - b^{1-\delta-\varepsilon})}{a-b}\right| \leqslant 1 \tag{2}$$

Доказательство. Пусть для определённости $a > b$. Тогда

$$a^\delta b^\varepsilon \left(a^{1-\delta-\varepsilon} - b^{1-\delta-\varepsilon}\right) \leqslant a-b \Leftrightarrow a^{1-\delta-\varepsilon} - b^{1-\delta-\varepsilon} \leqslant a^{1-\delta}b^{-\varepsilon} - b^{1-\varepsilon}a^{-\delta} \Leftrightarrow$$

$$b^{1-\varepsilon}a^{-\delta} - b^{1-\delta-\varepsilon} \leqslant a^{1-\delta}b^{-\varepsilon} - a^{1-\delta-\varepsilon} \Leftrightarrow b^{1-\varepsilon}\left(a^{-\delta} - b^{-\delta}\right) \leqslant a^{1-\delta}\left(b^{-\varepsilon} - a^{-\varepsilon}\right)$$

и мы получили слева отрицательное число, а справа положительное. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любых чисел $a > b > 0$ и для любого $\delta > 0$ верно*

$$\frac{1}{a-b} \leqslant \frac{(\delta+1)a^\delta}{a^{1+\delta} - b^{1+\delta}}, \tag{3}$$

Доказательство. Неравенство (3) эквивалентно неравенству

$$a^{1+\delta} - -b^{1+\delta} \leqslant (\delta+1)a^{\delta+1} - (\delta+1)a^{\delta}b$$

или

$$(\delta+1) \leqslant \delta\frac{a}{b} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\delta}.$$

Заметим, что функция $\delta x + 1/x^{\delta}$ при $\delta > 0$ и $x > 0$ имеет минимум в точке $x = 1$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть оператор B таков, что $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(B)$ и существует $\delta \in \mathbb{R}$ такое, что оператор $BA_0^{-\delta}$ продолжается до ограниченного. Предположим также, что существует подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \geqslant c\lambda_{n_m+1}^{\rho}$, где $\rho > \delta$. Тогда существует последовательность действительных чисел $\{a_m\}$, $\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_m+1}$ такая, что внутри окружностей с центром в нуле и радиуса a_m содержится одинаковое количество собственных чисел операторов A_0 и $A_0 + B$.*

Доказательство. Используем следующее известное равенство для резольвент операторов:

$$R(\lambda) = R_0(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(BR_0(\lambda)\right)^k = R_0(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(BA_0^{-\delta}A_0^{\delta}R_0(\lambda)\right)^k \tag{4}$$

и стандартную оценку (см., например, [18])

$$\|A_0^{\delta}R_0(\lambda)\| \leqslant \max_{1\leqslant k<\infty}\frac{\lambda_k^{\delta}}{|\lambda_k - \lambda|}.$$

Из последней оценки мы немедленно получаем, что при $|\lambda| = a_m$ и $|\lambda_{n_m+1} - a_m| \geqslant c\lambda_{n_m+1}^{\rho}$, $|\lambda_{n_m} - a_m| \geqslant c\lambda_{n_m+1}^{\rho}$ верно

$$\max_{|\lambda|=a_m}\left\|A_0^{\delta}R_0(\lambda)\right\| \leqslant c\lambda_{n_m+1}^{\delta-\rho}$$

и тогда

$$\max_{|\lambda|=a_m}\left\|\left(BA_0^{-\delta}A_0^{\delta}R_0(\lambda)\right)^k\right\| \leqslant c^k\left\|BA_0^{-\delta}\right\|^k a_m^{-k(\rho-\delta)}, \tag{5}$$

и так как $\rho > \delta$, то ряд (4) сходится при $a_m^{\rho-\delta} > c\left\|BA_0^{-\delta}\right\|$ и следовательно, все λ, такие что $|\lambda| = a_m$, принадлежат его резольвентному множеству. Сделанные предположения об операторах A_0 и B позволяют говорить о семействе операторов $A_0 + \tau B$ как о голоморфном семействе типа "A" [18, гл. VII] и результаты аналитической теории возмущений [18] говорят, что собственные числа семейства операторов $A_0 + \tau B$ во всяком случае являются непрерывными функциями параметра τ, и так как все сделанные рассуждения верны и для возмущения τB при $\tau \in [0,1]$, то все рассматриваемые λ остаются в резольвентном множестве этого семейства при всех $\tau \in [0,1]$ и следовательно, собственные числа семейства операторов $A_0 + \tau B$ не пересекают контура Γ_m при $\tau \in [0,1]$. Лемма доказана.

В работе [2] доказана следующая

Лемма 4. *Пусть* $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *— последовательность положительных чисел и при этом* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n < +\infty$. *Тогда существует последовательность чисел* $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}, a_m \to +\infty$ *при* $m \to \infty$ *такая, что*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|b_n - a_m|} = 0.$$

2. $\mathbf{R}_0(\lambda)$ — ядерный оператор.

Во всем разделе оператор $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_1$.

Теорема 1. *Пусть оператор* B *таков, что* $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(B)$, *существует число* $\delta \in [0,\, 1)$ *такое, что оператор* $BA_0^{-\delta}$ *продолжается до ограниченного, и некоторое число* $\omega \in [0,\, 1)$, $\omega + \delta < 1$ *такое, что* $A_0^{-(1-\delta-\omega)}$ *— ядерный оператор. Тогда существует подпоследовательность натурального ряда* $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ *и последовательность контуров* $\Gamma_m \in \mathbb{C}$ *такая, что при* $\omega \geqslant \delta/l$ *верна формула*

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \sum_{k=1}^{l} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \operatorname{Tr}\left((BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \right) = 0. \tag{6}$$

В частности, при $\omega \geqslant \delta$ *верна формула*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j - (B\varphi_j, \varphi_j)) = 0.$$

Доказательство теоремы[3] начнём со следующей леммы.

Лемма 5. *Существует бесконечно большая последовательность положительных чисел* a_m *такая, что* $\|BR_0(a_m)\|_1 = o(a_m^{-\omega})$ *при* $m \to \infty$.

[3]Отметим, что теорема включает в себя при $\delta = \omega = 0$ теорему работы [2].

Доказательство. Для оценки $\|BR_0(a_m)\|_1$ воспользуемся следующим неравенством Стайнспринга [19, стр. 125]

$$\|A\|_1 \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \|A\chi_j\|,$$

где $\{\chi_j\}_{j=0}^{\infty}$ — произвольный ортонормированный базис пространства. Тогда

$$\|BR_0(\lambda)\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (BR_0(\lambda)\varphi_k, BR_0(\lambda)\varphi_k)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B\varphi_k, B\varphi_k)^{\frac{1}{2}}}{|\lambda_k - \lambda|} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(BA_0^{-\delta}\varphi_k, BA_0^{-\delta}\varphi_k\right)^{\frac{1}{2}} \lambda_k^{\delta}}{|\lambda_k - \lambda|} \leqslant \|BA_0^{-\delta}\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^{\delta}}{|\lambda_k - |\lambda||} \tag{7}$$

Применяя (2) к неравенству (7), имеем

$$\|BR_0(\lambda)\|_1 \leqslant \|BA_0^{-\delta}\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^{\delta}}{\lambda_k^{\delta} |\lambda|^{\omega} \left|\lambda_k^{1-\delta-\omega} - |\lambda|^{1-\delta-\omega}\right|} =$$

$$= \frac{\|BA_0^{-\delta}\|}{|\lambda|^{\omega}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left|\lambda_k^{1-\delta-\omega} - |\lambda|^{1-\delta-\omega}\right|} \tag{8}$$

Сходимость ряда здесь обеспечена ядерностью оператора $A_0^{-(1-\delta-\omega)}$.

Воспользуемся далее результатом леммы 4 и выберем последовательность $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ так, что бы

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left|\lambda_k^{1-\delta-\omega} - a_m^{1-\delta-\omega}\right|} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

и тогда из (8) следует

$$\|BR_0(a_m)\|_1 = o(a_m^{-\omega}) \tag{9}$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы. Определим систему контуров Γ_m на комплексной плоскости как систему окружностей с центрами в нуле и радиусами $\{a_m\}$. Из леммы 3 и оценок леммы 5 немедленно следует, что внутри контуров Γ_m количество собственных чисел операторов A_0 и $A_0 + B$ совпадает при всех достаточно больших m.

Для доказательства теоремы заметим, что

$$\sum_{l=0}^{n_m}(\mu_l - \lambda_l) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} \lambda \operatorname{Tr}(R_0(\lambda) - R(\lambda))\, d\lambda \tag{10}$$

и исследуем правую часть этого равенства.

Для пары операторов A_0 и $A_0 + B$ таких, что $BR_0(\lambda)$ — ядерный, можно ввести так называемый определитель возмущения [19][4]:

$$D_{A/A_0}(\lambda) = \det[(A - \lambda I)\cdot(A_0 - \lambda I)^{-1}] = \det[I + BR_0(\lambda)]$$

Нам потребуюся два хорошо известных (см. [19]) соотношения для этого определителя:

$$\operatorname{Tr}(R_0(\lambda) - R(\lambda)) = \frac{d}{d\lambda}(\ln D_{A/A_0}(\lambda)),\ \ln D_{A/A_0}(\lambda) = \operatorname{Tr}\ln(I + BR_0(\lambda)). \tag{11}$$

Второе равенство мы будем использовать в форме степенного ряда для логарифма, что справедливо при $||BR_0(\lambda)|| < 1$, а это выполнено в нашем случае при $\lambda \in \Gamma_m$ и достаточно большом m (см. (5)).

Из (10) интегрированием по частям с использованием формул (11) получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} \lambda \operatorname{Tr}(R_0(\lambda) - R(\lambda))\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} \operatorname{Tr}\ln(I + BR_0(\lambda))\, d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\left[\operatorname{Tr}(BR_0(\lambda)) + \operatorname{Tr}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(BR_0(\lambda))^k\right)\right] d\lambda \tag{12}$$

Рассмотрим отдельно слагаемое с $\operatorname{Tr}(BR_0(\lambda))$. Так как $BR_0(\lambda)$ — ядерный, то его след может быть вычислен как матричный в любом ортонормированном базисе и при этом:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} \operatorname{Tr}(BR_0(\lambda))\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\sum_n \frac{(B\varphi_n, \varphi_n)}{\lambda_n - \lambda}\, d\lambda = -\sum_{n=0}^{n_m}(B\varphi_n, \varphi_n). \tag{13}$$

[4]Строго говоря, в [19] рассматриваются определители возмущения для ограниченных операторов, но эти результаты монографии переносятся на неограниченные операторы практически без изменений в доказательствах, см., например, [20]. Мы сохраняем ссылку на [19] как более корректную исторически.

Таким образом, равенство (10) с учетом (12) и (13) записывается в виде

$$\sum_{l=0}^{n_m}(\mu_l-\lambda_l-(B\varphi_l,\varphi_l))=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\operatorname{Tr}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(BR_0(\lambda))^k\right)d\lambda \tag{14}$$

Теперь необходимо оценить члены ряда (14) при $k\geqslant 2$, и во-первых с помощью (2) оценим норму оператора $BR_0(\lambda)$:

$$\max_{\lambda\in\Gamma_m}\|BR_0(\lambda)\|\leqslant\|BA_0^{-\delta}\|\cdot\max_{\lambda\in\Gamma_m}\left(\max_n\frac{\lambda_n^\delta}{|\lambda_n-\lambda|}\right)\leqslant$$

$$\leqslant c\max_n\frac{\lambda_n^\delta}{|\lambda_n-a_m|}\leqslant c\max_n\frac{1}{\left|\lambda_n^{1-\delta}-a_m^{1-\delta}\right|}=\frac{c}{a_m^{1-\delta}-\lambda_{n_m}^{1-\delta}}. \tag{15}$$

Здесь $\{\lambda_{n_m}\}$ — та подпоследовательность собственных чисел, для которой $\lambda_{n_m}<a_m<\lambda_{n_m+1}$, и без ограничения общности мы полагаем, что ближайшим к a_m является λ_{n_m}.

Запишем оценку (используемые свойства следа ядерного оператора см. в [19])

$$|\operatorname{Tr}((BR_0(\lambda))^k)|\leqslant\|BR_0(\lambda)\|^{k-1}\cdot\|BR_0(\lambda)\|_1 \tag{16}$$

Тогда из (16) получим, что

$$\int\limits_{\Gamma_m}|\operatorname{Tr}((BR_0(\lambda))^k)||d\lambda|\leqslant\max_{\lambda\in\Gamma_m}\|BR_0(\lambda)\|_1\cdot\int\limits_{\Gamma_m}\|BR_0(\lambda)\|^{k-1}|d\lambda| \tag{17}$$

Оценим интеграл в (17) при $k\geqslant 3$ на дуге $0\leqslant\arg\lambda\leqslant\pi/2$, на остальных дугах аналогично:

$$\int\limits_0^{\pi/2}\|BR_0(a_me^{i\varphi})\|^{k-1}a_m\left|e^{i\varphi}\right|d\varphi\leqslant c^{k-1}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\lambda_{n_m}^\delta}{|\lambda_{n_m}-a_me^{i\varphi}|}\right)^{k-1}a_m\,d\varphi=$$

$$=c^{k-1}\lambda_{n_m}^{\delta(k-1)}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{a_m\,d\varphi}{|\lambda_{n_m}-a_me^{i\varphi}|^{k-1}} \tag{18}$$

Так как $\left|\lambda_{n_m}-a_me^{i\varphi}\right|\geqslant|\lambda_{n_m}-a_m|$ и $\left|\lambda_{n_m}-a_me^{i\varphi}\right|\geqslant a_m\sin\varphi$, то из (18) имеем

$$\int\limits_0^{\pi/2}\|BR_0(a_me^{i\varphi})\|^{k-1}a_m\left|e^{i\varphi}\right|d\varphi\leqslant c^{k-1}\lambda_{n_m}^{\delta(k-1)}\left(\int\limits_0^{\varphi_m}\frac{a_m\,d\varphi}{|\lambda_{n_m}-a_m|^{k-1}}+\right.$$

$$+\int\limits_{\varphi_m}^{\pi/2}\frac{a_m\,d\varphi}{|\lambda_{n_m}-a_m|^{k-3}a_m^2\sin^2\varphi}\Bigg)\leqslant c^{k-1}\lambda_{n_m}^{\delta(k-1)}\left(\frac{a_m\varphi_m}{|\lambda_{n_m}-a_m|^{k-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{c}{|\lambda_{n_m}-a_m|^{k-3}a_m\varphi_m}\right)\leqslant\frac{c^k\lambda_{n_m}^{\delta(k-1)}}{|\lambda_{n_m}-a_m|^{k-2}},$$

здесь в последнем неравенстве сделан выбор $\varphi_m=\frac{|\lambda_{n_m}-a_m|}{a_m}$. И, применяя неравенство (2), окончательно имеем

$$\int\limits_{\Gamma_m}\|BR_0(\lambda)\|^{k-1}|d\lambda|\leqslant\frac{c^k\lambda_{n_m}^{\delta}}{\left(a_m^{1-\delta}-\lambda_{n_m}^{1-\delta}\right)^{k-2}}\tag{19}$$

Тогда для остатка ряда (14) при $l\geqslant 3$ с учетом (19), (2) и (9) имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\mathrm{Tr}\left(\sum_{k=l}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(BR_0(\lambda))^k\right)d\lambda\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|BR_0(a_m)\|_1\int\limits_{\Gamma_m}\sum_{k=l}^{\infty}\|(BR_0(\lambda))^{k-1}\|\,\|d\lambda\|\leqslant$$

$$\leqslant\|BR_0(a_m)\|_1\lambda_{n_m}^{\delta}\sum_{k=l}^{\infty}\left(\frac{c}{\left(a_m^{1-\delta}-\lambda_{n_m}^{1-\delta}\right)}\right)^{k-2}\leqslant\frac{\lambda_{n_m}^{\delta}\|BR_0(a_m)\|_1}{\left(a_m^{1-\delta}-\lambda_{n_m}^{1-\delta}\right)^{l-2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\lambda_{n_m}^{\delta-\omega(l-2)}\|BR_0(a_m)\|_1}{\left(a_m^{1-\delta-\omega}-\lambda_{n_m}^{1-\delta-\omega}\right)^{l-2}}=o(\lambda_{n_m}^{\delta-\omega(l-1)})\tag{20}$$

Оценить аналогично вторую поправку нельзя: при $k=2$ оценка части интеграла (17) в пределах $\varphi_m\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ содержит в знаменателе отрицательную степень. Проведём оценку этого слагаемого ряда (14) непосредственно.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\mathrm{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda))\,d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(BR_0(\lambda)B\varphi_n,\varphi_n)}{\lambda_n-\lambda}\,d\lambda\tag{21}$$

Разложим вектор $\psi_n=B\varphi_n$ по базису $\{\varphi_k\}_{k=0}^{+\infty}$:

$$\psi_n=\sum_{k=0}^{\infty}(\psi_n,\varphi_k)\varphi_k=\sum_{k=0}^{+\infty}(B\varphi_n,\varphi_k)\varphi_k=\sum_{k=0}^{+\infty}b_{nk}\varphi_k$$

и продолжим равенство (21):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_n-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}(BR_0(\lambda)b_{nk}\varphi_k,\varphi_n)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_n-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b_{nk}(B\varphi_k,\varphi_n)}{\lambda_k-\lambda}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(B\varphi_n,\varphi_k)(B\varphi_k,\varphi_n)}{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_k-\lambda)}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\lambda_k=\lambda_n}\frac{(B\varphi_n,\varphi_k)(B\varphi_k,\varphi_n)}{(\lambda_k-\lambda)^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k,n=0,\lambda_k\neq\lambda_n}^{+\infty}\frac{(B\varphi_n,\varphi_k)(B\varphi_k,\varphi_n)}{\lambda_k-\lambda_n}\left(\frac{1}{\lambda_n-\lambda}-\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\right)\right)d\lambda \tag{22}$$

Интегрируя (22) по контуру почленно, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\mathrm{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda))\,d\lambda=\sum_{n=0}^{n_m}\sum_{k=n_m+1}^{+\infty}\frac{(B\varphi_n,\varphi_k)(B\varphi_k,\varphi_n)}{\lambda_k-\lambda_n} \tag{23}$$

Рассмотрим внутренний ряд и, используя неравенство (2) и преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=n_m+1}^{+\infty}\frac{|(B\varphi_n,\varphi_k)(B\varphi_k,\varphi_n)|}{\lambda_k-\lambda_n}=$$

$$=\sum_{k=n_m+1}^{+\infty}\frac{\lambda_n^\delta\lambda_k^\delta|(BA_0^{-\delta}\varphi_n,\varphi_k)(BA_0^{-\delta}\varphi_k,\varphi_n)|}{\lambda_k-\lambda_n}\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_n^\delta\sum_{k=n_m+1}^{+\infty}\frac{|(BA_0^{-\delta}\varphi_n,\varphi_k)(BA_0^{-\delta}\varphi_k,\varphi_n)|}{\lambda_k^{1-\delta}-\lambda_n^{1-\delta}}=$$

$$=\lambda_n^\delta\sum_{k=n_m+1}^{\infty}\sum_{l=n_m+1}^{k}|(BA_0^{-\delta}\varphi_n,\varphi_l)(\varphi_l,(BA_0^{-\delta})^*\varphi_n)|\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\lambda_k^{1-\delta}-\lambda_n^{1-\delta}}-\frac{1}{\lambda_{k+1}^{1-\delta}-\lambda_n^{1-\delta}}\right)\leqslant\lambda_n^\delta\sum_{k=n_m+1}^{\infty}\|BA_0^{-\delta}\|^2\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\lambda_k^{1-\delta}-\lambda_n^{1-\delta}}-\frac{1}{\lambda_{k+1}^{1-\delta}-\lambda_n^{1-\delta}}\right)=\frac{\lambda_n^\delta\|BA_0^{-\delta}\|^2}{\lambda_{n_m+1}^{1-\delta}-\lambda_n^{1-\delta}}$$

и тогда из (23), вновь применяя (2), получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\mathrm{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda))\,d\lambda\right|=\left|\sum_{n=0}^{n_m}\sum_{k=n_m+1}^{+\infty}\frac{(B\varphi_n,\varphi_k)(B\varphi_k,\varphi_n)}{\lambda_k-\lambda_n}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{n_m}\frac{\lambda_n^\delta\|BA_0^{-\delta}\|^2}{\lambda_{n_m+1}^{1-\delta}-\lambda_n^{1-\delta}}\leqslant\lambda_{n_m}^{\delta-\omega}\sum_{n=0}^{n_m}\frac{\|BA_0^{-\delta}\|^2}{\lambda_{n_m+1}^{1-\delta-\omega}-\lambda_n^{1-\delta-\omega}},\tag{24}$$

и так как $\lambda_{n_m+1}^{1-\delta-\omega}>a_m^{1-\delta-\omega}$, то по лемме 4 сумма в (24), как часть ядерной нормы резольвенты оператора $A_0^{1-\delta-\omega}$, стремиться к нулю. Таким образом, из (24)

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\mathrm{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda))\,d\lambda\right|=o(\lambda_{n_m}^{\delta-\omega}),$$

и оценка (20) верна при $l\geqslant 2$. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что при $\omega\geqslant\delta/l$ в силу (20) стремится к нулю остаток ряда из правой части (14), начинающийся с слагаемого с номером $l+1$, и перенося остальные слагаемые в (14) вправо, мы получаем формулу (6). Теорема доказана.

Далее мы рассмотрим случай принадлежности оператора BA_0^{-1} классу Шаттена — фон Неймана $\mathfrak{S}_p$ при некотором натуральном $p>1$. В этом случае для операторов A_0 и A_0+B можно ввести регуляризованный определитель возмущения [19]

$$D_p(\lambda)=\det\nolimits_p\left(I+BR_0(\lambda)\right),\tag{25}$$

здесь для оператора $C\in\mathfrak{S}_p$ с собственными числами ν_n обозначено

$$\det\nolimits_p\left(I+C\right)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+\nu_n)\exp\left(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^k}{k}\nu_n^k\right).$$

$D_p(\lambda)$ обладает следующим необходимым нам свойством:

$$\frac{d}{d\lambda}\ln D_p(\lambda)=(-1)^{p-1}\,\mathrm{Tr}\left(R(\lambda)\left(BR_0(\lambda)\right)^p\right).\tag{26}$$

Теорема 2. *Пусть оператор B таков, что $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(B)$, существует число $\delta \in [0, 1)$ такое, что оператор $BA_0^{-\delta}$ продолжается до ограниченного, а оператор $A_0^{-1+\delta} \in \mathfrak{S}_{p-\omega}$, где p натуральное и $p \geqslant 2$, а $\omega \in [0, 1)$. Предположим также, что для подпоследовательности собственных чисел $\{\lambda_{n_m}\}_{m=1}^{+\infty}$, для которой $\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_m+1}$, где*[5] *$\|R_0(a_m)\|_1 \to 0$, выполнено $\lambda_{n_m+1}^{1-\rho} - \lambda_{n_m}^{1-\rho} \geqslant c$, где $\rho > \delta$. Тогда при $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и*

$$q = \min_{\delta < \rho_1 \leqslant \rho} \frac{(p-1)(1-\rho_1) - \omega(1-\delta)}{\rho_1 - \delta}$$

в случае выполнения неравенства $\delta < \rho_2(p+q-1)$, где $\rho_2 = \rho - \rho_1$, верна следующая формула

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \sum_{k=1}^{p+q} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k \, d\lambda \right) = 0, \tag{27}$$

а если $\delta \geqslant \rho_2(p+q-1)$, то при $l \geqslant 2$ и таком, что $\delta - \rho_2(p+q-1) - (\rho - \delta)(l-1) \leqslant 0$ верна формула

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \sum_{k=1}^{p+q+l-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k \, d\lambda \right) = 0, \tag{28}$$

Мы начнем доказательство теоремы с одной формулы для регуляризованного определителя возмущения, отсутствующей в известных нам источниках.

Лемма 6. *Если $BA_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p$, то при $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что $\|BR_0(\lambda)\| < 1$, для логарифма регуляризованного определителя возмущения (25) верно представление*

$$\ln D_p(\lambda) = \operatorname{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} (BR_0(\lambda))^l \right). \tag{29}$$

Доказательство. Исследуем функцию, стоящую в (29) справа. Во–первых, при λ таких, что $\|BR_0(\lambda)\| < 1$ мы можем разложить в ряд Тейлора функцию $\ln(I + BR_0(\lambda))$ и получить равенство

$$\operatorname{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} (BR_0(\lambda))^l \right) =$$

[5] последовательность $\{a_m\}$ выбрана по лемме 4

$$= \operatorname{Tr}\left(\ln\left(I + BR_0(\lambda)\right) + \sum_{l=1}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l} (BR_0(\lambda))^l\right). \tag{30}$$

Далее, дифференцируя по λ правую часть (30) и используя формулу [19, стр. 208]

$$\frac{d}{d\mu} \operatorname{Tr}\left(F\left(A(\mu)\right)\right) = \operatorname{Tr}\left(F'\left(A(\mu)\right) \frac{dA(\mu)}{d\mu}\right),$$

где $F(z)$ — скалярная голоморфная в некоторой содержащей спектр оператора $A(\mu)$ области комплексной плоскости функция, мы получаем следующее равенство:

$$\frac{d}{d\lambda} \operatorname{Tr}\left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \left(BR_0(\lambda)\right)^l\right) =$$

$$= \operatorname{Tr}\left(\left(I + BR_0(\lambda)\right)^{-1} BR_0^2(\lambda) + \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l (BR_0(\lambda))^l R_0(\lambda)\right),$$

из которого с помощью $R(\lambda) = R_0(\lambda)\left(I + BR_0(\lambda)\right)^{-1}$ и свойства следа $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ немедленно получается (26), что дает совпадение производных функций из обеих частей равенства (29). Кроме того, из (25) следует, что при $\|BR_0(\lambda)\| \to 0$ $D_p(\lambda) \to 1$, что заведомо имеет место в формуле (29)(если норма компактного оператора меньше единицы, то и его первое сингулярное число $s_1 < 1$, и тогда $\left\|BR_0(\lambda)^{p+k}\right\|_1 \leqslant s_1^k \left\|BR_0(\lambda)^p\right\|_1$). Лемма доказана.

Теперь мы готовы приступить непосредственно к исследованию формулы следа. Условия теоремы (в силу того, что из $\lambda_{n_m+1}^{1-\rho} - \lambda_{n_m}^{1-\rho} \geqslant c$ следует $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \geqslant c\lambda_{n_m+1}^{\rho}$) позволяют выбрать контур Γ_m в соответствии с результатом леммы 3 так, что бы внутри контура количество собственных чисел A_0 и $A_0 + B$ было одинаково и так, что на Γ_m выполнено $\|BR_0(\lambda)\| < 1$. Тогда из (29) интегрированием по частям получаем

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \operatorname{Tr}\left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \left(BR_0(\lambda)\right)^l\right) d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \ln D_p(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \frac{d}{d\lambda} \ln D_p(\lambda)\, d\lambda, \tag{31}$$

и используя (26) продолжаем (31):

$$\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\lambda\,\mathrm{Tr}\left(R(\lambda)\left(BR_0(\lambda)\right)^p\right)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\lambda\,\mathrm{Tr}\left(R_0(\lambda)-R(\lambda)+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k R_0(\lambda)\left(BR_0(\lambda)\right)^k\right)\,d\lambda. \qquad (32)$$

Далее нам надо разбить интеграл (32) в сумму интегралов, но сделать это непосредственно нельзя, так как каждый из операторов по отдельности под операцией Tr в (32), вообще говоря, не ядерный. Однако операторы вида $\int_{\Gamma_m}\lambda R_0(\lambda)\left(BR_0(\lambda)\right)^k\,d\lambda$ являются конечномерными как сумма конечного числа вычетов в точках спектра оператора A_0 внутри контура, а разложение в ряда Лорана оператора $R_0(\lambda)$ в окрестности каждой из этих точек имеет коэффициентами главной части конечномерные проекторы, что обеспечивает конечномерность и всех возникающих композиций операторов — коэффициентов разложения. Таким образом, используя перестановочность операции Tr и интегрирования по параметру семейства ядерных операторов, мы можем записать интеграл от следа суммы операторов (32) в сумму следов конечномерных операторов:

$$\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}\int\limits_{\Gamma_m}\lambda\left(R_0(\lambda)-R(\lambda)\right)\,d\lambda+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}\int\limits_{\Gamma_m}\lambda R_0(\lambda)\left(BR_0(\lambda)\right)^k\,d\lambda=$$

$$=\sum_{l=0}^{n_m}(\mu_l-\lambda_l)+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}\int\limits_{\Gamma_m}\lambda\left(BR_0(\lambda)\right)^{k-1}BR_0^2(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\sum_{l=0}^{n_m}(\mu_l-\lambda_l)+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}\int\limits_{\Gamma_m}\lambda\left(BR_0(\lambda)\right)^{k-1}d\left(BR_0(\lambda)\right)=$$

$$=\sum_{l=0}^{n_m}(\mu_l-\lambda_l)+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^{k-1}}{2\pi ik}\,\mathrm{Tr}\int\limits_{\Gamma_m}\left(BR_0(\lambda)\right)^k\,d\lambda. \qquad (33)$$

Цепочка равенств (31), (32) и (33) дает нам основное равенство

$$\sum_{l=0}^{n_m}(\mu_l-\lambda_l)+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^{k-1}}{2\pi ik}\,\mathrm{Tr}\int\limits_{\Gamma_m}\left(BR_0(\lambda)\right)^k\,d\lambda=$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \left(BR_0(\lambda)\right)^l \right) d\lambda. \qquad (34)$$

Приступим теперь к оценке слагаемых в правой части (34) и начнём с ядерной нормы оператора $(BR_0(\lambda))^{p+q}$, где q — некоторое целое неотрицательное число.

$$\max_{|\lambda|=a_m} \left\| (BR_0(\lambda))^{p+q} \right\|_1 \leqslant \left\| BA_0^{-\delta} \right\|^{p+q} \max_{|\lambda|=a_m} \left\| \left(A_0^{\delta} R_0(\lambda)\right)^{p+q} \right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{p+q} \lambda_n^{\delta(p+q)}}{|\lambda_n - a_m|^{p+q}} \qquad (35)$$

Так как $A_0^{-1+\delta} \in \mathfrak{S}_{p-\omega}$, то $A_0^{(-1+\delta)(p-\omega)} \in \mathfrak{S}_1$ и по лемме 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left|\lambda_n^{(1-\delta)(p-\omega)} - a_m^{(1-\delta)(p-\omega)}\right|} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда продолжим (35), применив (2)

$$\max_{|\lambda|=a_m} \left\| (BR_0(\lambda))^{p+q} \right\|_1 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{p+q} \lambda_n^{\delta(p+q)+(1-\delta)(p-\omega)-1}}{\left|\lambda_n^{(1-\delta)(p-\omega)} - a_m^{(1-\delta)(p-\omega)}\right| |\lambda_n - a_m|^{p+q-1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{p+q} \lambda_n^{\delta q}}{|\lambda_n - a_m|^{p+q-1} \left|\lambda_n^{(1-\delta)(p-\omega)} - a_m^{(1-\delta)(p-\omega)}\right| \lambda_n^{1-p+\omega-\delta\omega}}. \qquad (36)$$

Далее, так как $\lambda_{n_m+1}^{1-\rho} - \lambda_{n_m}^{1-\rho} \geqslant c$, то тем более для любых n, m верно $\left|\lambda_n^{1-\rho} - a_m^{1-\rho}\right| \geqslant c$ и тогда для любых неотрицательных ρ_1, ρ_2, $\rho_1+\rho_2 = \rho$ из неравенства (2) имеем

$$\frac{1}{|\lambda_n - a_m|} \leqslant \frac{1}{\lambda_n^{\rho_1} a_m^{\rho_2} \left|\lambda_n^{1-\rho} - a_m^{1-\rho}\right|} \leqslant \frac{c}{\lambda_n^{\rho_1} a_m^{\rho_2}}. \qquad (37)$$

Выберем число $\rho_1 > \delta$ так, что бы выполнялось равенство

$$\rho_1(p+q-1) + 1 - p + \omega - \delta\omega - \delta q = 0$$

при наименьшем из возможных q, то есть

$$q = \min_{\delta < \rho_1 \leqslant \rho} \frac{(p-1)(1-\rho_1) - \omega(1-\delta)}{\rho_1 - \delta} \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \qquad (38)$$

Так как при $\rho_1 \to \delta$ минимизируемая функция в (38) стремится к бесконечности, то в силу условия $\rho_1 \leqslant \rho$ такой выбор q возможен.

Применяя теперь в (36) неравенство (37) с выбранным в соответствии с (38) ρ_1, мы получаем оценку

$$\left\|(BR_0(a_m))^{p+q}\right\|_1 = o\left(\lambda_{n_m}^{-\rho_2(p+q-1)}\right) \tag{39}$$

Тогда аналогично (18) и (19) имеем при $l \geqslant 2$

$$\left|\int\limits_{\Gamma_m} \operatorname{Tr}(BR_0(\lambda))^{p+q+l}\, d\lambda\right| \leqslant \left\|(BR_0(\lambda))^{p+q}\right\|_1 \int\limits_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|^l\, |d\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|(BR_0(\lambda))^{p+q}\right\|_1 c^l \int\limits_{\Gamma_m} \left(\frac{\lambda_{n_m}^{\delta}}{|\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}|}\right)^l a_m\, d\varphi =$$

$$= o\left(\lambda_{n_m}^{\delta-\rho_2(p+q-1)-(\rho-\delta)(l-1)}\right) \tag{40}$$

И, таким образом, для остатка ряда (34) из (40) при $l \geqslant 2$ имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} \operatorname{Tr}\left(\sum_{k=p+q+l}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(BR_0(\lambda))^k\right) d\lambda\right| =$$

$$= o\left(\lambda_{n_m}^{\delta-\rho_2(p+q-1)-(\rho-\delta)(l-1)}\right),$$

что и доказывает формулу (28). Для доказательства (27) нам необходимо оценить интеграл

$$\left|\int\limits_{\Gamma_m} \operatorname{Tr}(BR_0(\lambda))^{p+q+1}\, d\lambda\right| \leqslant \left\|(BR_0(\lambda))^{p+q}\right\|_1 \int\limits_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|\, |d\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|(BR_0(\lambda))^{p+q}\right\|_1 c\lambda_{n_m}^{\delta} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{a_m\, d\varphi}{|\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}|} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|(BR_0(\lambda))^{p+q}\right\|_1 c\lambda_{n_m}^{\delta} \left(\int\limits_0^{\varphi_m} \frac{a_m\, d\varphi}{|\lambda_{n_m} - a_m|} + \int\limits_{\varphi_m}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin\varphi}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left\| (BR_0(\lambda))^{p+q} \right\|_1 c\lambda_{n_m}^{\delta} \left(\frac{a_m \varphi_m}{\lambda_{n_m}^{\rho}} + \ln \frac{1}{\varphi_m} \right).$$

Первое слагаемое стремиться к нулю при выборе $\varphi_m = 1/a_m$, но второе неограничено. Однако, при выполнении условия теоремы $\delta < \rho_2(p+q-1)$ из (39) и того, что любая степень подавляет логарифмический рост следует (27). Теорема доказана.

Замечание. Во второй теореме не рассмотрен предельный случай $p = 1, \omega = 0$. Однако этот случай теперь может быть легко исследован: доказательство в точности совпадает с доказательством первой теоремы, в котором надо лишь везде вместо параметра ω (из формулировки теоремы 1) использовать параметр $\rho - \delta$ (из формулировки теоремы 2). При этом полученная формула совпадёт с формулой первой теоремы.

3. $\mathbf{R_0(\lambda)}$ — неядерный оператор.

В данном параграфе мы рассматриваем случай, когда оператор A_0^{-1} неядерный. Этот случай существенно отличается от предыдущего тем, что в общем положении в спектре оператора A_0 отсутствуют растущие лакуны.

Теорема 3. *Пусть у оператора A_0 существует подпоследовательность его собственных чисел $\{\lambda_{n_m}\}_{m=0}^{+\infty}$ такая, что $\lambda_{n_m+1}-\lambda_{n_m} \to \infty$ при $m \to \infty$. Пусть оператор $B \in \mathfrak{S}_p$, где p натуральное и $p \geqslant 2$. Тогда верна формула*

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k \, d\lambda \right) = 0.$$

Доказательство. Определим систему контуров Γ_m на комплексной плоскости как систему окружностей с центрами в нуле и радиусами $a_m = (\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m})/2$. Из леммы 3 и условий теоремы немедленно следует, что внутри контуров Γ_m количество собственных чисел операторов A_0 и $A_0 + B$ совпадает при всех достаточно больших m для любого ограниченного оператора B. Тогда по лемме 6 в силу $BR_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_p$ имеем

$$\ln D_p(\lambda) = \operatorname{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} (BR_0(\lambda))^l \right), \tag{41}$$

и аналогично (34) верно

$$\sum_{j=0}^{n_m}\left(\mu_j-\lambda_j+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^{k-1}}{2\pi ik}\operatorname{Tr}\int\limits_{\Gamma_m}\left(BR_0(\lambda)\right)^k\,d\lambda\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\operatorname{Tr}\left(\sum_{l=p}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l}\left(BR_0(\lambda)\right)^l\right)d\lambda. \tag{42}$$

Для оценки слагаемых ряда (42) при $l\geqslant p$ аналогично (18) и (19) имеем (здесь существенно условие $p\geqslant 2$):

$$\left|\int\limits_{\Gamma_m}\operatorname{Tr}\left(BR_0(\lambda)\right)^l\,d\lambda\right|\leqslant\left\|B^p\right\|_1\left\|B^{l-p}\right\|\int\limits_{\Gamma_m}\left\|R_0(\lambda)\right\|^l\,|d\lambda|\leqslant$$

$$\leqslant c^l\int\limits_0^{\pi/2}\frac{a_m\,d\varphi}{\left|\lambda_{n_m}-a_me^{i\varphi}\right|^l}\leqslant\frac{c^l}{\left|\lambda_{n_m}-a_m\right|^{l-1}}, \tag{43}$$

и далее суммируя геометрическую прогрессию, из (42) и (43) получаем утверждение теоремы.

Теорема 4. *Пусть существует число $\delta\geqslant 0$ такое, что оператор BA_0^{δ} продолжается до ограниченного и что $A_0^{-(1+\delta)}$ — ядерный оператор. Тогда существует подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что верна формула*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{n_m}(\mu_j-\lambda_j-(B\varphi_j,\varphi_j)\right)=0.$$

Доказательство. Во–первых, покажем, что можно выбрать систему контуров Γ_m на комплексной плоскости, разделяющую спектр оператора A_0 так, что при возмущении B количество собственных чисел внутри контура не изменяется. Действительно, мы можем аналогично доказательству леммы 3 записать

$$R(\lambda)=R_0(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(BR_0(\lambda)\right)^k=R_0(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(BA_0^{\delta}A_0^{-\delta}R_0(\lambda)\right)^k$$

и

$$\|A_0^{-\delta}R_0(\lambda)\|\leqslant\max_{1\leqslant k<\infty}\frac{1}{\lambda_k^{\delta}|\lambda_k-\lambda|}. \tag{44}$$

Теперь, обозначая $d_n(\xi) = \lambda_{n+1}^{1+\xi} - \lambda_n^{1+\xi}$, заметим, что в силу ядерности оператора $A_0^{-(1+\delta)}$ существует подпоследовательность λ_{n_m} такая, что $d_{n_m}(\delta) \to \infty$ при $m \to \infty$. Далее заметим, что либо $\lambda_{n_m+1}/\lambda_{n_m} \to 1$, $d_{n_m}(0)/\lambda_{n_m} \to 0$ при $n \to \infty$, либо для некоторой подпоследовательности последовательности λ_{n_m} (мы не будем вводить дополнительный индекс, полагая, что такая подпоследовательность выбрана сразу в качестве основной) $\lambda_{n_m+1}/\lambda_{n_m} > 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $d_{n_m}(0)/\lambda_{n_m} > \varepsilon$. В первом случае запишем

$$\frac{d_{n_m}(\delta)}{\lambda_{n_m}^{\delta}} = \frac{\lambda_{n_m+1}^{\delta}}{\lambda_{n_m}^{\delta}} \lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} = \left(1 + \frac{d_{n_m}(0)}{\lambda_{n_m}}\right)^{\delta} \lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m}, \tag{45}$$

и так как $d_n(0)/\lambda_n \to 0$, то мы можем в (45) использовать формулу Тейлора и получаем

$$d_{n_m}(\delta) \sim (1+\delta) d_{n_m}(0) \lambda_{n_m}^{\delta}. \tag{46}$$

Выбирая в (44) $\lambda = a_m$ между λ_{n_m} и λ_{n_m+1}, мы получим в знаменателе величину порядка $d_{n_m}(0)\lambda_{n_m}^{\delta}$, и так как $d_{n_m}(\delta) \to \infty$, то в силу (44) и (46) $\|A_0^{-\delta} R_0(a_m)\| \to 0$. Во втором случае $d_{n_m}(0) > \varepsilon \lambda_{n_m} \to \infty$ и правая часть в (44) очевидно стремиться к нулю при том же выборе $\lambda = a_m$. Дальнейшие рассуждения ничем не отличаются от доказательства леммы 3.

Докажем, что в предположениях теоремы существует бесконечно большая последовательность положительных чисел $\{a_m\}_{m=1}^{+\infty}$ такая, что $\|BR_0(\lambda)\|_1 \to 0$ при $m \to \infty$. Аналогично доказательству теоремы 1 оценим $\|BR_0(\lambda)\|_1$:

$$\|BR_0(\lambda)\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(BA_0^{\delta}\varphi_k, BA_0^{\delta}\varphi_k)^{\frac{1}{2}}}{\lambda_k^{\delta}|\lambda_k - \lambda|} \leqslant \|BA_0^{\delta}\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{\delta}|\lambda_k - |\lambda||}. \tag{47}$$

Так как неравенство (3) в отличии от неравенства (2) несимметрично относительно входящих в него переменных, то оценить (47) подобно предыдущему нельзя и мы будем оценивать (47) частями. Далее мы оперируем уже выбранной последовательностью $\{a_m\}$ — она выбрана по лемме 4 для оператора $A_0^{1+\delta}$. Очевидно, она разделяет спектр нужным нам способом. При $n > n_m$ $\lambda_n > a_m$ и по (3)

$$\sum_{k=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{\delta}(\lambda_k - a_m)} \leqslant \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \frac{\delta+1}{(\lambda_k^{1+\delta} - a_m^{1+\delta})}. \tag{48}$$

Так как оператор $A_0^{-1-\delta} \in \mathfrak{S}_1$, то по лемме 4 сумма (48) стремиться к нулю при $m \to \infty$.

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $b_\varepsilon > 0$, что

$$\sum_{\lambda_n \geqslant b_\varepsilon} \frac{1}{\lambda_n^{1+\delta}} < \varepsilon, \tag{49}$$

и одновременно существует $A > 0$ такое, что для любого $a > A$

$$\sum_{\lambda_n < b_\varepsilon} \frac{1}{\lambda_n^\delta |\lambda_n - a|} < \varepsilon. \tag{50}$$

в силу фиксированности числа слагаемых для любого выбранного ε.

Теперь, если $\lambda_n < a_m/2$, то

$$2\lambda_n < a_m \Leftrightarrow \lambda_n < a_m - \lambda_n \Leftrightarrow \frac{1}{a_m - \lambda_n} < \frac{1}{\lambda_n} \tag{51}$$

и тогда выбрав $\varepsilon > 0$ и для этого ε такое b_ε и A, что выполнено (49) и (50), имеем

$$\sum_{k=0}^{n_m} \frac{1}{\lambda_k^\delta (a_m - \lambda_k)} = \sum_{\lambda_k < a_m/2} \frac{1}{\lambda_k^\delta (a_m - \lambda_k)} + \sum_{a_m/2 \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_{n_m}} \frac{1}{\lambda_k^\delta (a_m - \lambda_k)} =$$

$$= \sum_{\lambda_k < b_\varepsilon} \frac{1}{\lambda_k^\delta (a_m - \lambda_k)} + \sum_{b_\varepsilon \leqslant \lambda_k < a_m/2} \frac{1}{\lambda_k^\delta (a_m - \lambda_k)} + \sum_{a_m/2 \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_{n_m}} \frac{1}{\lambda_k^\delta (a_m - \lambda_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \sum_{b_\varepsilon \leqslant \lambda_k < a_m/2} \frac{1}{\lambda_k^{1+\delta}} + \sum_{a_m/2 \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_{n_m}} \frac{a_m^\delta}{\lambda_k^\delta (a_m^{1+\delta} - \lambda_k^{1+\delta})}, \tag{52}$$

здесь первое слагаемое оценено по (50), для оценки второго использовано (51), а к третьему мы применили (3). Далее, очевидно, второе слагаемое меньше ε в силу (49), а так как в третьем $a_m/\lambda_k \leqslant 2$ для всех k, входящих в сумму, то оно стремиться к нулю по лемме 4.

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы. Повторяя с очевидными изменениями рассуждения, приведенные нами в доказательстве теоремы 1 при получении формул (10)—(19) (оценку нормы оператора $\|BR_0(a_m)\|$ см. в (44) и (3)), мы имеем при $k \geqslant 3$

$$\int_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|^{k-1} |d\lambda| \leqslant \frac{c^k}{\lambda_{n_m}^\delta \left(a_m^{1+\delta} - \lambda_{n_m}^{1+\delta}\right)^{k-2}} \tag{53}$$

и тогда при $l \geqslant 3$ верно

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} \left(\sum_{k=l}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \right| \leqslant \frac{c}{\lambda_{n_m}^{\delta} \left(a_m^{1+\delta} - \lambda_{n_m}^{1+\delta} \right)^{l-2}} \tag{54}$$

Опять требуется отдельно оценивать вторую поправку:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \operatorname{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda))\, d\lambda = \sum_{n=0}^{n_m} \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{\lambda_k - \lambda_n}$$

Заметим, что из–за неядерности оператора A_0^{-1} сходимость ряда справа неочевидна и само записанное нами равенство нуждается в обосновании. Мы получим его вместе с оценкой. Рассмотрим внутренний ряд и, используя преобразование Абеля и неравенство (3), получим

$$\sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{|(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)|}{\lambda_k - \lambda_n} = \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{|(BA_0^{\delta}\varphi_n, \varphi_k)(BA_0^{\delta}\varphi_k, \varphi_n)|}{\lambda_n^{\delta}\lambda_k^{\delta}(\lambda_k - \lambda_n)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta+1}{\lambda_n^{\delta}} \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{|(BA_0^{\delta}\varphi_n, \varphi_k)(BA_0^{\delta}\varphi_k, \varphi_n)|}{\lambda_k^{1+\delta} - \lambda_n^{1+\delta}} =$$

$$= \frac{\delta+1}{\lambda_n^{\delta}} \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \sum_{l=n_m+1}^{k} |(BA_0^{\delta}\varphi_n, \varphi_l)(\varphi_l, (BA_0^{\delta})^*\varphi_n)| \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\lambda_k^{1+\delta} - \lambda_n^{1+\delta}} - \frac{1}{\lambda_{k+1}^{1+\delta} - \lambda_n^{1+\delta}} \right) \leqslant \frac{c\|BA_0^{\delta}\|^2}{\lambda_n^{\delta} \left(\lambda_{n_m+1}^{1+\delta} - \lambda_n^{1+\delta} \right)}$$

и тогда

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \operatorname{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda))\, d\lambda \right| \leqslant \sum_{n=0}^{n_m} \frac{c\|BA_0^{\delta}\|^2}{\lambda_n^{\delta} \left(\lambda_{n_m+1}^{1+\delta} - \lambda_n^{1+\delta} \right)},$$

и здесь правая часть стремится к нулю по лемме 4. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть существует число $\delta \geqslant 0$ такое, что оператор BA_0^{δ} продолжается до ограниченного, оператор $A_0^{-(1+\delta)} \in \mathfrak{S}_{p-\omega}$, где p натуральное и $p \geqslant 2$, а $\omega \in [0, 1)$. Предположим также, что для подпоследовательности собственных чисел $\{\lambda_{n_m}\}_{m=1}^{+\infty}$, для которой*

$\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_m+1}$, где $\{a_m\}$ — последовательность чисел, на которой стремиться к нулю резольвента оператора $A_0^{(1+\delta)(p-\omega)}$, выполнено $\lambda_{n_m+1}^{1+\rho} - \lambda_{n_m}^{1+\rho} \geqslant c$, где $c > 0$, $\rho < \delta$. Тогда при $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и

$$q = \min_{\rho \leqslant \rho_1 < \delta} \frac{(1+\rho_1)(p-1) - \omega(1+\delta)}{(\delta - \rho_1)} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

при выполнении условия $q + \delta + \omega > 0$ верна следующая формула

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) + \sum_{k=1}^{p+q} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k \, d\lambda \right) = 0.$$

Если $q = \delta = \omega = 0$, то верна формула

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k \, d\lambda \right) = 0.$$

Доказательство. Во–первых, условия теоремы позволяют немедленно применить лемму 3 и верно, что система контуров $\Gamma_m = \{\lambda \in \mathbb{C} : : |\lambda| = a_m\}$ содержит внутри себя одинаковое число собственных чисел возмущённого и невозмущённого операторов. Мы вновь используем формулу для регуляризованного определителя возмущения (29) и без изменений в рассуждениях теоремы 2 мы приходим к верному в условиях нынешней теоремы равенству (34).

Точно так же далее нам необходимо оценить ядерную норму оператора $(BR_0(a_m))^{p+q}$ в поисках q, при котором эта ядерная норма стремится к нулю:

$$\left\| (BR_0(a_m))^{p+q} \right\|_1 \leqslant \left\| BA_0^{\delta} \right\|^{p+q} \left\| \left(A_0^{-\delta} R_0(a_m) \right)^{p+q} \right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{p+q}}{\left(\lambda_n^{\delta} \left| \lambda_n - a_m \right| \right)^{p+q}} \tag{55}$$

Так же, как и в предыдущей теореме, в силу несимметричности неравенства (3) ряд (55) надо оценивать частями. Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left| \lambda_n^{(1+\delta)(p-\omega)} - a_m^{(1+\delta)(p-\omega)} \right|} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то для части ряда (55) с $n \geqslant n_m+1$ аналогично рассуждениям теоремы 2 получаем следующее условие на q, при котором эта часть стремиться к нулю:

$$q = \min_{\rho \leqslant \rho_1 < \delta} \frac{(1+\rho_1)(p-1) - \omega(1+\delta)}{(\delta - \rho_1)} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{56}$$

при этом выполнена оценка

$$\sum_{n=n_m+1}^{\infty} \frac{c^{p+q}}{(\lambda_n^{\delta} |\lambda_n - a_m|)^{p+q}} = o(a_m^{(p+q-1)\rho_2}) \quad \text{при} \quad m \to \infty, \tag{57}$$

здесь $\rho_2 = \rho - \rho_1 \leqslant 0$.

Далее q полагается заданным по (56). Часть ряда (55) с $n \leqslant n_m$ оценивается сложнее. Во–первых,

$$\sum_{\lambda_n < a_m/2} \frac{1}{\lambda_n^{\delta(p+q)} |\lambda_n - a_m|^{p+q}} = \sum_{\lambda_n < a_m/2} \frac{\lambda_n^{p-\delta q - \omega(1+\delta)}}{\lambda_n^{(1+\delta)(p-\omega)} |\lambda_n - a_m|^{p+q}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{a_m^{(1+\delta)(q+\omega)}} \sum_{\lambda_n < a_m/2} \frac{1}{\lambda_n^{(1+\delta)(p-\omega)}} = O\left(a_m^{-(1+\delta)(q+\omega)}\right), \tag{58}$$

здесь мы использовали (51). Заметим, что нам необходимо доказать, что (55) стремиться к нулю и по возможности получить квалифицированную оценку скорости, что и сделано для части ряда в (58). Однако, если $q = \omega = 0$, то (58) не обеспечивает убывания. В этом случае необходимо оценивать эту часть ряда так же, как и в теореме 4 — разбивая сумму по схеме формул (49)–(52) с очевидными изменениями. Так что далее мы считаем (58) равным $o(1)$ при $q = \omega = 0$.

Далее, используя (3), имеем

$$\sum_{a_m/2 \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_{n_m}} \frac{1}{\lambda_k^{\delta(p+q)} (a_m - \lambda_k)^{p+q}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{a_m/2 \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_{n_m}} \frac{a_m^{\delta(p+q)}}{\lambda_k^{\delta(p+q)} (a_m^{1+\delta} - \lambda_k^{1+\delta})^{p+q}},$$

а так как $a_m/\lambda_k \leqslant 2$ для всех k, входящих в сумму, то оно стремиться к нулю аналогично ряду (57) с той же оценкой остатка. Таким образом, вся сумма (55) стремится к нулю при выполнении условия (56) и, что важно в дальнейшем, с оценкой скорости — худшей из (57) и (58).

Теперь необходимо оценить члены ряда (34), ниже $l \geqslant 2$:

$$\left|\int\limits_{\Gamma_m} \operatorname{Tr}\left(BR_0(\lambda)\right)^{p+q+l} d\lambda\right| \leqslant \left\|\left(BR_0(\lambda)\right)^{p+q}\right\|_1 \int\limits_{\Gamma_m} \left\|BR_0(\lambda)\right\|^l |d\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\left(BR_0(\lambda)\right)^{p+q}\right\|_1 c^l \int\limits_{\Gamma_m} \left(\frac{1}{\lambda_{n_m}^{\delta} \left|\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}\right|}\right)^l a_m\, d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c^l \left\|\left(BR_0(\lambda)\right)^{p+q}\right\|_1}{\lambda_{n_m}^{\delta l} \left|\lambda_{n_m} - a_m\right|^{l-1}} \leqslant \frac{\left\|\left(BR_0(\lambda)\right)^{p+q}\right\|_1}{\lambda_{n_m}^{\delta}} \left(\frac{c a_m^{\rho}}{\lambda_{n_m}^{\delta}\left(a_m^{1+\rho} - \lambda_{n_m}^{1+\rho}\right)}\right)^{l-1}, \tag{59}$$

и учитывая то, что $a_m/\lambda_{n_m} \to 1$ при $m \to \infty$, для остатка ряда (34) при $l = 2$ имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} \operatorname{Tr}\left(\sum_{k=p+q+2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(BR_0(\lambda)\right)^k\right) d\lambda\right| = o\left(a_m^{\rho-2\delta}\right). \tag{60}$$

Теперь, что бы доказать теорему, осталось оценить слагаемое в (34) с $l = 1$. Здесь ключевой является оценка следующего интеграла:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{a_m\, d\varphi}{\lambda_{n_m}^{\delta}\left|\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}\right|} \leqslant \int\limits_0^{\varphi_m} \frac{a_m\, d\varphi}{\lambda_{n_m}^{\delta}\left|\lambda_{n_m} - a_m\right|} + \int\limits_{\varphi_m}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\lambda_{n_m}^{\delta}\sin\varphi} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c a_m^{1+\rho}\varphi_m}{\lambda_{n_m}^{\delta}} + \frac{c \ln \frac{1}{\varphi_m}}{\lambda_{n_m}^{\delta}}. \tag{61}$$

Умножая (61) на $\left\|\left(BR_0(a_m)\right)^{p+q}\right\|_1$, мы получим нужную оценку. При выборе $\varphi_m = 1/a_m$ получаем , что первое слагаемое есть $O\left(a_m^{\rho-\delta}\right)$, и всегда стремиться к нулю, а второе $O\left(\left\|\left(BR_0(a_m)\right)^{p+q}\right\|_1 a_m^{-\delta}\ln a_m\right)$, и так как $\ln x/x^{\delta} \to 0$ при $\delta > 0$, $x \to \infty$, то и данная поправка стремится к нулю во всех случаях, кроме $q = \delta = \omega = 0$. Теорема доказана.

4. Примеры.

В этом разделе мы рассмотрим ряд примеров применения полученных результатов к конкретным операторам математической физики. Впрочем, большая часть этих примеров по сути является постановками важных самостоятельных задач — ведь во многих случаях интерес вызывает точное вычисление расходящейся части величин типа $(B\varphi_n, \varphi_n)$ в терминах собственных чисел невозмущенного оператора и суммирование сходящейся составляющей к выражению, содержащему только явные параметры операторов A_0 и B.

1. Все условия теоремы 1 выполнены для самосопряженного эллиптического псевдодифференциального оператора на компактном многообразии, возмущенного псевдодифференциальным оператором меньшего порядка, если только разность порядков операторов больше размерности многообразия.

1a. Рассмотрим в качестве оператора A_0 степень $\alpha > 1$ оператора Лапласа $-\Delta$, действующего в $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$ с условиями Дирихле на границе квадрата, а в качестве оператора B оператор умножения на ограниченную измеримую (комплекснозначную) функцию $q(x,y)$. Формула (1) ранее была известна (с достоверным доказательством) [21] для степени оператора $\alpha > 53/40$ и доказательство опиралось на тонкие результаты теории чисел. Так как в этой задаче $\lambda_n \sim n^\alpha$, то из теоремы 1 следует, что формула следа верна для $\alpha > 1$ с необходимым вычитанием одной поправки для потенциала $q(x,y) \in C^{1+\beta}$ с $\beta > 0$. При этих условиях имеем (исходная формула верна для любого ограниченного измеримого потенциала, но гладкость нужна для абсолютного суммирования коэффициентов Фурье и существования значений на границе):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r_k < n^2+m^2 < r_{k+1}} \left(\mu_{nm} - \left(n^2+m^2\right)^\alpha - \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \int_0^\pi q(x,y)dxdy + \right.$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \left(\int_0^\pi q(x,y)dy\right)\cos 2nxdx +$$

$$\left. +\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \left(\int_0^\pi q(x,y)dx\right)\cos 2mydy \right) =$$

$$= \frac{1}{16}(q(\pi,\pi)+q(0,\pi)+q(\pi,0)+q(0,0)) -$$

$$-\frac{1}{8\pi}\left(\int_0^\pi (q(0,y)+q(\pi,y))\,dy + \int_0^\pi (q(x,0)+q(x,\pi))\,dx\right) +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi q(x,y)dxdy$$

1б. Весьма важен также пример дифференциального оператора — второй степени оператора Лапласа на трехмерном параллелепипеде, получающуюся в этом случае формулу следа мы приводить не будем, она однотипна предыдущей, но более громоздка.

1в. Возьмём в качестве оператора A_0 обыкновенный дифференциальный оператор, действующий в $L_2[0,\pi]$ и определяемый дифференциальным выражением $-y^{(6)}$ и краевыми условиями $y(0) = y^{(2)}(0) = y^{(4)}(0) = y(\pi) = y^{(2)}(\pi) = y^{(4)}(\pi) = 0$, а в качестве возмущения B возьмём оператор $q(x)y^{(2)} + p(x)y$ с областью определения $y(0) = y^{(2)}(0) = y(\pi) = y^{(2)}(\pi) = 0$. Конечно, для обыкновенных операторов все вопросы теории решены [11], но реальные вычисления для данного оператора известными методами практически необозримы. В обозначениях теоремы 1 имеем $\delta = 1/3, \omega < 1/2$ и можно выбрать $\omega > \delta$. Таким образом, необходимо вычисление только величины $(B\varphi_n, \varphi_n)$. Так как $\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$, то соответствующие вычисления несложны, и для $p(x)$ и $q''(x)$ гёльдеровых с показателем $\alpha > 1/2$ на окружности формула следа имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_n - n^6 + \frac{n^2}{\pi}\int\limits_0^\pi q(x)dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi p(x)dx - \frac{1}{4\pi}\left(q'(\pi) - q'(0)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi p(x)dx - \frac{1}{4}\left(p(0) + p(\pi)\right) + \frac{1}{8\pi}\left(q'(\pi) - q'(0)\right) - \frac{1}{16}\left(q''(0) + q''(\pi)\right).$$

1г. Рассмотрим в качестве оператора A_0 степень $2+\varepsilon$ оператора $-\Delta$, $\varepsilon > 0$, действующего в $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$ с условиями Дирихле на границе квадрата, а в качестве оператора B дифференциальный оператор первого порядка

$$q(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + p(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

где периодические продолжения функций $\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}$ принадлежат пространству $C^{1+\beta,\ \beta>0}$. В обозначениях теоремы 1 $\delta = 1/(4+2\varepsilon)$, а в силу того, что $\lambda_n \sim n^{2+\varepsilon}$ можно взять $\delta + \omega = 1/2$ и следовательно, можно принять $\omega > \delta$. Тогда формула первого следа имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r_k\leqslant n^2+m^2\leqslant r_{k+1}}\left(\mu_{nm} - \left(n^2+m^2\right)^2 - \frac{n}{\pi^2}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi q(x,y)\sin 2nx dxdy - \right.$$

$$-\frac{m}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} p(x,y)\sin 2my\,dx\,dy - \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{\pi}(q(\pi,y)-q(0,y))\cos 2my\,dy-$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{\pi}(p(x,\pi)-p(x,0))\cos 2nx\,dx\right) =$$

$$=\frac{1}{16\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\partial q}{\partial x}(0,y)+\frac{\partial q}{\partial x}(\pi,y)\right)dy+\frac{1}{16\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\partial p}{\partial y}(x,0)+\frac{\partial p}{\partial y}(x,\pi)\right)dx-$$

$$-\frac{1}{32}\left(\frac{\partial q}{\partial x}(0,0)+\frac{\partial q}{\partial x}(0,\pi)+\frac{\partial q}{\partial x}(\pi,0)+\frac{\partial q}{\partial x}(\pi,\pi)+\frac{\partial p}{\partial y}(0,0)+\frac{\partial p}{\partial y}(0,\pi)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial p}{\partial y}(\pi,0)+\frac{\partial p}{\partial y}(\pi,\pi)\right)+\frac{1}{16\pi}(q(\pi,0)-q(0,0)+q(\pi,\pi)-q(0,\pi)+p(0,\pi)-$$

$$-p(0,0)+p(\pi,\pi)-p(\pi,0))-\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_0^{\pi}(q(\pi,y)-q(0,y))dy-$$

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_0^{\pi}(p(x,\pi)-p(x,0))dx.$$

2. Теорема 5 применима к операторам со спектром неограничено возрастающей кратности. Рассмотрим в качестве оператора A_0 оператор Лапласа – Бельтрами на каком–либо симметрическом пространстве ранга 1, а в качестве оператора B — оператор умножения на ограниченныю измеримую функцию на этом многообразии. Хорошо известно, что спектр оператора A_0 состоит из точек положительной полуоси $\lambda_{n,k} = c(n+a)^2, k = 1,...,K_n, K_n \sim bn^{(\mathrm{dimM}-1)}$, где a, b, c — положительные константы. Тогда, выбирая в качестве подпоследовательности точек спектра, по которым расставляются скобки, пары соседних различных точек, имеем (в обозначениях теоремы 5): $\delta = 0$, $\rho = -\frac{1}{2}$. Выбор p и ω зависит от размерности, для двумерного многообразия $p = 2$, ω выбирается сколь угодно близко к 1. Формула для q приобретает вид

$$q = \min_{-\frac{1}{2}<\rho_1\leqslant 0}\frac{\omega-1}{\rho_1}-1,$$

и видно, что при любом ρ_1 за счёт выбора $\omega = 1 + \rho_1$ можно добится равенства $q = 0$. Тогда выполнено $q + \delta + \omega > 0$, и верна формула

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{n_m}(\mu_j - \lambda_j) + \sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k}\operatorname{Tr}\int\limits_{\Gamma_m}\left(BR_0(\lambda)\right)^k\,d\lambda\right) = 0.$$

Данная задача интенсивно исследовалась в последние годы, и то, что необходимо вычитать две поправки, ранее было получено (даже при использовании дополнительных сведений в силу конкретности оператора) на пути весьма трудных и объёмных вычислений и оценок. Наша абстрактная теорема легко дает здесь точный ответ.

3. В качестве оператора A_0 рассмотрим оператор, задаваемый дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$ с $q(x) > x^{2+\delta}$ для всех больших $|x|$ и некоторым $\delta > 0$, действующий в $L_2(\mathbb{R})$ или в $L_2[0; +\infty)$ с каким–либо условием на границе, а в качестве оператора B оператор умножения на ограниченную измеримую функцию $p(x)$. Наложенное условие на потенциал гарантирует не только дискретность спектра, но и ядерность резольвенты оператора A_0, и в этом случае по теореме 1 верна формула

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n - \lambda_n - \int p(x)\varphi_n^2(x)\,dx) = 0,$$

где $\varphi_n(x)$ — собственные функции невозмущённого оператора. Эта формула является новым результатом в весьма обширных исследованиях операторов второго порядка на неограниченных интервалах, так как вообще не было формул следов с неубывающими потенциалами, но представляется интересной дальнейшая расшифровка стоящего в ней интеграла (хотя эта задача явно выходит за рамки спектральной теории).

Литература

1. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Регуляризованный след ограниченного возмущения оператора с ядерной резольвентой. Дифф. уравнения, 1999, т. 34, №4, с. 556 – 564.
2. *Садовничий В. А., Конягин С. В., Подольский В. Е.* Регуляризованный след оператора с ядерной резольвентой, возмущенного ограниченным. Докл. РАН, 2000, т. 373, №1, с. 26 – 28.

3. *Садовничий В. А., Дубровский В. В.* Об одной абстрактной теореме теории возмущений, о формулах регуляризованных следов и о дзета–функции операторов. Дифф. уравнения, 1977, т. 13, №7, с. 1264 - 1271.
4. *Садовничий В. А., Любишкин В. А.* Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов. Функц. анализ и его прил., 1986, т. 20, №3, с. 55 - 65.
5. *Дубровский В. В.* Абстрактные формулы регуляризованных следов эллиптических гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях. Дифф. уравнения, 1991, т. 27, №12, с. 2164 - 2166.
6. *Dostanić M.* Trace formulas of Gelfand – Levitan type. Publications de l'ins. Math., nouv. serie, 1994, v. 55, p. 51 – 63.
7. *Lax P. D.* Trace formulas for the Schroedinger operator. Comm. Pure and Appl. Math., 1994, v. XLVII, p. 503 - 512.
8. *Dostanić M.* Spectral properties of the operator of Riesz potential type. Proc. of the AMS, 1998, v. 126, №8, p. 2291 - 2297.
9. *Муртазин Х. Х., Фазуллин З. Ю.* О формулах следов для неядерных возмущений. Докл. РАН, 1999, т. 368, №4, с. 442 – 444.
10. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов с относительно ядерным возмущением. Докл. РАН, 2001, т. 378, №3, с. 1 – 2.
11. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций. Функ.ан. и его прил., 1967, т. 1, №2, с. 52 – 59.
12. *Садовничий В. А., Дубровский В. В.* О классической формуле первого регуляризованного следа оператора Лапласа с нечетным потенциалом на сфере. Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1996, т. 19, с. 37 – 72.
13. *Podol'skii V. E.* On the summability of regularized sums of eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator with potential on symmetric spaces of rank one. Rus. J. Math. Phys. 1996, v. 4, №1, p. 123 – 130.
14. *Александрова Е. В., Бочкарева О. В., Подольский В. Е.* Суммирование регуляризованных следов сингулярного оператора Штурма – Лиувилля. Дифф. уравнения. 1997. т. 33, №3. с. 291 – 295.
15. *Коплиенко Л. С.* О формуле следов для возмущений неядерного типа. Сиб. матем. журн., 1984, т. 25, вып. 5, с. 62 – 71.
16. *Neidhardt H.* Spectral shift function and Gilbert–Schmidt perturbation: extensions of some work of L. S. Koplienko. Math. Nachr., 1988, v. 138, p. 7 – 25.
17. *Dostanić M.* Trace formulas for nonnuclear perturbations of selfadjoint operators. Publications de l'ins. Math., nouv. serie, 1993, v. 54, p. 71 – 79.
18. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972, 740 с.

19. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965, 448 с.

20. *Яфаев Д. Р.* Математическая теория рассеяния. СПб.: Изд–во С.–Петербургского ун–та, 1994 г., 424 с.

21. *Дубровский В. В.* Регуляризованный след степени оператора Лапласа с потенциалом на квадрате. Мат. заметки, 1996, т. 60, №1, с. 136 – 138.